*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2010, № 2, с. 33–38* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0011*

*Н.А. КОРЕШКОВ*

# О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ $n$-КРАТНЫХ АЛГЕБР ЛИ И АССОЦИАТИВНЫХ $n$-КРАТНЫХ АЛГЕБР

*Аннотация.* Получены условия нильпотентности конечномерных $n$-кратных алгебр Ли и конечномерных ассоциативных $n$-кратных алгебр, которые аналогичны теоремам Энгеля и Веддербарна для алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

*Ключевые слова*: $n$-кратная алгебра Ли, ассоциативная $n$-кратная алгебра, нильпотентность.

*УДК*: 512.554

*Abstract.* We obtain conditions for the nilpotency of finite-dimensional $n$-multiple Lie algebras and finite-dimensional associative $n$-multiple algebras. The established conditions are analogous to theorems of Engel and Wedderburn for Lie algebras and associative algebras.

*Keywords*: $n$-multiple Lie algebra, associative $n$-multiple algebra, nilpotency.

В работе [1] при изучении структуры $n$-кратной алгебры ассоциативного типа было отмечено, что гамильтонова и контактная алгебры (в модулярном случае) получаются редукцией в характеристику $p > 0$ коммутаторных алгебр некоторых $n$-кратных алгебр ассоциативного типа. В частности, из приводимого в [1] примера следует, что умножение в гамильтоновой и контактной алгебрах можно рассматривать как сумму некоторых "частичных" умножений. Это наблюдение приводит к понятию $n$-кратной алгебры Ли.

Пусть $L$ — векторное пространство над полем $k$. Будем говорить, что $L$ — $n$-кратная алгебра Ли, если имеется $n$ бинарных билинейных антикоммутативных операций $I = \{\boxed{1}, \dots, \boxed{n}\}$ на $L$ таких, что для любой пары $\boxed{r}, \boxed{s} \in I$ выполнено соотношение

$$(a\boxed{r}b)\boxed{s}c + (b\boxed{r}c)\boxed{s}a + (c\boxed{r}a)\boxed{s}b = 0, \quad a, b, c \in L. \tag{1}$$

При $\boxed{r} = \boxed{s}$ получаем обычное тождество Якоби, т. е. пространство $L$ является алгеброй Ли относительно каждой операции.

Обозначим левую часть тождества (1) через $J(a, b, c, \boxed{r}, \boxed{s})$. Тогда векторное пространство $L$ с набором операций $I$ будем называть симметрической $n$-кратной алгеброй Ли, если вместо тождества (1) выполнено соотношение

$$J(a, b, c, \boxed{r}, \boxed{s}) + J(a, b, c, \boxed{s}, \boxed{r}) = 0, \quad a, b, c \in L.$$

Структура гамильтоновой $H_{2n}$ и контактной $K_{2n+1}$ алгебр дают примеры симметрических $n$-кратных алгебр Ли. Рассмотрим случай $H_{2n}$.

---

Поступила 01.11.2007

Обозначим через $O_{2n} = k[x_1, \dots, x_{2n}]$ кольцо многочленов над полем $k$ от $2n$ переменных. Определим $n$ операций $I = \{\boxed{1}, \dots, \boxed{n}\}$ на $O_{2n}$ по правилу

$$f\boxed{r}g = \partial_r f \partial_{n+r} g - \partial_r g \partial_{n+r} f, \quad f, g \in O_{2n}.$$

Тогда легко проверить, что $O_{2n}$ превращается в симметрическую $n$-кратную алгебру Ли, причем операция $\{f, g\} = \sum_{r=1}^{n} f\boxed{r}g$ реализует на $O_{2n}$ структуру гамильтоновой алгебры $H_{2n}$.

Заметим, что при $n = 2$ структура симметрической 2-кратной алгебры Ли изучалась в [2]. А именно, в этой работе вычислены размерности компонент градуировки свободной симметрической 2-кратной алгебры Ли.

Пусть $L$ — $n$-кратная алгебра Ли, $A$, $B$ — подпространства в $L$. Тогда произведением $AB$ этих подпространств будем называть линейную оболочку $\langle a\boxed{r}b,\ a \in A,\ b \in B,\ \boxed{r} \in I\rangle$ любых произведений элементов из $A$ и $B$. В частности, $L^2 = \langle a\boxed{r}b,\ a, b \in L,\ \boxed{r} \in I\rangle$ и, соответственно, $L^m = L^{m-1}L$. Используя индукцию, легко проверить, что $L^i L^j \subseteq L^{i+j}$.

