УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 155, кн. 3 Физико-математические науки *2013*

УДК 519.63

ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

В.С. Желтухин, С.И. Соловьёв, П.С. Соловьёв, В.Ю. Чебакова

Аннотация

Устанавливаются условия существования минимального собственного значения, отвечающего положительной собственной функции, нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения. Задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов. Исследуется сходимость приближенных решений к точным. Теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами для модельной задачи.

Ключевые слова: собственное значение, положительная собственная функция, нелинейная задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Штурма – Лиувилля, метод конечных элементов.

1. Постановка задачи

В настоящей работе изучается вопрос нахождения минимального собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, отвечающего положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi)$, $\overline{\Omega} = [0, \pi]$, задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\lambda s(x))u')' = r(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра. Предполагается, что $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, являются непрерывными положительными функциями. Кроме того, функция $p(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ предполагается неубывающей ограниченной, а функция $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, – неубывающей неограниченной. Отметим, что дифференциальное уравнение задачи (1) понимается в обобщенном смысле [1].

Для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначим через $\gamma(\mu)$ минимальное простое собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in \Omega$, параметрической линейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\mu s(x))u')' = \gamma(\mu) r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи (1) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{3}$$

Исходя из условия $p(0) > r(0)$, в разд. 2 доказывается существование наименьшего простого собственного значения задачи (1) как корня уравнения (3).

В разд. 3 формулируется сеточная схема метода конечных элементов для решения задачи (1). Доказано существование наименьшего простого приближенного собственного значения, отвечающего положительной собственной функции при условии $p(0) > r(0)$, и установлена сходимость приближенных решений к точным.

В разд. 4 приведены результаты численных экспериментов для модельной задачи.

Задача вида (1) возникает при моделировании плазмы высокочастотного разряда пониженного давления. Высокочастотный индукционный (ВЧИ) разряд нашел широкое применение в разнообразных технологических плазменных процессах, таких, как обработка текстиля и кожевенно-меховых полуфабрикатов [2, 3], металлов [4, 5], аккумулирование водорода порошками кремния [6], синтез бескислородных керамических материалов [7], получение карбидных и боридных материалов для ядерной и обрабатывающей промышленности [7].

Режимы обработки материалов в этих процессах чрезвычайно чувствительны к основным характеристикам ВЧИ-разряда. Одним из важнейших параметров, определяющим свойства плазмы, является давление плазмообразующего газа. В технологических процессах наиболее широко применяются ВЧИ-разряды атмосферного (порядка 10^5 Па), низкого (порядка 10^{-3} Па) и пониженного (от 13.3 до 133 Па) давления [3–5].

Плазма высокочастотных разрядов пониженного давления, обладая всеми преимуществами высокочастотных разрядов, имеет ряд специфических свойств, присущих разрядам при низких давлениях: существенный отрыв электронной температуры от ионной, повышенная стерильность окружающей среды, возможность получения сверхзвуковых высокотемпературных потоков. В связи с этим разработано большое количество методик экспериментальных измерений индукционной плазмы [2, 8, 9].

Однако для более эффективного и качественного выбора конструктивных решений при создании ВЧИ-установок необходимо также создание математических моделей, так как не все технологические характеристики плазмы возможно измерить.

При усреднении уравнения баланса заряженных частиц по периоду колебания электрического поля [10] возникает необходимость определения минимального собственного значения нелинейной спектральной задачи [11–13]. Собственные значения дифференциальной задачи целиком и полностью определяются коэффициентами уравнения, граничными условиями и единственным свободным параметром, в качестве которого выступает значение электронной температуры в центре разряда, удовлетворяющее определенному соотношению между коэффициентом амбиполярной диффузии, частотой ионизации и радиусом плазмотрона. Это соотношение определяет условие, необходимое для поддержания стационарного ВЧИ-разряда пониженного давления.

Ранее (см., например, [14–16]) исследовалась задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\lambda,x)u')' + q(\lambda,x)u = \lambda r(\lambda,x)u, \quad x \in (0,l), \\ &u(0) = u(l) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра. Здесь предполагается, что $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $r(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in [0,l]$, являются непрерывными положительными функциями. Отметим, что дифференциальное уравнение задачи (4) также понимается в обобщенном смысле.

