

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

M.P. Тимербаев

Аннотация

Рассматривается краевая задача на собственные значения вырождающегося дифференциального оператора. На основе мультипликативного выделения особенности собственных функций строится аппроксимация задачи конечными элементами со специальным базисом и устанавливается оценка погрешности аппроксимации в энергетической норме.

Введение

Работа посвящена построению и получению оценок точности схемы метода конечных элементов, основанной на мультипликативном выделении особенности, для обобщенной краевой задачи на собственные значения эллиптического дифференциального оператора, коэффициенты которого могут не удовлетворять условию равномерной эллиптичности.

Условие равномерной эллиптичности означает, что собственные значения матрицы коэффициентов дифференциального оператора при старших производных ограничены снизу некоторой положительной постоянной. Если это условие не выполнено, т. е. в некоторых точках области или границы хотя бы одно из собственных значений обращается в нуль, то такой дифференциальный оператор называется *вырождающимся*. Вырождающиеся или близкие к ним операторы возникают при описании обменных или диффузионных процессов в неоднородных средах, физические характеристики которых, такие, как теплопроводность, коэффициент диффузии, магнитная проницаемость, в некоторых точках среды могут быть близки к нулю или (в пределе) равны нулю. Классическим примером является оператор Трикоми $\partial^2/\partial x^2 + x\partial^2/\partial y^2$, представляющий интерес для газовой динамики. Оператор Трикоми эллиптичен в области $\{(x, y) : x > 0\}$ и вырождается на прямой $x = 0$.

Численному решению методом конечных элементов краевых задач на собственные значения равномерно эллиптических дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами (такие операторы будем называть *регулярными*) посвящена обширная литература (см., например, [1–3] и библиографию там). Однако следует отметить, что стандартный метод конечных элементов решения проблемы собственных значений, использующий кусочно-полиномиальный базис, становится неэффективным для вырождающихся операторов, что подтверждается аналитическими выкладками и численными экспериментами. Причина неудовлетворительной аппроксимации заключается в том, что в окрестности точек вырождения коэффициентов собственные функции имеют характерные неограниченные градиенты и кусочно-полиномиальный базис мало пригоден для приближения таких функций.

Развиваемый в данной работе подход к решению проблемы собственных значений вырождающегося оператора основан на идее представления собственной функции $u(x)$ дифференциального оператора в факторизованном виде $u(x) = \sigma(x)\hat{u}(x)$, где функция $\sigma(x)$ строится по коэффициентам вырождающегося дифференциального оператора и передает асимптотику решения в окрестности точек вырождения, а функция $\hat{u}(x)$ обладает существенно лучшими по сравнению с $u(x)$ свойствами для аппроксимации конечными элементами. Такое мультипликативное выделение особенности было использовано автором в [4] при дискретизации краевой задачи Дирихле для вырождающегося уравнения. Полученная в работе оценка погрешности предлагаемого метода вычисления собственных пар (собственных значений и соответствующих им собственных функций) имеет такой же порядок малости по шагу конечноэлементной сетки, что и стандартный метод конечных элементов в регулярном случае. Подчеркнем, что рассматриваемый в работе метод является новым методом аппроксимации (в частности, и в регулярном случае), он эффективен как для регулярного эллиптического оператора, так и для вырождающегося.

1. Метод Галеркина решения обобщенной задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве

Пусть V обозначает вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Пусть $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ – две симметричные, непрерывные, билинейные формы на $V \times V$, удовлетворяющие условиям

$$a(v, v) \geq c_0 \|v\|^2, \quad b(v, v) > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0, \quad (1)$$

где $c_0 > 0$ – некоторая постоянная; форму a в этом случае называют *эллиптической* на пространстве V . Обозначим через V_b гильбертово пространство со скалярным произведением $b(\cdot, \cdot)$, полученное пополнением пространства V по норме $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$. Тогда V непрерывно и плотно вложено в V_b . Заметим, что норма $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ эквивалентна норме пространства V и $V_a = V$.

