Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

«Набережночелнинский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета»

кафедра математики

МАТЕМАТИКА (в трёх частях): Часть 3.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

*для студентов заочной и дистанционной форм обучения
по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров*

г. Набережные Челны
2019

Математика (в трёх частях): Часть 3. *Учебно-методический комплекс для студентов заочной и дистанционной форм обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2019, 131с.

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Цель преподавания дисциплины «Математика» - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными **задачами дисциплины** являются:
- ознакомление обучающихся с фундаментальными понятиями и фактами математики, необходимыми для применения современных математических методов при решении задач науки, техники, экономики и управления;
-привлечение внимания студентов к возможностям использования математических методов при исследовании различных задач;
-развитие навыков к математическому моделированию прикладных задач;
-воспитание абстрактного мышления и умения строго обосновать соответствующие факты;
-развитие логического и алгоритмического мышления;
-овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Данная дисциплина является основой при изучении дисциплин, использующих современные математические методы. В свою очередь, для изучения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:
- знать теоретические основы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений, числовых и функциональных рядов, теории вероятностей и математической статистики;
- **уметь** использовать полученные знания для решения практических задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. В лекциях излагается содержание тем программы с учетом требований, установленных для специалиста в квалификационной характеристике. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью контрольных работ, зачётов и экзаменов.

2. Содержание и структура дисциплины (часть 3).

2.1 Содержание дисциплины (наименование тем).

Раздел. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ.

Тема. Неопределённый интеграл.

Первообразная функция, её свойства. Неопределённый интеграл, условия его существования, свойства. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование заменой переменной, интегрирование по частям. Неправильные и правильные рациональные дроби. Разложение правильной дроби на простые. Интегрирование простых, правильных, неправильных рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений.

Тема. Определённый интеграл.

Определённый интеграл, условия его существования, геометрический смысл и свойства. Оценка интеграла и формулы среднего значения. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объёмов тел.

Тема. Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования и от неограниченной функции. Понятие абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов.

Тема. Кратные интегралы.

Понятия двойного и тройного интегралов, условия их существования, геометрический и физический смысл, свойства. Оценка интегралов и формулы средних значений. Понятие правильной области. Повторные интегралы по правильным областям. Вычисление кратных интегралов переходом к повторным в декартовых координатах. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойных и тройных интегралов.

Раздел. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Тема. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Понятие дифференциального уравнения (ДУ). ДУ 1-ого порядка, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными. Однородное ДУ. Линейное ДУ и уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах.

Тема. Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений.

ДУ порядка n, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. ДУ порядка n, допускающие понижение порядка. Линейное ДУ порядка n. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений (ФСР). Структура общего решения ЛДУ порядка n. Принцип суперпозиции частных решений. Однородные и неоднородные ЛДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ для различных типов корней характеристического уравнения. Нахождение частного и общего решений НЛДУ в случае специальной правой части уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Нормальная система ДУ, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. Нахождение решения нормальной системы ДУ методом исключения.

Раздел. РЯДЫ.

Тема. Числовые ряды.

Понятие числового ряда. Частичная сумма, остаток, сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды, их свойства. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости ряда. Ряды с положительными членами, достаточные признаки их сходимости (признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши). Ряд геометрической прогрессии и обобщённый гармонический ряд, условия их сходимости, расходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка суммы и остатка знакочередующегося ряда. Знакопеременные ряды, достаточный признак их сходимости. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды, их свойства.

Тема. Функциональные ряды.

Понятие функционального ряда. Частичная сумма, остаток, точка и область сходимости, сумма функционального ряда. Нахождение области сходимости.

Тема. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Понятие степенного ряда. Признак Абеля. Интервал и радиус абсолютной сходимости степенного ряда. Область сходимости степенного ряда, её нахождение. Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости функций в ряд Тейлора. Применение ряда Тейлора в приближённых вычислениях.

Тема. Тригонометрический ряд. Ряд Фурье.

Тригонометрический ряд. Ряд Фурье. Тригонометрические системы функций, их свойства. Условия Дирихле. Достаточный признак Дирихле разложимости функции в ряд Фурье. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций, функций, заданных на половине периода.

Раздел. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

Тема. Случайные события и их вероятности.

Предмет теории вероятностей. Случайный эксперимент. Случайные события, действия над ними. Определения вероятности и свойства. Правила и формулы комбинаторики, вычисление вероятностей с их помощью. Условная вероятность события. Формулы сложения и умножения вероятностей, полной вероятности и Байеса. Повторные испытания. Схема и формула Бернулли.