Для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначим через $\gamma(\mu)$ минимальное простое собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in (0,l)$, параметрической линейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\mu,x)u')' + q(\mu,x)u = \gamma(\mu)r(\mu,x)u, \quad x \in (0,l), \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи (4) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma(\mu) = \mu, \quad \mu \in \Lambda. \tag{6}$$

В работах [14, 15] изучался метод конечных разностей для задачи (4) при $r(\mu,x) = r(x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in [0,l]$. Предполагалось, что функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in [0,l]$, являются невозрастающими по первому аргументу $\mu \in \Lambda$. Из этого условия вытекает свойство невозрастания функции $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, определяющей наименьшее собственное значение задачи (5), и существование единственного корня уравнения (6). В монографии [16] исследовался метод конечных элементов для задачи (4) в предположении невозрастания отношения Рэлея по спектральному параметру. В этом случае функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ является также невозрастающей и уравнение (6) имеет единственный корень. В [14–16] проведены исследования также и для других собственных значений. В отличие от указанных работ, в настоящей статье функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, определяющая наименьшее собственное значение задачи (2), может быть немонотонной, и, кроме того, здесь не предполагается выполнение условия дифференцируемости коэффициентов дифференциального уравнения (2) по спектральному параметру.

Нелинейные задачи на собственные значения возникают в различных областях науки и техники [16–23]. Приближенные методы решения задач на собственные значения с монотонным и немонотонным вхождением спектрального параметра исследовались в работах [24–34]. Теоретическим фундаментом для исследования нелинейных спектральных задач являются результаты, полученные для линейных задач на собственные значения [35–44].

2. Существование решений

Обозначим через $H = L_2(\Omega)$ вещественное гильбертово пространство Лебега с нормой $|\cdot|_0$ и со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ при

$$|v|_0 = \left(\int_0^\pi (v(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \quad (u,v)_0 = \int_0^\pi u(x)v(x)\,dx \quad \forall\, u,v \in H.$$

Обозначим через $V = \{v : v, v' \in H, u(0) = u(\pi) = 0\}$ вещественное гильбертово пространство Соболева с нормой $|\cdot|_1$ и со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_1$ при

$$|v|_1 = \left(\int_0^\pi (v'(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \quad (u,v)_1 = \int_0^\pi u'(x)v'(x)\,dx \quad \forall\, u,v \in V.$$

Заметим, что функции из пространства V являются непрерывными на $\overline{\Omega}$. При фиксированном $\mu \in \Lambda$ определим билинейные формы

$$a(\mu,u,v) = \int_0^\pi p(\mu s(x))u'v'\,dx, \quad b(\mu,u,v) = \int_0^\pi r(\mu s(x))uv\,dx,$$

для $u, v \in V$. Введем отношение Рэлея

$$R(\mu, v) = \frac{a(\mu, v, v)}{b(\mu, v, v)} \quad \forall\, v \in V \setminus \{0\}.$$

Положим $K = \{v : v \in V, u(x) > 0, x \in \Omega\}$.

Дифференциальная задача (1) эквивалентна вариационной нелинейной задаче на собственные значения: найти минимальное число $\lambda \in \Lambda$ и функцию $u \in K$, $b(\lambda, u, u) = 1$, такие, что

$$a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \forall\, v \in V. \tag{7}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем вариационную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти минимальное число $\gamma(\mu)$ и функцию $u = u_\mu \in K$, $b(\mu, u, u) = 1$, такие, что

$$a(\mu, u, v) = \gamma(\mu) b(\mu, u, v) \quad \forall\, v \in V. \tag{8}$$

Для наименьшего простого собственного значения задачи (8) справедливо вариационное свойство (см., например, [45, с. 98])

$$\gamma(\mu) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\mu, v).$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения: найти минимальное число $\varkappa$ и функцию $u \in K$, $(u, u)_0 = 1$, такие, что

$$(u, v)_1 = \varkappa (u, v)_0 \quad \forall\, v \in V. \tag{9}$$

Хорошо известно (см., например, [45, с. 105]), что

$$\varkappa = 1, \quad u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad x \in \overline{\Omega},$$

и выполняется вариационное соотношение

$$\varkappa = \min_{v \in V \setminus \{0\}} S(v)$$

с отношением Рэлея, определяемым по формуле

$$S(v) = \frac{(v, v)_1}{(v, v)_0} \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Символом $\rightharpoonup$ обозначим слабую сходимость в гильбертовом пространстве V.

Теорема 1. *Имеет место сходимость $\gamma(\eta) \to \gamma(\mu)$ при $\eta \to \mu$, $u_\eta \to u_\mu$ в V при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$.*

Доказательство. Обозначим

$$\delta_q(\mu, \eta) = \max_{x \in \overline{\Omega}} |q(\mu s(x)) - q(\eta s(x))|,$$

где $q \in \{p, r\}$, $\mu, \eta \in \Lambda$. Имеем $\delta_p(\mu, \eta) \to 0$, $\delta_r(\mu, \eta) \to 0$ при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$. Поэтому

$$|a(\mu, u, v) - a(\eta, u, v)| = \left| \int_0^\pi (p(\mu s(x)) - p(\eta s(x))) u' v' \, dx \right| \leqslant \delta_p(\mu, \eta) |u|_1 |v|_1 \to 0$$

при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$, $u, v \in V$,

$$|b(\mu, u, v) - b(\eta, u, v)| = \left| \int\limits_0^{\pi} (r(\mu s(x)) - r(\eta s(x)))uv\, dx \right| \leqslant \delta_r(\mu, \eta)|u|_0|v|_0 \to 0$$

при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$, $u, v \in H$.