Рассмотрим задачу об отыскании числа λ и ненулевого вектора $u \in V$, удовлетворяющих вариационному уравнению

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

В общепринятой терминологии число λ называется собственным значением формы a относительно формы b , а u – собственным вектором, соответствующим собственному значению λ , (λ, u) – собственная пара формы a относительно b .

Форма a формулой $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$ порождает линейный непрерывный оператор $A : V \rightarrow V'$, где V' обозначает сопряженное к V пространство, а скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между V' и V . Соответственно, форма b определяет линейный непрерывный оператор $B : V_b \rightarrow V'_b \subset V'$ такой, что $\langle Bu, v \rangle = b(u, v)$. Задача (2) тогда эквивалентна задаче

$$Au = \lambda Bu \quad (3)$$

об отыскании собственной пары (λ, u) оператора A относительно B . Далее мы предполагаем, что пространство V компактно вложено в V_b , т. е. единичный шар пространства V компактен в пространстве V_b . Тогда из спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве следует (здесь мы исключаем случай $\dim V < \infty$)

Теорема 1. *Существуют счетные множества собственных значений, заполненные с учетом кратности, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и*

соответствующих им собственных векторов $u_n \in V$, являющихся решениями задачи (2) (или (3)), образующих полную систему в V и V_b и удовлетворяющих условиям ортонормированности

$$a(u_m, u_n) = \lambda_m b(u_m, u_n) = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, \dots, \infty. \quad (4)$$

Метод Галеркина решения задачи (2) состоит в выборе конечномерных подпространств $V_N \subset V$ и последующем решении конечномерных спектральных задач об отыскании пар $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V_N$ таких, что

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V_N. \quad (5)$$

Пусть $\{(\lambda_{i,N}, u_{i,N}) : i = 1, \dots, n_N\}$ – конечная последовательность решений задачи (5), где $n_N = \dim V_N$, причем $0 < \lambda_{1,N} \leq \lambda_{2,N} \leq \dots \leq \lambda_{n_N,N}$, и $a(u_{i,N}, u_{j,N}) = \lambda_{i,N} b(u_{i,N}, u_{j,N}) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, \dots, n_N$. Для $u \in V$ обозначим через $\delta_N(u) = \min\{\|u - v\| : v \in V_N\}$ расстояние от u до подпространства V_N . Имеет место следующее утверждение об оценке погрешности метода Галеркина [1]:

Теорема 2. (i) Для каждой собственной функции $u_{i,N}$ задачи (5) существует собственная функция u_i задачи (2), соответствующая собственному значению λ_i , такая, что $\|u_i\|_a \equiv \sqrt{a(u_i, u_i)} = 1$, и справедлива оценка

$$\|u_i - u_{i,N}\| \leq c_i \delta_N(u_i),$$

где c_i не зависит от N .

(ii) Для собственных значений исходной и приближенной задач имеем оценку

$$0 \leq \lambda_{i,N} - \lambda_i \leq c_i \delta_N^2(u_i).$$

Из теоремы следует, что для сходимости метода Галеркина необходимо потребовать, чтобы последовательность аппроксимирующих подпространств (V_N) была предельно плотна в V , т. е. чтобы для любого $u \in V$ имела место сходимость $\delta_N(u) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

2. Формулировка краевой задачи на собственные значения и оценки собственных функций в нормах весовых пространств Соболева

В области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ рассматривается задача на собственные значения

$$-\partial_1 x_1^\alpha a_1(x) \partial_1 u(x) - x_1^\alpha \partial_2 a_2(x) \partial_2 u(x) = \lambda x_1^\beta b(x) u(x) \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (6)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$ – точка области Ω , ∂_i – оператор обобщенного дифференцирования по переменной x_i . Предполагается, что коэффициенты $a_i(x)$ и $b(x)$ достаточно гладкие и положительные в $\bar{\Omega}$. Параметры α, β – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha < \min(1, \beta + 2). \quad (7)$$

В частном случае $\alpha = \beta = 0$ рассматриваемая задача будет регулярной, при $\alpha > 0$ дифференциальный оператор вырождается на части границы $\Gamma = \{0\} \times [0, 1]$. Отметим, что при $\alpha \geq 1$ нетривиальных решений задачи (6) не существует, поэтому мы этот случай не рассматриваем.