Если для некоторого натурального $m$ имеет место $L^m = 0$, то $n$-кратную алгебру Ли $L$ будем называть нильпотентной. Обозначим через $\mathrm{ad}_r\, x$ оператор левого умножения относительно операции $\boxed{r}$, т. е. $\mathrm{ad}_r\, x(y) = x\boxed{r}y$, $x, y \in L$.

Если $n$-кратная алгебра Ли нильпотентна, т. е. $L^m = 0$ для некоторого натурального $m$, то для любого набора элементов $x_1, \dots, x_m$ произведение, составленное из них, при любой расстановке скобок и с любыми операциями равно нулю. В частности, если $x_1 = \dots = x_{m-1} = x$, то $(\mathrm{ad}_{r_1} x\, \mathrm{ad}_{r_2} x \dots \mathrm{ad}_{r_{m-1}} x)x_m = 0$. Таким образом, ассоциативная алгебра Ли $A_x^L$, порожденная $n$ операторами $\mathrm{ad}_r\, x$, $r = 1, \dots, n$, для любого фиксированного $x \in L$ является нильпотентной. Это условие не только необходимо, но и достаточно для нильпотентности конечномерной $n$-кратной алгебры Ли.

**Теорема 1.** *Конечномерная $n$-кратная алгебра Ли $L$ нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in L$ нильпотентна ассоциативная алгебра $A_x^L$.*

Для доказательства теоремы воспользуемся конструкцией представления $n$-кратной алгебры Ли.

Будем говорить, что задано представление $n$-кратной алгебры Ли $L$ ($L$ над полем $k$) в пространстве $V$ над тем же полем, если имеется набор $n$ линейных отображений $f_r$, $r = 1, \dots, n$, из $L$ в $\mathrm{End}_k V$ таких, что

$$f_r(x\boxed{s}y) = f_r(x) f_s(y) - f_r(y) f_s(x), \quad x, y \in L. \tag{2}$$

Если $V = L$, а $f_r(x) = \mathrm{ad}_r\, x$, то (2) является переформулировкой соотношения (1). Такое представление назовем присоединенным.

Пусть $V = V(f_r,\ r = 1, \dots, n)$ — пространство представления $n$-кратной алгебры Ли $L$. Обозначим через $A_x^V$ ассоциативную алгебру, порожденную $n$ операторами $f_r(x)$, $r = 1, \dots, n$, $x \in L$.

При $n = 1$ нильпотентность алгебры $A_x^L$ равносильна нильпотентности оператора $\mathrm{ad}\, x$. Поскольку алгебру Ли с условием нильпотентности каждого оператора $\mathrm{ad}\, x$ принято называть энгелевой алгеброй, то $n$-кратную алгебру Ли $L$ с условием нильпотентности алгебры $A_x^L$ будем называть энгелевой $n$-кратной алгеброй Ли.

Подалгеброй $n$-кратной алгебры Ли называем подпространство, замкнутое относительно всех произведений $\boxed{r}$, $r = 1, \dots, n$.

Идеалом $n$-кратной алгебры Ли $L$ называем подпространство $B$, удовлетворяющее условиям $a\boxed{r}b \in B$, $a \in L$, $b \in B$, $r = 1, \dots, n$.

Если $B$ — идеал $n$-кратной алгебры Ли $L$, то фактор-алгебра $L/B$ — это фактор-пространство со следующими операциями умножения: $\overline{a}\boxed{r}\overline{b} = \overline{a\boxed{r}b}$, $r = 1, \ldots, n$, где символ $\overline{c}$ обозначает элемент фактор-алгебры.

**Теорема 2.** *Пусть $L$ — конечномерная энгелева $n$-кратная алгебра Ли, а $V = V(f_r, r = 1, \ldots, n)$ — пространство представления такое, что $A_x^V$ нильпотентна для каждого $x \in L$. Тогда для всех операторов $f_r(x)$, $x \in L$, $r = 1, \ldots, n$, существует вектор $v \in V$ такой, что $f_r(x)v = 0$.*

*Доказательство* проведем индукцией по размерности $L$. Если $\dim L = 1$, т.е. $L = \langle x \rangle$, то утверждение очевидно, так как $A_x^V$ нильпотентна.