Положим

$$r_0 = r(0), \quad p_1 = \sup_{\mu \in \Lambda} p(\mu).$$

Тогда для $v \in V \setminus \{0\}$ имеют место соотношения

$$|R(\mu, v) - R(\eta, v)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(\mu, v, v) - a(\eta, v, v)|}{b(\mu, v, v)} + \frac{|b(\eta, v, v) - b(\mu, v, v)|}{b(\mu, v, v)} \frac{a(\eta, v, v)}{b(\eta, v, v)} \leqslant$$

$$\leqslant \delta_p(\mu, \eta) \frac{|v|_1^2}{r_0|v|_0^2} + \delta_r(\mu, \eta) \frac{p_1|v|_1^2}{r_0^2|v|_0^2} \to 0$$

при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Теперь с помощью вариационной характеризации минимального собственного значения задачи (8) получим

$$0 < \gamma(\eta) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\eta, v) \leqslant R(\eta, u_\mu) \to R(\mu, u_\mu) = \gamma(\mu)$$

при $\eta \to \mu$. Следовательно, из любой последовательности $\eta' \to \mu$ можно выбрать подпоследовательность $\eta'' \to \mu$ такую, что $\gamma(\eta) \to \xi$ при $\eta = \eta'' \to \mu$, где $\xi \in [0, \gamma(\mu)]$. Учитывая нормировку $b(\eta, u_\eta, u_\eta) = 1$, выводим

$$p_0|u_\eta|_1^2 \leqslant a(\eta, u_\eta, u_\eta) = \gamma(\eta) \to \xi$$

при $\eta = \eta'' \to \mu$, $p_0 = p(0)$. Отсюда получим $|u_\eta|_1 \leqslant c$ при $\eta = \eta'' \to \mu$, где c – постоянная, не зависящая от η. Поэтому из последовательности $\eta'' \to \mu$ можно извлечь подпоследовательность $\eta''' \to \mu$ такую, что $u_\eta \rightharpoonup w$ в V при $\eta = \eta''' \to \mu$, где $w \in V$.

Для любого элемента $v \in V$ справедливы предельные соотношения $a(\eta, u_\eta, v) \to$ $\to a(\mu, w, v)$, $b(\eta, u_\eta, v) \to b(\mu, w, v)$ при $\eta = \eta''' \to \mu$. Действительно, из $u_\eta \rightharpoonup w$ в V при $\eta = \eta''' \to \mu$ вытекает $u'_\eta \rightharpoonup w'$, $u_\eta \to w$ в H при $\eta = \eta''' \to \mu$, кроме того, существует постоянная c такая, что $|u_\eta|_0 \leqslant c$, $|u_\eta|_1 \leqslant c$ при $\eta = \eta''' \to \mu$. Поэтому $a(\mu, u_\eta, v) \to a(\mu, w, v)$, $b(\mu, u_\eta, v) \to b(\mu, w, v)$ при $\eta = \eta''' \to \mu$, а также

$$|a(\eta, u_\eta, v) - a(\mu, u_\eta, v)| \leqslant c\delta_p(\mu, \eta)|v|_1 \to 0,$$

$$|b(\eta, u_\eta, v) - b(\mu, u_\eta, v)| \leqslant c\delta_r(\mu, \eta)|v|_0 \to 0,$$

при $\eta = \eta''' \to \mu$. Следовательно, заключаем

$$a(\eta, u_\eta, v) = a(\mu, u_\eta, v) + (a(\eta, u_\eta, v) - a(\mu, u_\eta, v)) \to a(\mu, w, v),$$

$$b(\eta, u_\eta, v) = b(\mu, u_\eta, v) + (b(\eta, u_\eta, v) - b(\mu, u_\eta, v)) \to b(\mu, w, v),$$

при $\eta = \eta''' \to \mu$.

Переходя в уравнении $a(\eta, u_\eta, v) = \gamma(\eta) b(\eta, u_\eta, v)$ к пределу при $\eta = \eta''' \to$ $\to \mu$, выводим равенство $a(\mu, w, v) = \xi b(\mu, w, v)$ для любого элемента $v \in V$. Имеем $1 = b(\eta, u_\eta, u_\eta) \to b(\mu, w, w)$ при $\eta = \eta''' \to \mu$, поэтому $b(\mu, w, w) = 1$. Предположим, что $w = -u_\mu$. Тогда получим $b(\eta, u_\eta, u_\mu) \to -b(\mu, u_\mu, u_\mu) = -1$, что противоречит соотношению $b(\eta, u_\eta, u_\mu) > 0$. Это означает, что $\xi = \gamma(\mu)$ и $w = u_\mu$ есть минимальное собственное значение и отвечающая ему положительная собственная функция задачи (8).