Для дальнейшего анализа введем весовые классы функций. Для произвольного вещественного параметра γ через $L_{2,\gamma}(\Omega)$ обозначается пространство измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой, определяемой формулой

$$\|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|^2 = |x_1^{-\gamma} f|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |x_1^{-\gamma} f(x)|^2 dx.$$

Для натурального m через $H_\gamma^m(\Omega)$ обозначим весовое пространство Соболева, состоящее из функций $u(x)$, все обобщенные производные порядка m которых принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\Omega)$; квадрат нормы в этом пространстве можно определить, например, таким образом:

$$\|u|H_\gamma^m(\Omega)\|^2 = \sum_{|i|=m} \int_{\Omega} |x_1^{-\gamma} D^i u(x)|^2 dx + \int_{\Delta} |u(x)|^2 dx,$$

где $\Delta \subset \Omega$ – произвольный фиксированный компакт ненулевой плоской меры Лебега (различный выбор Δ будет приводить к эквивалентным нормировкам), и для мультииндекса $i = (i_1, i_2)$ с порядком $|i| = i_1 + i_2$ используется стандартное обозначение обобщенной производной $D^i = \partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2}$. На пространстве $H_\gamma^m(\Omega)$ мы будем использовать полунорму, определяемую равенством

$$|x_1^{-\gamma} \nabla^m u|_{2,\Omega}^2 = \sum_{|i|=m} \int_{\Omega} |x_1^{-\gamma} D^i u(x)|^2 dx.$$

Через $\overset{\circ}{H}_\gamma^m(\Omega)$ обозначается замыкание в пространстве $H_\gamma^m(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. При $\gamma > -1/2$ пространство $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ состоит в точности из тех функций пространства $H_\gamma^1(\Omega)$, которые имеют нулевой след на границе $\partial\Omega$. При $\gamma \leq -1/2$ у функций из $H_\gamma^1(\Omega)$ не определен след на Γ , и пространство $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ совпадает с пространством $\dot{H}_\gamma^1(\Omega)$, состоящим из тех функций из $H_\gamma^1(\Omega)$, которые имеют нулевой след на части границы $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Для функций из $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ при $\gamma + 1/2 \neq 0$ имеет место неравенство Харди [5]

$$|x_1^{-\gamma-1} u|_{2,\Omega} \leq \frac{1}{|\gamma+1/2|} |x_1^{-\gamma} \partial_1 u|_{2,\Omega}, \quad (8)$$

откуда вытекает непрерывное (но не компактное) вложение пространства $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ в $L_{2,\gamma+1}(\Omega)$ и эквивалентность на подпространстве $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ нормы $\|\cdot|H_\gamma^1(\Omega)\|$ и полунормы $|x_1^{-\gamma} \nabla \cdot|_{2,\Omega}$. Если $\mu < \gamma+1$, то вложение $\overset{\circ}{H}_\gamma^1(\Omega)$ в $L_{2,\mu}(\Omega)$ компактно [6, с. 363].

Возвращаясь к задаче (6), определим на пространстве $V = \overset{\circ}{H}_{-\alpha/2}^1(\Omega)$ билинейные формы

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 x_1^\alpha a_k \partial_k u \partial_k v dx, \quad \mathfrak{b}(u, v) = \int_{\Omega} x_1^\beta b u v dx$$

и операторы

$$Au = -\partial_1 x_1^\alpha a_1 \partial_1 u - x_1^\alpha \partial_2 a_2 \partial_2 u, \quad Bu = x_1^\beta b u.$$

Исходную задачу (6) $Au = \lambda Bu$ можно записать в вариационном виде, как задачу об отыскании собственных пар $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$, удовлетворяющих уравнению

$$\mathfrak{a}(u, v) = \lambda \mathfrak{b}(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (9)$$