Пусть $\dim L > 1$ и $K$ — максимальная подалгебра в $L$. Продолжение операторов $\mathrm{ad}_r\, x$, $x \in K$, на фактор-пространство $L/K$ (которое обозначим через $\overline{\mathrm{ad}}_r x$) задает представление алгебры $K$ в этом фактор-пространстве. Поскольку $K$ — энгелева $n$-кратная алгебра Ли и $A_x^{L/K}$ нильпотентна для каждого $x \in K$, то, используя предположение индукции ($\dim K < \dim L$), получаем, что существует $y + K \in L/K$ с условием $\overline{\mathrm{ad}}_r x(y + K) = K$ или $x\boxed{r}y \in K$, $x \in K$. Следовательно, $L = K \oplus \langle y \rangle$ и $K$ — идеал в $L$. С другой стороны, также по предположению индукции в пространстве $V$ существует ненулевой вектор $v$ с условием $f_r(x)v = 0$, $x \in K$, $r = 1, \ldots, n$. Обозначим $W = \{v \in V,\ f_r(x)v = 0,\ x \in K,\ r = 1, \ldots, n\}$. Проверим, что $W$ инвариантно относительно $f_r(y)$, $r = 1, \ldots, n$. Действительно, для любого $x \in K$ и $v \in W$

$$0 = f_r(x\boxed{s}y)v = f_r(x)f_s(y)v - f_r(y)f_s(x)v = f_r(x)f_s(y)v, \quad s, r = 1, \ldots, n.$$

Так как алгебра $A_y^V$ нильпотентна, т.е. нильпотентна и алгебра $A_y^W$, то существует вектор $v \in W$ такой, что $f_r(y)v = 0$, $r = 1, \ldots, n$. Но для элементов $x$ из $K$ условие $f_r(x)v = 0$, $r = 1, \ldots, n$, также выполнено. Поэтому $f_r(a)v = 0$, $a \in L$, $r = 1, \ldots, n$. □

*Доказательство теоремы* 1. Применяя теорему 2 к присоединенному представлению, получим, что $\mathrm{Ann}\, L = \{x \in L,\ x\boxed{r}y = 0,\ y \in L,\ r = 1, \ldots, n\} \neq 0$. Легко проверить, что $\mathrm{Ann}\, L$ является идеалом в $L$. Из нильпотентности $A_x^L$ следует нильпотентность $A_{\overline{x}}^{\overline{L}}$, где $\overline{L} = L/\mathrm{Ann}\, L$ — фактор-алгебра, $\overline{x} \in \overline{L}$. Поэтому по предположению индукции алгебра $\overline{L}$ нильпотентна, т.е. $\overline{L}^m = 0$ для некоторого натурального $m$. Значит, $L^m \subset \mathrm{Ann}\, L$, а $L^{m+1} = 0$. □

Как было отмечено выше, при $n = 1$ условие нильпотентности алгебры $A_x^L$ сводится к нильпотентности оператора $\mathrm{ad}\, x$, и поэтому теорема 1 превращается в классическую форму теоремы Энгеля для алгебр Ли. Однако, как показывает приводимый ниже пример, заменить в теореме 1 условие нильпотентности алгебры $A_x^L$ на нильпотентность операторов $\mathrm{ad}_r\, x$, $x \in L$, $r = 1, \ldots, n$, $n > 1$, нельзя.

Пусть $L$ — трехмерное векторное пространство над полем $k$ с базисом $e$, $f$, $g$. Зададим на $L$ три следующие билинейные операции:

1) $e\boxed{1}f = g$, $e\boxed{1}g = f\boxed{1}g = 0$;
2) $f\boxed{2}g = e$, $f\boxed{2}e = g\boxed{2}e = 0$;
3) $e\boxed{3}g = f$, $e\boxed{3}f = g\boxed{3}f = 0$.

Легко проверить, что с помощью этих операций пространство $L$ превращается в 3-кратную алгебру Ли. Поскольку относительно каждой операции $L$ является нильпотентной алгеброй Ли, то, в частности, каждый оператор $\mathrm{ad}_r\, x$ нильпотентен, $x \in L$, $r = 1, 2, 3$. Но, как видно из таблицы умножения, $L^2 = L$. Более того, 3-кратная алгебра Ли $L$ является простой 3-кратной алгеброй Ли, т.е. в ней отсутствуют нетривиальные идеалы. Действительно, если $J$

— ненулевой идеал в $L$ и $x \in J$, $x = \alpha e + \beta f + \gamma g \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in k$, то, вычисляя произведение $x \boxed{1} f$ при $\alpha \neq 0$, получаем, что $g \in J$. Но тогда $f \boxed{2} g = e \in J$ и $e \boxed{3} g = f \in J$, т.е. $J = L$. Если $\alpha = 0$, но $\beta \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, то рассматриваем соответственно произведения $x \boxed{2} g$ или $x \boxed{3} e$.