Докажем сильную сходимость $u_\eta \to u_\mu$ в V при $\eta = \eta''' \to \mu$. Действительно, имеем

$$p_0|u_\eta - u_\mu|_1^2 \leqslant a(\eta, u_\eta - u_\mu, u_\eta - u_\mu) = a(\eta, u_\eta, u_\eta) - 2a(\eta, u_\eta, u_\mu) + a(\eta, u_\mu, u_\mu) \to 0$$

при $\eta = \eta''' \to \mu$. Здесь учтено, что при $\eta = \eta''' \to \mu$ справедливы соотношения

$$a(\eta, u_\eta, u_\eta) = \gamma(\eta) \to \gamma(\mu), \quad a(\eta, u_\eta, u_\mu) \to a(\mu, u_\mu, u_\mu) = \gamma(\mu),$$
$$a(\eta, u_\mu, u_\mu) \to a(\mu, u_\mu, u_\mu) = \gamma(\mu).$$

Таким образом, установлено, что из каждой последовательности $\eta' \to \mu$ можно выбрать подпоследовательность $\eta'' \to \mu$ со свойством $\gamma(\eta) \to \gamma(\mu)$, $u_\eta \to u_\mu$ в V при $\eta = \eta'' \to \mu$.

Предположим, что существует последовательность $\eta' \to \mu$ такая, что $\gamma(\eta) \to \xi$ при $\eta = \eta' \to \mu$, где $\xi \neq \gamma(\mu)$. Повторяя проведенные рассуждения, из последовательности $\eta' \to \mu$ выберем подпоследовательность $\eta'' \to \mu$ такую, что $\gamma(\eta) \to \gamma(\mu)$ при $\eta = \eta'' \to \mu$. В результате получим сходимость $\gamma(\eta) \to \gamma(\mu)$ при $\eta \to \mu$.

Предположим, что для последовательности $\eta' \to \mu$ выполняется неравенство $|u_\eta - u_\mu|_1 \geqslant c$ при $\eta = \eta' \to \mu$. Тогда, повторяя проведенные выше рассуждения, устанавливаем существование подпоследовательности $\eta'' \to \mu$ такой, что $|u_\eta - u_\mu|_1 \to 0$ при $\eta = \eta'' \to \mu$. Но это противоречит предыдущему неравенству. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $p(0) > r(0)$. *Тогда существует наименьшее простое собственное значение задачи* (7), *отвечающее положительной собственной функции.*

Доказательство. Согласно теореме 1 $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, является непрерывной функцией. Применяя вариационные характеризации наименьших собственных значений задач (8) и (9), получаем

$$\gamma(0) = \min_{v \in V\setminus\{0\}} R(0, v) = \min_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_0^\pi p(0)(v')^2\,dx}{\int\limits_0^\pi r(0)v^2\,dx} = \frac{p(0)}{r(0)}\varkappa = \frac{p(0)}{r(0)} > 1.$$

Обозначим

$$s_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} s(x), \quad p_1 = \sup_{\mu \in \Lambda} p(\mu).$$

Тогда, используя вариационную характеризацию наименьшего собственного значения параметрической задачи (8), получим

$$\gamma(\mu) = \min_{v \in V\setminus\{0\}} R(\mu, v) = \min_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_0^\pi p(\mu s(x))(v')^2\,dx}{\int\limits_0^\pi r(\mu s(x))v^2\,dx} \leqslant \frac{p_1}{r(\mu s_1)}\varkappa = \frac{p_1}{r(\mu s_1)} \to 0$$

при $\mu \to \infty$, поскольку $r(\mu) \to \infty$ при $\mu \to \infty$.

Таким образом, непрерывная функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, удовлетворяет свойствам: $\gamma(0) > 1$ и $\gamma(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Отсюда следует существование наименьшего корня уравнения (3), который определяет минимальное собственное значение λ задачи (7). Собственное значение λ является простым и отвечает положительной собственной функции, так как $\gamma(\mu)$ при $\mu \in \Lambda$ есть простое собственное значение параметрической задачи (8), соответствующее положительной собственной функции. Теорема доказана. $\square$

3. Сеточная схема метода конечных элементов

Приближенная схема метода конечных элементов для сформулированной задачи определяется заданием конечномерного подпространства V_h. Разобьем отрезок $[0,\pi]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,N$, на элементы $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$, $h = \pi/N$. Обозначим через V_h подпространство пространства V, состоящее из непрерывных функций v^h, линейных на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$. Положим $K_h = \{v^h : v^h \in V_h, u^h(x) > 0, x \in \Omega\}$.