Из сказанного выше и из условий на коэффициенты a_i , b следует эллиптичность формы \mathfrak{a} на V и компактность вложения V в пространство $V_b = L_{2,-\beta/2}(\Omega)$, поскольку $-\beta/2 < 1 - \alpha/2$ по условию (7). Из теоремы 1 следует

Теорема 3. Существуют счетные множества собственных значений, замурованные с учетом кратности, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и соответствующих им собственных векторов $u_n \in V$, являющихся решениями задачи (9) (или (6)), образующих полную систему в $V = \overset{\circ}{H}_{-\alpha/2}^1(\Omega)$ и $L_{2,-\beta/2}(\Omega)$ и удовлетворяющих условиям ортонормированности

$$\mathfrak{a}(u_m, u_n) = \lambda_m \mathfrak{b}(u_m, u_n) = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, \dots, \infty. \quad (10)$$

Для произвольной функции $u(x)$ положим $\hat{u}(x) = x_1^{\alpha-1}u(x)$ и определим пространство $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ как множество всех функций $u \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$ с конечным квадратом нормы

$$\|u|U_{\gamma,\alpha}(\Omega)\|^2 = |x_1^{1-\gamma}\nabla^2\hat{u}|_{2,\Omega}^2 + |x_1^{-\gamma}\partial_1\hat{u}|_{2,\Omega}^2 \quad (11)$$

и обращающихся в нуль на части границы $\partial\Omega \setminus \Gamma$. В [7, лемма 4.1] показано, что при $\gamma > \alpha - 3/2$ функции из $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ обращаются в нуль всюду на $\partial\Omega$. Имеет место следующее утверждение [7, с. 73].

Теорема 4. Для того чтобы дифференциальный оператор A осуществлял изоморфизм пространства $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ на пространство $L_{2,\gamma}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2$.

Из теоремы следует, что при условии $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2$ существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от f , что для решения краевой задачи

$$Au = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (12)$$

справедлива априорная оценка

$$|x_1^{1-\gamma}\nabla^2\hat{u}|_{2,\Omega} + |x_1^{-\gamma}\partial_1\hat{u}|_{2,\Omega} \leq c|x_1^{-\gamma}f|_{2,\Omega}. \quad (13)$$

Теорема 5. Любая собственная функция задачи (9) принадлежит пространству $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ для любого $\gamma < \min(3/2, 3/2 + \beta - \alpha)$.

Доказательство. Пусть (λ, u) – решение задачи (9). Положим $f = \lambda x_1^\beta bu = \lambda x_1^{1+\beta-\alpha}\hat{u}$. Так как u принадлежит пространству V , а $V \subset L_{2,1-\alpha/2}(\Omega)$, то $f \in L_{2,1+\beta-\alpha/2}(\Omega)$. Если $1 + \beta - \alpha/2 \geq \mu = \min(3/2, 3/2 + \beta - \alpha)$, то утверждение немедленно следует из оценки (13). Пусть $1 + \beta - \alpha/2 < \mu$. Из условий (7) следует $\alpha - 3/2 < \alpha/2 - 1 < 1 + \beta - \alpha/2$. Если γ – такой параметр, что $\alpha/2 - 1 < \gamma < -1/2$ и $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$, то из (13) следуют включения $\partial_1\hat{u} \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ и $\hat{u} \in L_{2,\gamma+1}(\Omega)$, откуда вытекает, что $f \in L_{2,\gamma+\delta}(\Omega)$, где $\delta = 2 + \beta - \alpha > 0$. Если еще $\gamma + \delta < -1/2$, то, повторяя рассуждения, получим, что $f \in L_{2,\gamma+2\delta}(\Omega)$ и т. д.

Таким образом, найдется такой параметр γ из интервала $(-1/2, \mu)$, что $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$. Теперь из включения $\partial_1\hat{u} \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ следует, что

$$\int_0^1 |\hat{u}(x_1, x_2)|^2 dx_2 \leq c \quad \text{для п.в. } x_1 \in (0, 1), \quad (14)$$

откуда получаем, что $f \in L_{2,3/2+\beta-\alpha-\varepsilon}(\Omega)$ для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и $u \in U_{\mu-\varepsilon,\alpha}(\Omega)$. Теорема доказана. \square

Замечание. Утверждение теоремы точно в том смысле, что для предельного значения $\gamma = 3/2 + \min(0, \beta - \alpha)$ оно не верно (см. пример ниже).