С другой стороны, приведем пример, показывающий существование $n$-кратных нильпотентных алгебр Ли. Пусть $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ — 4-мерное векторное пространство. Введем на нем две антикоммутативные операции умножения:

1) $e_1 \boxed{1} e_2 = e_3$, $e_i \boxed{1} e_j = 0$, $(i,j) \neq (1,2), (2,1)$;

2) $e_2 \boxed{2} e_3 = e_4$, $e_i \boxed{2} e_j = 0$, $(i,j) \neq (2,3), (3,2)$.

Легко видеть, что получается нильпотентная 2-кратная алгебра Ли, так как $L^2 = \langle e_3, e_4 \rangle$, $L^3 = \langle e_4 \rangle$, $L^4 = 0$, причем степень нильпотентности для алгебр $L_1 = L(\boxed{1})$, $L_2 = L(\boxed{2})$ с отдельными операциями меньше на единицу, т.е. $L_1^2 = \langle e_3 \rangle$, $L_1^3 = 0$, $L_2^2 = \langle e_4 \rangle$, $L_2^3 = 0$.

Рассмотрим аналогичную ситуацию для ассоциативных $n$-кратных алгебр. Векторное пространство $A$ над полем $k$ будем называть ассоциативной $n$-кратной алгеброй, если задано $n$ билинейных отображений $\boxed{r} : A \times A \to A$ таких, что

$$(a \boxed{r} b) \boxed{s} c = a \boxed{r} (b \boxed{s} c), \quad a, b, c \in A, \quad r, s = 1, \dots, n. \tag{3}$$

На пространстве $A$ можно получить структуру ассоциативной алгебры с операцией

$$a \cdot b = \sum_{r=1}^{n} a \boxed{r} b, \quad a, b \in A.$$

Естественным примером приводимых конструкций является следующий. Пусть $M_m$ — пространство квадратных матриц порядка $m$, а $S_1, \dots, S_n$ — некоторый фиксированный набор из $M_m$. Зададим на $M_m$ $n$ операций по правилу $A \boxed{r} B = A S_r B$, $r = 1, \dots, n$, $A, B \in M_m$. Легко видеть, что пространство $M_m$ относительно введенных операций превращается в ассоциативную $n$-кратную алгебру. Кроме того, если $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i = E$ ($E$ — единичная матрица), то операция, задаваемая формулой $\sum\limits_{r=1}^{n} A S_r B$, приводит к обычному умножению в $M_m$.

Если в ассоциативной $n$-кратной алгебре $A$ для каждого отображения $\boxed{r}$ рассмотреть коммутаторное отображение, определяемое формулой $a \boxed{r} b - b \boxed{r} a$, $a, b \in A$, то получим симметрическую $n$-кратную алгебру Ли.

В силу соотношения (3) любое произведение элементов $a_1, \dots, a_{m+1}$ в заданном порядке с фиксированным в заданном порядке набором операций $\boxed{r_1}, \dots, \boxed{r_m}$ дает один и тот же результат независимо от расстановки скобок в этом произведении. В частности, можно говорить о степени элемента $x \in A$, полагая $x^{\boxed{r} n} = \underbrace{x \boxed{r} \cdots \boxed{r} x}_{n}$.

Для конечномерных ассоциативных $n$-кратных алгебр имеет место аналог теоремы Веддербарна.

**Теорема 3.** *Конечномерная ассоциативная $n$-кратная алгебра $A$ нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый элемент $x \in A$ нильпотентен относительно любой операции $\boxed{r}$, $r = 1, \dots, n$, т. е. $x^{\boxed{r} m} = 0$ для некоторого натурального $m = m(r, x)$.*

Ассоциативную $n$-кратную алгебру $A$ назовем нильпотентной, если для некоторого натурального $m$ имеет место $A^m = 0$, где $A^s = \sum\limits_{t=1}^{s-1} A^t A^{s-t}$, причем под произведением двух подпространств $B$, $C$ ассоциативной $n$-кратной алгебры $A$ понимаем пространство, являющееся линейной оболочкой элементов $b\boxed{r}c$, $b \in B$, $c \in C$, $r = 1, \ldots, n$. В силу приведенного выше замечания, связанного с соотношением (3), имеем $A^{s+1} = A \cdot A^s$.

Подалгеброй ассоциативной $n$-кратной алгебры называем подпространство, замкнутое относительно всех произведений $\boxed{r}$, $r = 1, \ldots, n$.