Сеточная схема метода конечных элементов для вариационной задачи (7) состоит в нахождении минимального числа $\lambda^h \in \Lambda$ и функции $u^h \in K_h$, $b(\lambda^h, u^h, u^h) = 1$, таких, что

$$a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{10}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем вариационную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти минимальное число $\gamma^h(\mu)$ и функцию $u^h = u^h_\mu \in K_h$, $b(\mu, u^h, u^h) = 1$, такие, что

$$a(\mu, u^h, v^h) = \gamma^h(\mu) b(\mu, u^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{11}$$

Для наименьшего собственного значения задачи (11) справедливо вариационное свойство

$$\gamma^h(\mu) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h).$$

Конечномерная задача (10) эквивалентна матричной задаче: найти минимальное число $\lambda^h \in \Lambda$ и положительный вектор $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, $(B(\lambda^h)y, y) = 1$, такие, что

$$A(\lambda^h)y = B(\lambda^h)y. \tag{12}$$

Здесь

$$(y,z) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i z_i,$$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})^T$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N-1})^T$, $y_i = u^h(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N-1$; трехдиагональные матрицы $A(\mu)$ и $B(\mu)$ имеют вид

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) & & \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) & a_{23}(\mu) & \\ & & \cdots & \\ & & a_{N-1,N-2}(\mu) & a_{N-1,N-1}(\mu) \end{pmatrix},$$

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} b_{11}(\mu) & b_{12}(\mu) & & \\ b_{21}(\mu) & b_{22}(\mu) & b_{23}(\mu) & \\ & & \cdots & \\ & & b_{N-1,N-2}(\mu) & b_{N-1,N-1}(\mu) \end{pmatrix},$$

$$a_{ii}(\mu) = \frac{1}{h^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(\mu s(x))\, dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$a_{i,i-1}(\mu) = a_{i-1,i}(\mu) = -\frac{1}{h^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(\mu s(x))\, dx, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$b_{ii}(\mu) = \frac{1}{h^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} r(\mu s(x))(x - x_{i-1})^2\, dx + \frac{1}{h^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} r(\mu s(x))(x_{i+1} - x)^2\, dx,\ i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$b_{i,i-1}(\mu) = b_{i-1,i}(\mu) = \frac{1}{h^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} r(\mu s(x))(x_i - x)(x - x_{i-1})\, dx, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

при $\mu \in \Lambda$.

Аналогично представим конечномерную задачу (11) при фиксированном $\mu \in \Lambda$ в матричном виде: найти минимальное число $\gamma^h(\mu)$ и положительный вектор $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, $(B(\mu)y, y) = 1$, такие, что

$$A(\mu)y = \gamma^h(\mu)B(\mu)y. \tag{13}$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения: найти минимальное число $\varkappa^h$ и функцию $u^h \in K_h$, $(u^h, u^h)_0 = 1$, такие, что

$$(u^h, v^h)_1 = \varkappa^h (u^h, v^h)_0 \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{14}$$

Для этой задачи выполняется вариационное соотношение

$$\varkappa^h = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} S(v^h).$$

Как и предыдущие задачи, конечномерную задачу (14) запишем в матричном виде: найти минимальное число $\varkappa^h$ и положительный вектор $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, $(By, y) = 1$, такие, что

$$Ay = \varkappa^h By. \tag{15}$$

Трехдиагональные матрицы A и B этой задачи имеют вид

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & & \dots & \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решения задачи (15) определяются (см., например, [46, с. 63]) формулами

$$\varkappa^h = \frac{6}{h^2} \cdot \frac{1 - \cos h}{2 + \cos h}, \quad y_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Нетрудно убедиться, что $1 \leqslant \varkappa^h \to 1$ при $h \to 0$.

Минимальное собственное значение λ^h задачи (10) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma^h(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{16}$$

Теорема 3. *Имеет место сходимость $\gamma^h(\eta) \to \gamma^h(\mu)$ при $\eta \to \mu$, $u^h_\eta \to u^h_\mu$ в V_h при $\eta \to \mu$, $\mu, \eta \in \Lambda$.*

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается аналогично теореме 1. □

Теорема 4. *Пусть* $p(0) > r(0)$. *Тогда существует наименьшее простое собственное значение задачи* (10), *отвечающее положительной собственной функции.*

Доказательство. Согласно теореме 3 $\gamma^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, является непрерывной функцией. Применяя вариационные характеризации наименьших собственных значений задач (11) и (14), выводим

$$\gamma^h(0) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(0, v^h) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_0^\pi p(0)((v^h)')^2\,dx}{\int\limits_0^\pi r(0)(v^h)^2\,dx} = \frac{p(0)}{r(0)}\,\varkappa^h > 1.$$

Теперь, используя вариационную характеризацию наименьшего собственного значения параметрической задачи (11), как при доказательстве теоремы 2, получим

$$\gamma^h(\mu) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_0^\pi p(\mu s(x))((v^h)')^2\,dx}{\int\limits_0^\pi r(\mu s(x))(v^h)^2\,dx} \leqslant \frac{p_1}{r(\mu s_1)}\,\varkappa^h \to 0$$

при $\mu \to \infty$.