Следствие 1. Если $\alpha < \beta + 1$, то $\partial_1\hat{u} = 0$ на Γ .

Доказательство. Из теоремы следует, что для некоторого $\gamma > 1/2$ справедливо включение $\hat{u} \in H_{\gamma-1}^2(\Omega) \cap \dot{H}_\gamma^1(\Omega)$ и существует след $g = \partial_1 \hat{u}(0, \cdot) \in L_2(0, 1)$. Кроме того, имеет место включение $g - \partial_1 \hat{u} \in L_{2,\gamma}(\Omega)$, и, следовательно, $g = \partial_1 \hat{u} + (g - \partial_1 \hat{u}) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$, что может быть только в случае $g = 0$. Утверждение доказано. \square

Пример. Рассмотрим на интервале $(0, 1)$ одномерный аналог задачи (6) при $\alpha = \beta = 0$:

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Как известно, $((\pi n)^2, \sin \pi n x)$, $n = 1, 2, \dots$ – собственные пары этой задачи. Обозначим $u_n(x) = \sin \pi n x$. Тогда $\hat{u}_n(x) = u_n(x)/x = 1 - (\pi n x)^2/6 + O(x^4)$ и $\hat{u}'_n(x) = -(\pi n)^2 x/3 + O(x^3)$. Отсюда получаем, что $\hat{u}'_n(0) = 0$ и $\hat{u}'_n \in L_{2,3/2-\varepsilon}(0, 1)$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, но $\hat{u}'_n \notin L_{2,3/2}(0, 1)$.

Обозначим через σ оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x_1^{1-\alpha}$, так что $u = \sigma \hat{u}$, $\hat{u} = \sigma^{-1}u$.

Лемма 1. *Оператор σ является изоморфизмом*

(i) пространства $H_{\gamma-1}^2(\Omega) \cap \dot{H}_\gamma^1(\Omega)$ с естественной нормировкой пересечения гильбертовых пространств на пространство $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$,

(ii) пространства $\hat{V} = \dot{H}_{\alpha/2-1}^1(\Omega)$ на пространство $V = \overset{\circ}{H}_{-\alpha/2}^1(\Omega)$,

(iii) пространства $L_{2,\alpha-1-\beta/2}(\Omega)$ на пространство $V_b = L_{2,-\beta/2}(\Omega)$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения пространства $U_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ и нормы (11). Утверждение (ii) содержится в [4] (лемма 2). Утверждение (iii) проверяется непосредственно, поскольку u принадлежит $L_{2,-\beta/2}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\sigma^{-1}u \in L_{2,\alpha-1-\beta/2}(\Omega)$. Лемма доказана. \square

Введем билинейные формы

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = a(\sigma \hat{u}, \sigma \hat{v}) \quad \text{и} \quad \hat{b}(\hat{u}, \hat{v}) = b(\sigma \hat{u}, \sigma \hat{v})$$

и рассмотрим задачу на нахождение собственных пар $(\lambda, \hat{u}) \in \mathbb{R} \times \hat{V}$, удовлетворяющих уравнению

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = \lambda \hat{b}(\hat{u}, \hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}. \quad (15)$$

Ясно, что собственные значения задач (9) и (15) совпадают, а соответствующие собственные вектора u и \hat{u} связаны между собой соотношением $u = \sigma \hat{u}$. Из теоремы 5 и утверждения (i) леммы 1 получаем класс гладкости для собственных функций задачи (15):

Теорема 6. *Любая собственная функция задачи (15) принадлежит пространству $H_{\gamma-1}^2(\Omega) \cap \dot{H}_\gamma^1(\Omega)$ для любого $\gamma < 3/2 + \min(0, \beta - \alpha)$.*

Замечание. (см. замечание к теореме 5). Теорема перестает быть верной при $\gamma = 3/2 + \min(0, \beta - \alpha)$.