Тема. Случайные величины.

Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения вероятностей. Дискретная и непрерывная СВ, способы их задания. Функция плотности распределения вероятностей. Числовые характеристики СВ. Основные законы распределения СВ: биномиальный, Пуассона, равномерный, показательный и нормальный. Понятие многомерной СВ. Дискретная двумерная СВ: таблица распределения вероятностей, законы распределения составляющих, числовые характеристики. Коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость СВ. Функция регрессии.

Тема. Предельные теоремы теории вероятностей.

Неравенство Чебышева. Законы больших чисел в форме Чебышева и Бернулли. Понятие о центральной предельной теореме.

Тема. Основные понятия и задачи математической статистики. Предварительная обработка экспериментальных данных.

Предмет и основные задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка из неё. Выборочный метод. Повторная и бесповторная выборки. Случайная выборка. Основные способы записи выборки: вариационный ряд; статистический дискретный и интервальный ряды. Числовые характеристики выборки и её графическое представление.

2.2. Практические занятия, их содержание.

Тема. Неопределённый интеграл. Определённый интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы.

Вычисление неопределённого интеграла методами: непосредственного интегрирования, замены переменной, интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических, иррациональных выражений. Определённый интеграл, его вычисление по формуле Ньютона-Лейбница. Вычисление площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объёмов тел с помощью определённого интеграла. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования. Двойной интеграл, его вычисление в декартовых и полярных координатах. Приложения двойных интегралов.

Тема. Дифференциальные уравнения первого и высших порядков.

Нахождение решений дифференциальных первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли. Нахождение решений дифференциальных уравнений высших порядков: допускающих понижение порядка, линейных с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Тема. Числовые ряды. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Ряды Фурье.

Исследование на сходимость числовых рядов. Нахождение радиуса и области сходимости степенных рядов. Разложение функций в ряды Тейлора и Фурье.

Тема. Случайные события и их вероятности. Случайные величины. Предварительная обработка статистических данных.

Вычисление вероятностей случайных событий с помощью классического определения, формул сложения и умножения, формулы Бернулли, формул полной вероятности и Байеса. Нахождение законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин и их числовых характеристик. Построение статистических рядов, вычисление их числовых характеристик и графическое представление.

2.3. Виды самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студентов предполагает изучение теоретического материала и выполнение контрольной работы.

3. Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -960с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов. –М.: Высшая школа, 2005. -479с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебник для вузов. –М.: Высшая школа, 2005. -400с.
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: учебное пособие. –СПб.: Лань, 2009. -640с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. -М. Высшая школа, 2005. -479 с.
6. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. -304с.

Дополнительная литература:

1. Белько И.В., Свирид Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика: примеры и задачи. Учеб. пособие для вузов. –Минск: Новое знание, 2004. -251с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. - 22-е изд.- СПб.: Профессия, 2007.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Часть I: -М: ОНИКС: Мир и образование, 2008. -368с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Часть 2: -М: ОНИКС: Мир и образование, 2008. -448с.
5. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика: решебник. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. -368с.
6. Курс высшей математики: теория вероятностей: лекции и практикум: учеб. пособие для студентов вузов по напр. «Технические науки» /Под общ. ред. И.М. Петрушко. –СПб.: «Лань», 2008. -352с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2-х ч. Ч.2: Тридцать пять лекций. - 6-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2008.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов /Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. и др. Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. -М: Наука, 1986. – 368с.
9. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)
10. Соловьёв И.А., Шевелёв В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению зада по высшей математике. Интегрирование функций одной переменной, функции многих переменных, ряды: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань»,2009.-288с.ISBN: 978-5-8114-0819-1 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=371).

4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить по одной контрольной работе в каждом из семестров обучения (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).
3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.
4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*
5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.
6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.
9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.
10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

1-10. Найти неопределённые интегралы:

1. а) $\int\left(\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\right)dx$ **б)** $\int\frac{tg(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$ **в)** $\int(4-3x)e^{-3x}dx$

г) $\int\frac{(3x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ **д)** $\int\frac{(3x^3+1)dx}{x^2-1}$ **е)** $\int\sin^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$

2. а) $\int\left(\frac{2}{x}-3x^2+\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ **в)** $\int(2x+3)\cos 4x dx$

г) $\int\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)dx$ **д)** $\int\frac{x+2}{x-2}dx$ **е)** $\int\sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx$