Таким образом, непрерывная функция $\gamma^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ удовлетворяет свойствам: $\gamma^h(0) > 1$ и $\gamma^h(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Отсюда следует существование наименьшего корня уравнения (16), который определяет минимальное собственное значение λ^h задачи (10). Собственное значение λ^h является простым и отвечает положительной собственной функции, так как $\gamma^h(\mu)$ при $\mu \in \Lambda$ есть простое собственное значение параметрической задачи (11), соответствующее положительной собственной функции. Теорема доказана. □

Через c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от h. Для фиксированного $\mu \in \Lambda$ введем оператор $P_h(\mu) : V \to V_h$ по правилу $a(\mu, u - P_h(\mu)u, v^h) = 0$ для любого $v^h \in V_h$, где $u \in V$, $P_h(\mu)u \to u$ в V при $h \to 0$. Положим $P_h = P_h(\lambda)$.

Теорема 5. *Имеет место сходимость* $\lambda^h \to \lambda$, $u^h \to u$ *в* V *при* $h \to 0$.

Доказательство. Из соотношений

$$\gamma(\mu) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\mu, v) \leqslant \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) = \gamma^h(\mu) \leqslant$$
$$\leqslant R(\mu, P_h u_\mu) \to R(\mu, u_\mu) = \gamma(\mu)$$

при $h \to 0$ вытекает, что $\gamma^h(\mu) \to \gamma(\mu)$ при $h \to 0$. Следовательно, $\lambda^h \to \lambda$ при $h \to 0$.

Учитывая нормировку $b(\lambda^h, u^h, u^h) = 1$, получим $p_0|u^h|_1^2 \leqslant a(\lambda^h, u^h, u^h) = \gamma^h(\lambda^h) = 1$, то есть $|u^h|_1 \leqslant c$, где $c = 1/p_0^{1/2}$. Поэтому из любой последовательности $h' \to 0$ можно выбрать подпоследовательность $h'' \to 0$ такую, что $u^h \rightharpoonup w$ в V при $h = h'' \to 0$, где $w \in V$.

Для любого элемента $v \in V$ выберем $v^h = P_h v$. Тогда выполняются предельные соотношения $a(\lambda^h, u^h, v^h) \to a(\lambda, w, v)$, $b(\lambda^h, u^h, v^h) \to b(\lambda, w, v)$ при $h = h'' \to 0$.

Переходя в уравнении $a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h)$ к пределу при $h = h'' \to 0$, получим равенство $a(\lambda, w, v) = b(\lambda, w, v)$ для любого элемента $v \in V$. Имеем $1 = b(\lambda^h, u^h, u^h) \to b(\lambda, w, w)$ при $h = h'' \to 0$, то есть $b(\lambda, w, w) = 1$ и $w \in K$, поскольку предположив $-w \in K$, получим $w = -u$, $b(\lambda^h, u^h, u) \to -b(\lambda, u, u) = -1$ при $h = h'' \to 0$, $u \in K$, но это противоречит $b(\lambda^h, u^h, u) > 0$. Значит, λ и $w = u$ есть минимальное собственное значение и отвечающий ему положительный собственный элемент задачи (7).

Докажем сильную сходимость $u^h \to u$ в V при $h = h'' \to 0$. Действительно, имеем

$$p_0 |u^h - P_h u|_1^2 \leqslant a(\lambda^h, u^h - P_h u, u^h - P_h u) = \\ = a(\lambda^h, u^h, u^h) - 2a(\lambda^h, u^h, P_h u) + a(\lambda^h, P_h u, P_h u) \to 0$$

при $h = h'' \to 0$. Здесь учтено, что при $h = h'' \to 0$ справедливы соотношения

$$a(\lambda^h, u^h, u^h) = 1, \quad a(\lambda^h, u^h, P_h u) \to a(\lambda, u, u) = 1, \quad a(\lambda^h, P_h u, P_h u) \to a(\lambda, u, u) = 1.$$

Следовательно, $|u^h - u|_1 \leqslant |u^h - P_h u|_1 + |u - P_h u|_1 \to 0$ при $h = h'' \to 0$.

Предположим, что для последовательности $h' \to 0$ выполняется неравенство $|u^h - u|_1 \geqslant c$ при $h = h' \to 0$. Тогда, как и выше, существует подпоследовательность $h'' \to 0$ такая, что $|u^h - u|_1 \to 0$ при $h = h'' \to 0$. Но это противоречит предыдущему неравенству.