Смысл перехода от исходной задачи к задаче (15) в том, что в окрестности особых точек Γ собственная функция \hat{u} ведет себя существенно более гладко, чем соответствующая собственная функция u исходной задачи, и поэтому для аппроксимации \hat{u} можно применять стандартные проекционно-сеточные методы, тогда как эти же методы для u не дадут хороших результатов. Действительно, пусть для определенности $0 < \alpha \leq \beta$; тогда по теореме 5 для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ имеем следующую интегральную характеристику производных $\partial_1 \hat{u}$ и $\partial_1^2 \hat{u}$:

$$|x_1^{\varepsilon-1/2} \partial_1^2 \hat{u}|_{2,\Omega} + |x_1^{\varepsilon-3/2} \partial_1 \hat{u}|_{2,\Omega} < \infty.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\partial_1 u = (1 - \alpha)x_1^{-\alpha}\hat{u} + x_1^{1-\alpha}\partial_1\hat{u}, \quad \partial_1^2 u = \alpha(\alpha - 1)x_1^{-\alpha-1}\hat{u} + 2(1 - \alpha)x_1^{-\alpha}\partial_1\hat{u} + x_1^{1-\alpha}\partial_1^2\hat{u},$$

получим, используя (14),

$$|x_1^{\alpha+\varepsilon+1/2}\partial_1^2 u|_{2,\Omega} + |x_1^{\alpha+\varepsilon-1/2}\partial_1 u|_{2,\Omega} < \infty.$$

(Заметим, что эти оценки точны в том смысле, что при $\varepsilon = 0$ полуночные в обеих оценках обратятся в бесконечность.) Таким образом, оценки производных собственной функции u на степенной вес $x_1^{1+\alpha}$ слабее, чем для \hat{u} .

3. Аппроксимация задачи (9)

Для натурального $n > 1$ положим $N = n^2$, $h = 1/n$ и обозначим через T_N естественную триангуляцию квадрата Ω на треугольные конечные элементы, вершинами которых являются либо тройки точек (ih, jh) , $((i+1)h, jh)$, $(ih, (j+1)h)$, либо $((i+1)h, jh)$, $((i+1)h, (j+1)h)$, $(ih, (j+1)h)$, где $i, j = 0, 1, \dots, n-1$. Через X_N обозначим пространство линейных конечных элементов, ассоциированное с триангуляцией T_N , т. е. это множество непрерывных на Ω функций, линейных на каждом $K \in T_N$.

Введем пространство $V_N \subset V$, состоящее из функций вида $x_1^{1-\alpha}(x)\psi(x)$, где $\psi \in \dot{X}_N = \{w \in X_N : w = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma\}$ и будем использовать его для аппроксимации задачи (9). Приближенными решениями будем называть пары $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V_N$, $u \neq 0$, удовлетворяющие уравнению

$$\mathbf{a}(u, v) = \lambda \mathbf{b}(u, v) \quad \forall v \in V_N. \quad (16)$$

Соответственно, аппроксимация задачи (15) состоит в отыскании пар $(\lambda, \hat{u}) \in \mathbb{R} \times \dot{X}_N$, $\hat{u} \neq 0$, удовлетворяющих уравнению

$$\hat{\mathbf{a}}(\hat{u}, w) = \lambda \hat{\mathbf{b}}(\hat{u}, w) \quad \forall w \in \dot{X}_N. \quad (17)$$

Обозначим ошибку аппроксимации функции u функциями подпространства V_N в энергетической норме формы \mathbf{a} через $\delta_{\mathbf{a}, N}(u) = \min\{\|u - v\|_{\mathbf{a}} : v \in V_N\}$. Поскольку $\|u\|_{\mathbf{a}} = \|\hat{u}\|_{\hat{\mathbf{a}}}$ и $\sigma : \dot{X}_N \xrightarrow{\text{на}} V_N$, то $\delta_{\mathbf{a}, N}(u) = \delta_{\hat{\mathbf{a}}, N}(\hat{u}) = \min\{\|\hat{u} - v\|_{\hat{\mathbf{a}}} : v \in \dot{X}_N\}$.

