Решения задач студенческой олимпиады им. Лобачевского 1 декабря 2015 г.

Задача 1 (4+3). Дан многочлен $P(x) = x^3 - ax - b$, где a и b — положительные числа. Доказать, что **1)** ровно один корень многочлена $P(x)$ является вещественным положительным числом; **2)** этот корень лежит в интервале $(\max\{\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}\}, \sqrt{a} + \sqrt[3]{b})$.

Решение. 1) График функции $y = x^3 - ax$ пересекает ось абсцисс в трех точках $0, \pm\sqrt{a}$, поэтому при $b > 0$ график функции $y = x^3 - ax - b$ пересекает положительную часть оси абсцисс только в одной точке. **2)** Пусть c — корень многочлена $P(x)$. Функция $y = x^3 - ax - b$ при $x > c$ возрастает. Подставляя $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ в многочлен $P(x)$, с очевидностью получаем, что $P(\sqrt{a}) < 0$, $P(\sqrt[3]{b}) < 0$, $P(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}) > 0$.

Задача 2 (3+4). 1) Докажите, что площадь треугольника, заключенного между осями координат и касательной к линии $xy = 1$, $x, y, \geq 0$, не зависит от выбора точки касания. **2)** Докажите, что объем тетраэдра, заключенного между координатными плоскостями и касательной плоскостью к поверхности $xyz = 1$, $x, y, z \geq 0$, не зависит от выбора точки касания.

Решение. 2) Касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0.$$

Подставляя $y = 0, z = 0$, найдем точку пересечения с осью Ox. Имеем: $y_0z_0x - y_0z_0x_0 - x_0z_0y_0 - x_0y_0z_0 = 0$. Поэтому $x = 3x_0$. Аналогично, $y = 3y_0$, $z = 3z_0$. Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{1}{6} \cdot 27x_0y_0z_0 = \frac{9}{2}$.
1) То же самое, но всюду отсутствует третье слагаемое.

Задача 3. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$$

Решение. 1) К каждой строке с номером $i \in \{1, \ldots, n\}$ прибавим строку с номером $n + i$. 2) Из каждого столбца новой матрицы с номером $n + j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ вычтем столбец с номером j:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся теоремой Лапласа.
2-е решение. Ту же самую процедуру можно осуществить следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

Задача 4. Найти функцию $f : (\frac{1}{e}, \infty) \ni x \to y(x) \in \mathbb{R}$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$\int_0^{y'(x)} \frac{e^t\,dt}{1 + 2e^t} = \frac{1}{2}\ln x \tag{1}$$

с начальным условием $y(1) = -2/3$.

Ответ:

$$\frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 1\right)$$

Решение. Имеем

$$\int_0^{y'(x)} \frac{\exp(t)\,dt}{1+2\exp(t)} = \frac{1}{2}\log(1+2\exp(t))\big|_0^{y'(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\exp(y'(x))}{3}\right).$$

Приравнивая это выражение правой части (1) и находя $y'(x)$ из получившегося равенства, заключаем

$$y'(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right), \quad y(x) = \frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right)-1\right)+C \text{ и } C=0 \text{ т.к. } y(1) = -\frac{2}{3}.$$

Задача 5. Пусть S_M обозначает центральную симметрию плоскости относительно точки M. Докажите, что точка W является центром тяжести треугольника ABC (точкой пересечения медиан) тогда и только тогда, когда композиция $S_W \circ S_C \circ S_W \circ S_B \circ S_W \circ S_A$ представляет собой тождественное преобразование.

Решение. Симметрия плоскости относительно точки M с радиус-вектором $\mathbf{m}$ отображает точку с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в точку с радиус-вектором $\mathbf{x}+2(\mathbf{m}-\mathbf{x}) = 2\mathbf{m}-\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ — радиус-векторы точек A, B, C, W соответственно. Вычислим композицию, указанную в задаче. Для произвольной точки X с радиус-вектором $\mathbf{x}$ имеем:

$$\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{a}-\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{w}-(2\mathbf{a}-\mathbf{x}) = 2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{b}-(2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x}) = 2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a})-\mathbf{x} \mapsto$$
$$2\mathbf{w}-(2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a})-\mathbf{x}) = 4\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a})+\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{c}-(4\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a})+\mathbf{x}) = -4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x} \mapsto$$
$$2\mathbf{w}-(-4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x}) = 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}.$$

Отображение $\mathbf{x} \mapsto 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}$ является тождественным тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

Задача 6. Каких граней у 7-мерного куба $[0;1]^7 \subset \mathbb{R}^7$ больше, трехмерных или четырехмерных?

Ответ: трехмерных.
Решение. Чтобы задать трехмерную грань, надо четырем координатам из семи придать значение 0 или 1. Поэтому число трехмерных граней равно $f_3 = 2^4 C_7^4$. Аналогично, число четырехмерных граней равно $f_4 = 2^3 C_7^3$. Ясно, что $f_3 = 2f_4$.