Таким образом, для любой последовательности $h' \to 0$ имеет место сходимость $u^h \to u$ в V при $h = h' \to 0$, то есть $u^h \to u$ в V при $h \to 0$. Теорема доказана. □

4. Численные эксперименты

Проведены вычисления наименьшего собственного значения и отвечающей ему положительной собственной функции для дифференциальной задачи на собственные значения (1) с коэффициентами $s(x) = x + 1$, $x \in \overline{\Omega}$, $\Omega = (0, \pi)$, $\overline{\Omega} = [0, \pi]$,

$$p(\mu) = \begin{cases} \mu + 2, & \mu \in [0,1], \\ 3, & \mu \in (1, \infty), \end{cases} \qquad r(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in [0,1], \\ \mu, & \mu \in (1, \infty). \end{cases}$$

В данном случае $p(0) = 2$, $r(0) = 1$, следовательно, справедлива теорема 2 о существовании наименьшего простого собственного значения задачи (1), отвечающего положительной собственной функции.

На рис. 1 показан график функции $\gamma(\mu)$ задачи (2) и отмечено наименьшее простое собственное значение $\lambda = 1.1487$ задачи (1). По оси абсцисс откладываются значения параметра μ, а по оси ординат y – значения функции $y = \gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$. Этот рисунок иллюстрирует теорему существования (теорема 2) решения задачи (1) в случае немонотонной функции $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$. Из рисунка видно, что $\gamma(0) = 2 > 1$ и $\gamma(3) < 1$. Поэтому искомое собственное значение λ должно находиться на интервале $(0, 3)$ и определяться как абсцисса точки пересечения прямой $y = 1$ с графиком функции $y = \gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$.

На рис. 2 приведен график собственной функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, отвечающей собственному значению λ. Функция $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, удовлетворяет однородным граничным условиям, то есть обращается в нуль в граничных точках $x = 0$, $x = \pi$, а во внутренних точках отрезка $[0, l]$ эта функция принимает положительные значения. Решение задачи проводилось с помощью схемы метода конечных элементов (10) при $N = 1000$.

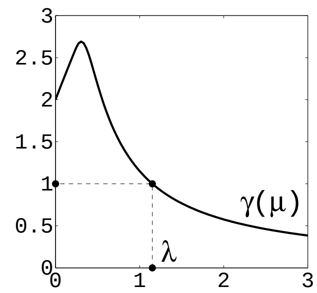

Рис. 1. Минимальное собственное значение

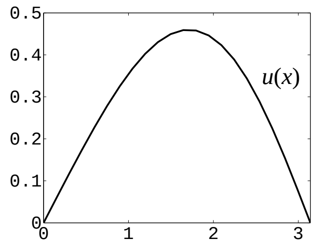

Рис. 2. Положительная собственная функция

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Гумбольдта (Alexander von Humboldt Foundation) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00864, 12-01-97026, 13-01-00908).

Summary

V.S. Zheltukhin, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev, V.Yu. Chebakova. Computation of the Minimal Eigenvalue for a Nonlinear Sturm–Liouville Problem.

We derive a condition for the existence of the minimal eigenvalue answering the positive eigenfunction of the nonlinear eigenvalue problem for an ordinary differential equation. This problem is approximated by a mesh scheme of the finite element method. The convergence of the approximate solutions to the exact ones is investigated. The theoretical results are illustrated by numerical experiments for a model problem.

Keywords: eigenvalue, positive eigenfunction, nonlinear eigenvalue problem, ordinary differential equation, Sturm–Liouville problem, finite element method.

Литература

1. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.

2. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2000. – 348 с.

3. *Мекешкина-Абдуллина Е.И., Кулевцов Г.Н.* Придание готовым изделиям из меха заданных декоративных и потребительских свойств с одновременным повышением стойкости к атмосферной биокоррозии за счет модификации ННТП // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т. 15, № 21. – С. 244–248.

4. *Хубатхузин А.А., Абдуллин И.Ш., Гатина Э.Б., Калашников Д.И.* Изменение физико-механических свойств металлов и их сплавов с помощью ВЧ-плазмы пониженного давления // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 268–271.

5. *Хубатхузин А.А., Абдуллин И.Ш., Башкирцев А.А., Гатина Э.Б.* Формирование нанодиффузионных алмазоподобных покрытий на поверхности твердых сплавов с помощью ВЧ-плазмы пониженного давления // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 262–264.

6. *Ковалевский А.А., Строгова А.С., Лабунов В.А., Шевченок А.А.* Аккумулирование водорода порошками кремния в плазме ВЧ-индукционного разряда // Журн. техн. физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 10. – С. 140–143.