Теорема 7. Пусть $\alpha < \frac{2}{3}\beta + 1$. Тогда для любой собственной функции u задачи (9) имеет место оценка погрешности аппроксимации $\delta_{\mathbf{a}, N}(u) \leq cN^{-1/2} = ch$, где постоянная c зависит от u , но не зависит от N .

Доказательство. Пусть u – собственная функция формы \mathbf{a} относительно \mathbf{b} . Если выполнено условие теоремы, то $\alpha/2 < 3/2 + \min(0, \beta - \alpha)$, следовательно, по теореме 6 $\hat{u} \in H_{\alpha/2-1}^2(\Omega) \cap \dot{H}_{\alpha/2}^1(\Omega)$. Так как норма $\|\cdot\|_{\hat{\mathbf{a}}}$ эквивалентна норме пространства $\dot{H}_{\alpha/2-1}^1(\Omega)$, то из оценок погрешности аппроксимации конечными элементами в весовых пространствах Соболева [8], [9] получим

$$\delta_{\mathbf{a}, N}(u) = \delta_{\hat{\mathbf{a}}, N}(\hat{u}) \leq ch|x_1^{1-\alpha/2}\nabla^2\hat{u}|_{2,\Omega} = cN^{-1/2}|x_1^{1-\alpha/2}\nabla^2\hat{u}|_{2,\Omega}.$$

Утверждение доказано. \square

Из доказанной теоремы и из теоремы 2 получим основной результат работы:

Теорема 8. *Если $\alpha < \frac{2}{3}\beta + 1$, то*

(i) для каждой собственной функции $u_{i,N}$ задачи (16) существует собственная функция u_i задачи (9), соответствующая собственному значению λ_i , что $\|u_i\|_{\alpha} = 1$, и справедлива оценка в энергетической норме формы α

$$\|u_i - u_{i,N}\|_{\alpha} \leq c_i N^{-1/2} = c_i h,$$

где c_i не зависит от N ;

(ii) для соответствующих собственных значений задач (9) и (16) имеет место оценка

$$0 \leq \lambda_{i,N} - \lambda_i \leq c_i N^{-1} = c_i h^2.$$

Замечание. В регулярном случае $\alpha = \beta = 0$ рассматриваемый метод имеет такую же точность, что и стандартный метод конечных элементов. Если же $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие теоремы, то стандартный метод приводит лишь к сходимости $O(N^{\varepsilon+(\alpha-1)/4})$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, которая становится символической при α , близких к критическому значению $\alpha = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 03-01-00380, 04-01-0821).

Summary

M.R. Timerbaev. An approximation by finite elements of the eigenvalue problem for degenerate differential operator.

Eigenvalue problem for degenerate differential operator is considered. A discretization scheme based on multiplicative decomposition of singularity with special basis is constructed and its error approximation in energy norm is obtained.

Литература

1. Chatelin F. Spectral Approximations of Linear Operators – N. Y.: Academic Press, 1983.
2. Babuska I., Osborn J.E. Finite element-Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems // Math. Comp. – 1989. – V. 52. – P. 275–297.
3. Babuska I., Osborn J.E. Eigenvalue problems, Handbook of Numerical Analysis. V. II. Finite Element Methods. Part 1. – Elsevier, 1991. – P. 641–792.
4. Тимербаев М.Р. Мультиплективное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифф. уравнения. – 2000. – Т. 52, № 7 – С. 1086–1093.
5. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
6. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
7. Тимербаев М.Р. Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 60–73.
8. Тимербаев М.Р. Оценки погрешности п-мерной сплайн-интерполяции в весовых нормах // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 54–60.

9. Тимербаев М.Р. Конечноэлементная аппроксимация в весовых пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 11. – С. 76–84.

Поступила в редакцию
19.10.05

Тимербаев Марат Равилевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Marat.Timerbaev@ksu.ru*