

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 16-18 января 2021 г.

Сумма всех элементов таблицы $n \times m$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & \dots & nm \end{pmatrix}$$

Сумма арифметической прогрессии:

$$\Sigma = (1 + nm) \frac{nm}{2}$$

Подзадача 1

Переберем линию разделения. Затем за $n \cdot m$ посчитаем сумму в разделенной таблице.

Разбиение по строкам:

$$\left| \left(\begin{array}{c} \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \\ \hline \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \\ \hline \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \end{array} \right) \right|$$

Разбиение по столбцам:

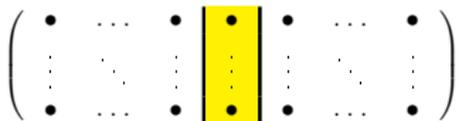
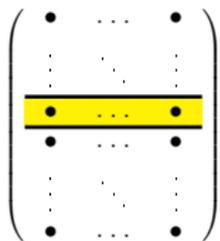
$$\left| \left(\begin{array}{c} \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \\ \hline \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \\ \hline \text{•} \dots \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \dots \text{•} \end{array} \right) \right|$$

Выберем лучший разрез. В сумме решение работает за $n \cdot m \cdot (n + m)$.

Ограничения: $t = 1$, $1 \leq n$, $m \leq 100$

Подзадача 2

Заметим, что при перемещении линии разреза на 1 в каждой из половин добавляется или удаляется только $O(n)$ или $O(m)$ клеток. Значит можно перебрать все варианты за $O(nm)$.



Ограничения: $t = 1$, $1 \leq n$, $m \leq 2000$

Сумма элементов первых k строк

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \\ m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)m+1 & (k-1)m+2 & \dots & km \\ \hline km+1 & km+2 & \dots & (k+1)m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & \dots & nm \end{array} \right)$$

Сумма арифметической прогрессии:

$$\Sigma_U = (1 + km) \frac{km}{2}$$

Сумма элементов оставшихся строк

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \\ m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)m+1 & (k-1)m+2 & \dots & km \\ \hline km+1 & km+2 & \dots & (k+1)m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & \dots & nm \end{array} \right)$$

$$\Sigma_D = \Sigma - \Sigma_U$$

Оптимальное горизонтальное разделение таблицы

Разность верхней и нижней частей таблицы

$$\Delta_H = \Sigma_U - \Sigma_D = 2\Sigma_U - \Sigma = 2(1 + km) \frac{km}{2} - (1 + nm) \frac{nm}{2}$$

$$\Delta_H = \frac{m}{2} [2k + 2k^2m - n(1 + nm)]$$

Решаем квадратное уравнение

$$\Delta_H = 0 \Rightarrow 2mk^2 + 2k - n(1 + nm) = 0$$

с дискриминантом:

$$D = 4 + 8nm(1 + nm)$$

Положительный корень уравнения:

$$K_H = \frac{\sqrt{2n^2m^2 + 2nm + 1} - 1}{2m}$$

Сумма элементов первых k столбцов

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & m \\ m+1 & \dots & m+k & m+k+1 & \dots & 2m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)m+1 & \dots & (n-1)m+k & (n-1)m+k+1 & \dots & nm \end{array} \right)$$

Сумма элементов первых k столбцов

Сумма элементов построчно:

$$i = 1 \quad : \quad \sigma_1 = (1 + k) \frac{k}{2}$$

$$i = 2 \quad : \quad \sigma_2 = ((m + 1) + (m + k)) \frac{k}{2} = (2m + 1 + k) \frac{k}{2}$$

$$i = 3 \quad : \quad \sigma_3 = ((2m + 1) + (2m + k)) \frac{k}{2} = (2 \cdot 2m + 1 + k) \frac{k}{2}$$

⋮

$$\begin{aligned} i = n \quad : \quad \sigma_n &= (((n - 1)m + 1) + ((n - 1)m + k)) \frac{k}{2} = \\ &= ((n - 1)2m + 1 + k) \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Сумма элементов первых k столбцов

Сумма элементов:

$$\Sigma_L = \sum_{i=1}^n ((i-1)2m + 1 + k) \frac{k}{2} = n(1+k) \frac{k}{2} + km \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = 0 + 1 + \dots + (n-1) = (n-1) \frac{n}{2}$$

$$\Sigma_L = n(1+k) \frac{k}{2} + km(n-1) \frac{n}{2} = (1+k+m(n-1)) \frac{kn}{2}$$

Сумма элементов оставшихся столбцов

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & m \\ m+1 & \dots & m+k & m+k+1 & \dots & 2m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)m+1 & \dots & (n-1)m+k & (n-1)m+k+1 & \dots & nm \end{array} \right)$$

$$\Sigma_R = \Sigma - \Sigma_L$$

Оптимальное вертикальное разделение таблицы

Разность левой и правой частей таблицы

$$\Delta_V = \Sigma_L - \Sigma_R = 2\Sigma_L - \Sigma = 2(1+k+m(n-1))\frac{kn}{2} - (1+nm)\frac{nm}{2}$$

$$\Delta_V = \frac{n}{2} [2k^2m + 2k(1 + nm - m) - (m + nm^2)]$$

Решаем квадратное уравнение

$$\Delta_V = 0 \Rightarrow 2k^2m + 2k(1 + nm + m) - (m + nm^2) = 0$$

с дискриминантом:

$$D = 4((1 + nm)^2 + m^2)$$

Положительный корень уравнения:

$$K_V = \sqrt{(nm + 1)^2 + m^2} - (1 + nm - m)$$

Подзадачи 3 и 4

Используя формулы можно посчитать суммы при фиксированных горизонтальных и вертикальных разрезах за $O(1)$, а значит, можно найти лучший разрез за $(n + m)$.

Ограничения:

$$t = 1, \quad 1 \leq n, \quad m \leq 10^7$$
$$1 \leq t \leq 1000, \quad 1 \leq n \times m \leq 10000$$

Подзадача 5

Здесь арифметическая прогрессия одномерная и надо найти такое k , чтобы

$$\frac{1+k}{2}k \approx \frac{1+m}{4}m$$

Решение 1

Упрощая, получим квадратное уравнение на k , и найдем лучшее k за $O(1)$. Из-за округлений возможна погрешность, поэтому нужно перебрать ответ в диапазоне ± 1 .

Решение 2

Можно найти лучшее k , используя двоичный поиск (сумма первых k значений возрастает при увеличении k).

Ограничения: $1 \leq t \leq 100000$, $n = 1$, $m \leq 10^9$

Подзадача 6

Сравниваем разность подтаблиц при оптимальном горизонтальном (K_H) и вертикальном (K_V) разбиениях.

Ограничения: $1 \leq t \leq 100000$, $1 \leq n, m \leq 10^9$