Задача 7. Пусть S — некоторый класс функций вида $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям: a) функции $f_1(x) = e^x - 1$ и $f_2(x) = \ln(x+1)$ принадлежат классу S; b) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(g(x))$ также принадлежат S; c) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \geqslant 0$, то функция $f(x)-g(x)$ также принадлежит S. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то и функция $f(x)g(x)$ тоже принадлежат классу S.

Решение. Если $f(x)$ и $g(x)$ лежат в S, то, по условию a), $\ln(f(x)+1)$ и $\ln(g(x)+1) \in S$. Но тогда, по условию b), функция $\ln(f(x)+1)+\ln(g(x)+1) = \ln(f(x)g(x)+f(x)+g(x)+1) \in S$ и, по условию a), функция $\exp(\ln(f(x)g(x)+f(x)+g(x)+1))-1 = f(x)g(x)+f(x)+g(x) \in S$. Поскольку $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то $f(x)g(x)+f(x)+g(x) \geqslant f(x)+g(x)$ и, по условию c), $f(x)g(x)+f(x)+g(x)-(f(x)+g(x)) = f(x)g(x) \in S$.

Задача 8. Рассматриваются матрицы, состоящие из пяти строк и восьми столбцов, все строки которых попарно различны. Доказать, что во всякой такой матрице можно указать четыре столбца, при вычеркивании которых строки получившейся матрицы также будут попарно различны. Показать, что пять таких столбцов можно указать не всегда.

Решение. Будем рассматривать строки матрицы как точки A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, пространства $\mathbb{R}^8$. Вычеркивание столбца с номером k можно рассматривать как проекцию точек A_i на координатную плоскость $x^k = 0$ пространства $\mathbb{R}^8$ параллельно вектору $\mathbf{e}_k$ стандартного базиса $\mathbf{e}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, 8$ пространства $\mathbb{R}^8$. Размерность плоскости α, натянутой на точки A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, не больше чем 4. Пусть L_1 - линейная оболочка векторов $\overrightarrow{A_1A_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. $\dim L_1 \leqslant 4$. Следовательно существуют базисные векторы (пусть это будет $\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8$) такие, что $L_1 \bigcap \mathfrak{L}\{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8\} = \emptyset$. Поэтому векторов A_i на плоскость $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ попарно различны.

Дополним плоскость до пространства, порожденного как базисом плоскости, так и вектором $\mathbf{e}_5$. Это пространство не более чем пятимерно. Пусть вектора базиса, не лежащие в нем - это $\mathbf{e}_\ell$, $\ell = 6, 7, 8$. Повторяя аналогичную процедуру, мы найдем, в конце концов, четыре базисных вектора. Обзовем их $\mathbf{e}_\ell$, $\ell = 5, 6, 7, 8$. Наше построение означает, что мы могли вычеркнуть 5-тый, 6-той, 7-ой и 8-ой столбцы исходной матрицы. Таким образом, мы нашли четыре столбца, при вычеркивании которых строки получившейся матрицы также будут попарно различны.

Если $A_5A_1 = \mathbf{e}_1$, $A_5A_2 = \mathbf{e}_2$, $A_5A_3 = \mathbf{e}_3$, $A_5A_4 = \mathbf{e}_4$, то найти пять столбцов, удовлетворяющих условиям задачи нельзя.

Задача 9. Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны 1/2, результаты бросков независимы один от другого.

Ответ: 0.3

Решение. Пусть вероятность выпадения 3-х орлов (OOO) после того, как уже выпали два орла (OO) равна x; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения орла и решки (OP) равна y; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения решки и орла (PO) равна z. Вероятности выпадения наборов OO, OP, PO равны 1/4. После OO с равной вероятностью (1/2) можно получить либо OOO, либо OOP. После OOP вероятность выпадения OOO равна y. По формуле полной вероятности $x = 1/2 + y/2$. Аналогично, после OP получаем две возможности OPP и OPO, поэтому $y = 0 + z/2$; после PO можем получить POO и POP, откуда $z = x/2 + y/2$. Решение системы уравнений: $x = 0.6$, $y = 0.2$, $z = 0.4$. Искомая вероятность есть $\frac{1}{4}(x + y + z) = 0.3$

Задача 10. Последовательность $\{f_n\}$, состоящую из натуральных чисел, можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) = f_n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел). Для трех таких последовательностей a_n, b_n и c_n выполняются следующие условия: отображение a — сюръективно, отображение b — инъективно, $c_n = a_n - b_n + 1$. Доказать, что $c_n = 1$ для всех n.

Решение. Покажем, что последовательности a_n и b_n совпадают. Действительно,

1. $b_n = a_n + 1 - c_n \leqslant a_n$.

2. Предположим теперь, противное совпадению a_n и b_n, то есть что $b_k < a_k = m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Из сюръективности a следует, что найдутся числа $n_1, n_2, \ldots n_{m-1}$ такие, что $a_{n_i} = i$, $i = 1, \ldots, m-1$. Тогда $b_{n_i} \leqslant a_{n_i} = i \leqslant m-1$ и, следовательно, одно из значений (принцип Дирихле) b_{n_i} совпадет с b_k. Это противоречит инъективности b_n, поскольку по определению $n_i \neq k$.