7. *Туманов Ю.Н.* Плазменные, высокочастотные, микроволновые и лазерные технологии в химико-металлургических процессах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 968 с.

8. *Большаков А.А., Круден Б.А.* Диагностика индуктивной плазмы методом диодной лазерной спектроскопии поглощения // Журн. техн. физики. – 2008. – Т. 78, Вып. 11. – С. 34–44.

9. *Гайнуллин Р.Н., Кирпичников А.П.* Новый метод исследования высокочастотной индукционной плазмы // Изв. вузов. Проблемы энергетики. – 2008. – № 1–2. – С. 87–100.

10. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. – Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2009. – 736 с.

11. *Желтухин В.С.* О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 5. – С. 26–31.

12. *Желтухин В.С.* Об условиях разрешимости системы краевых задач теории высокочастотной плазмы пониженного давления // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 52–57.

13. *Желтухин В.С., Ольков Е.В.* О разрешимости одной нелинейной задачи Штурма–Лиувилля // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2004. – Вып. 25. – С. 59–65.

14. *Гулин А.В., Крегжде А.В.* Разностные схемы для некоторых нелинейных спектральных задач. Препринт № 153. – М.: ИПМ АН СССР, 1981. – 28 с.

15. *Крегжде А.В.* О разностных схемах для нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1280–1284.

16. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. – Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ., 2011. – 256 с.

17. *Соловьёв С.И.* Приближенные методы решения нелинейных спектральных задач: Дис. … д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 2010. – 262 с.

18. *Goolin A.V., Kartyshov S.V.* Numerical study of stability and nonlinear eigenvalue problems // Surv. Math. Ind. – 1993. – V. 3. – P. 29–48.

19. *Apel Th., Sändig A.-M., Solov'ev S.I.* Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes // Math. Model. Numer. Anal. – 2002. – V. 36, No 6. – P. 1043–1070.

20. *Lyashko A.D., Solov'yev S.I.* Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation // Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1991. – V. 6, No 2. – P. 121–129.

21. *Жигалко Ю.П., Соловьёв С.И.* Собственные колебания балки с гармоническим осциллятором // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 10. – С. 36–38.

22. *Карчевский Е.М., Соловьёв С.И.* Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 4. – С. 563–565.

23. *Карчевский Е.М., Соловьёв С.И.* Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 3. – С. 78–80.

24. *Гулин А.В., Крегжде А.В.* О применимости метода бисекции к решению нелинейных разностных задач на собственные значения. Препринт № 8. – М.: ИПМ АН СССР, 1982. – 22 с.

25. *Гулин А.В., Яковлева С.А.* О численном решении одной нелинейной задачи на собственные значения // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1988. – Вып. 6. – С. 90–97.

26. *Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I.* The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1994. – V. 9, No 5. – P. 417–427.

27. *Solov'ëv S.I.* Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems // Linear Algebra Appl. – 2006. – V. 415, No 1. – P. 210–229.

28. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О быстроте сходимости приближённых методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1393–1408.

29. *Карма О.О.* Асимптотические оценки погрешности приближённых характеристических значений голоморфных фредгольмовых оператор-функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1971. – Т. 11, No 3. – С. 559–568.

30. *Соловьёв С.И.* Погрешность метода Бубнова – Галёркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1992. – Т. 32, № 5. – С. 675–691.

31. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 10. – С. 60–68.

32. *Соловьёв С.И.* Оценки погрешности метода конечных элементов для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 9. – С. 70–77.

33. *Соловьёв С.И.* Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1997. – Т. 37, № 11. – С. 1311–1318.

34. *Даутов Р.З., Ляшко А.Д., Соловьёв С.И.* Сходимость метода Бубнова – Галёркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1144–1153.

35. *Вайникко Г.М.* Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 405–425.

36. *Вайникко Г.М.* Оценки погрешности метода Бубнова – Галёркина в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 587–607.

37. *Вайникко Г.М.* О быстроте сходимости приближённых методов в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, № 5. – С. 977–987.

38. *Соловьёв С.И.* Метод конечных элементов для несамосопряженных спектральных задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 51–62.

39. *Соловьёв С.И.* Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных функций // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1230–1238.

40. *Соловьёв С.И.* Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных подпространств // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 710–711.

41. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация вариационных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 7. – С. 1022–1032.

42. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация неотрицательно-определенных спектральных задач // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 8. – С. 1075–1082.

43. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация знаконеопределенных спектральных задач // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1042–1055.

44. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 7. – С. 936–944.

45. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.

46. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию
22.05.13

Желтухин Виктор Семёнович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *vzheltukhin@gmail.com*

Соловьёв Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *sergei.solovyev@kpfu.ru*

Соловьёв Павел Сергеевич – студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Чебакова Виолетта Юрьевна – ассистент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *vchebakova@mail.ru*