Левым (соответственно правым) идеалом ассоциативной $n$-кратной алгебры $A$ называем подпространство $B$, удовлетворяющее условиям $a\boxed{r}b \in B$, $a \in A$, $b \in B$, $r = 1, \ldots, n$ (соответственно $b\boxed{r}a \in B$).

Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Сумма конечного числа левых нильпотентных идеалов ассоциативной $n$-кратной алгебры $A$ есть левый нильпотентный идеал.*

*Доказательство.* Единственный нетривиальный момент в утверждении леммы связан с нильпотентностью указанной суммы. Используя индукцию, достаточно показать этот факт для двух идеалов. Пусть $B$ и $C$ — левые нильпотентные идеалы в $A$, т. е. $B^m = 0$, $C^s = 0$ для некоторых натуральных $m$ и $s$. Проверим, что $(B+C)^{m+s} = 0$. Пусть $J$ — левый идеал в $A$, а $x = d_1\boxed{r_1}\cdots\boxed{r_t}d_{t+1}$ — некоторый моном, содержащий $k$ элементов из $J$. Тогда $x \in J^kA$ либо $x \in J^k$. Поэтому каждое слагаемое из бинома $(B+C)^{m+s}$ равно нулю, так как оно содержит либо $k$ $(k \geq m)$ множителей из $B$, либо $k$ $(k \geq s)$ множителей из $C$. □

*Доказательство теоремы* 3 проведем индукцией по размерности алгебры $A$. Если $\dim_k A{=}1$, т. е. $A = \langle a \rangle$, то $a^{\boxed{r}2} = \lambda_r a$, $\lambda_r \in k$. Из условия $a^{\boxed{r}s} = 0$ немедленно получим $\lambda_r = 0$, что эквивалентно $A^2 = 0$.

Пусть $\dim_k A = m > 1$. Если $A^2 \neq A$, то по предположению индукции $(A^2)^t = 0$ для некоторого натурального $t$, т. е. $A^{2t} = 0$.

Пусть $A^2 = A$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_m$ в $A$. Тогда $A^2 = \sum\limits_{r,i} A\boxed{r}e_i$. Предположим, что для некоторых $r$ и $i$ $A\boxed{r}e_i = A$. Тогда существует $x \in A$ такой, что $x\boxed{r}e_i = e_i$. Итерируя это тождество $k$ раз, имеем $x^{\boxed{r}k}\boxed{r}e_i = e_i$. Так как для некоторого $k$ $x^{\boxed{r}k} = 0$, то получаем противоречие. Следовательно, для любых $r$ и $i$ $A\boxed{r}e_i \neq A$. Поэтому по предположению индукции каждый левый идеал $A\boxed{r}e_i$ нильпотентен. Из леммы вытекает нильпотентность суммы $\sum\limits_{r,i} A\boxed{r}e_i$. Так как $A = A^2 = \sum\limits_{r,i} A\boxed{r}e_i$, то ассоциативная $n$-кратная алгебра $A$ нильпотентна, в частности, $A \neq A^2$, что противоречит исходному предположению. Итак, всегда $A^2 \neq A$, т. е. $A$ нильпотентна. □

**Следствие 1.** Пусть $A$ — конечномерная ассоциативная $n$-кратная алгебра с операциями $\boxed{1}, \ldots, \boxed{n}$, а $A_r$ — ассоциативная алгебра относительно операции $\boxed{r}$. Если каждая алгебра $A_r$, $r = 1, \ldots, n$, нильпотентна, то и $A$ нильпотентна.

**Следствие 2.** Пусть $A$ — конечномерная ассоциативная $n$-кратная алгебра с операциями $\boxed{1}, \ldots, \boxed{n}$ и $A_\Sigma$ — ассоциативная алгебра с операцией, задаваемой формулой $a \cdot b = \sum\limits_{r=1}^{n} a\boxed{r}b$, $a, b \in A$. Если каждая алгебра $A_r$, $r = 1, \ldots, n$, нильпотентна, то и $A_\Sigma$ нильпотентна.

## Литература

[1] Корешков Н.А. *$n$-кратные алгебры ассоциативного типа* // Изв. вузов. Математика. – 2008. – №12. – С. 34–42.

[2] Доценко В.В., Хорошкин А.С. *Формула характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды* // Функц. анализ и его прилож. – 2007. – Т. 41. – Вып. 1. – С. 1–22.

*Н.А. Корешков*

*доцент, кафедра алгебры и математической логики,*
*Казанский государственный университет,*
*420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,*

`e-mail:` Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

*N.A. Koreshkov*

*Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,*
*Kazan State University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

`e-mail:` Nikolai.Koreshkov@ksu.ru