3. а) $\int\left(\frac{2\sqrt{x}+x^3\cdot\sin x-3x^2}{x^3}\right)dx$ **б)** $\int\frac{x^2+\ln^2 x}{x}dx$ **в)** $\int(1-6x)e^{2x}dx$

г) $\int\frac{(5x+11)\,dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$ **д)** $\int\frac{x^2}{x+1}dx$ **е)** $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x-6\sin x+12}$

4. а) $\int\left(\frac{4}{x}+5x^4-\frac{3}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **в)** $\int(4-16x)\sin 4xdx$

г) $\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2-2x-15}$ **д)** $\int\frac{(x^3+1)dx}{x^2-x}$ **е)** $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

5. а) $\int\left(\frac{2-3cos^3 x}{\cos^2 x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{(x^3+x)dx}{x^4+1}$ **в)** $\int\ln(x^2+4)dx$

г) $\int\frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$ **д)** $\int\frac{x^3}{x+3}dx$ **е)** $\int\frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$

6. а) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^5}+\frac{3}{x}+6\sqrt{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$ **в)** $\int(3x+4)e^{3x}dx$

г) $\int\frac{(5x+6)\,dx}{x^2+4x-12}$ **д)** $\int\frac{4x^2+24x+8}{x(x-2)(x+4)}dx$ **е)** $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^6 x}$

7. а) $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2\,dx}{x^2}$ **б)** $\int\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$ **в)** $\int\sqrt{x^3}\cdot\ln x\,dx$

г) $\int\frac{(5x+2)\,dx}{x^2+2x-8}$ **д)** $\int\frac{(x+2)\,dx}{(x-1)(x+6)}$ **е)** $\int\sin^2 x\cos^5 x\,dx$

8. а) $\int\left(6x^2+\frac{5}{x^3}-\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{x\,dx}{x^4+1}$ **в)** $\int(5x+6)\cos 2xdx$

г) $\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+20}}$ **д)** $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ **е)** $\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx$

9. а) $\int(x+4)\cdot(x-2\sqrt{x}+1)dx$ **б)** $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ **в)** $\int(x+5)\sin 3xdx$

г) $\int\frac{(7-x)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ **д)** $\int\frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$ **е)** $\int\sin x\cos 3x\,dx$

10. а) $\int\left(8x^3-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-4\sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{\cos(\ln x)dx}{x}$ **в)** $\int(5x-2)\,e^{3x}dx$

г) $\int\frac{(6x-1)\,dx}{x^2-4x+13}$ **д)** $\int\frac{x^2}{x+3}dx$ **е)** $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x+6\cos^2 x}$

11-20. Вычислить определённые интегралы:

11. а) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\cdot dx$ **б)** $\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

12. а) $\int\limits_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot dx$ б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}$

13. а) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\cdot\sqrt{25+x^2}}$ б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

14. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{4+\sqrt{\sin x}}$

15. а) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$ б) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$

16. а) $\int\limits_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$ б) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$

17. а) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ б) $\int\limits_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

18. а) $\int\limits_2^{14} \frac{5x\,dx}{\sqrt{x+2}}$ б) $\int\limits_1^e \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) dx$

19. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$ б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

20. а) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\cdot dx$ б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

21-30. Вычислить несобственный интеграл I-ого рода или установить его расходимость:

21. $\int\limits_0^\infty \frac{arctgx\,dx}{1+x^2}$ **22.** $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **23.** $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

24. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ **25.** $\int\limits_1^\infty \frac{3x^2\,dx}{1+x^6}$ **26.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

27. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ **28.** $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **29.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$

30. $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctg^2 x\,dx}{1+x^2}$

31-40. Вычислить:
а) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями;
б) объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками указанных функций.

31. а) $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$ **б)** $y=-x^2+5x-6$, $y=0$

32. а) $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$ **б)** $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x\ge 0$

33. а) $y=5-x^2$, $y=x-1$ **б)** $y=2x-x^2$, $y=4x-2x^2$

34. а) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$ **б)** $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$

35. а) $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ **б)** $y=\sin^2 x$, $x=\pi/2$, $y=0$

36. а) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ **б)** $x=\sqrt[3]{y-2}$, $x=1$, $y=1$

37. а) $y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ **б)** $y=xe^x$, $y=0$, $x=1$

38. а) $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$ **б)** $y=2x-x^2$, $y=-x+2$, $x=0$

39. а) $y=x^2-5$, $y=1-x$ **б)** $y=e^{1-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

40. а) $y=x^2+4x$, $y=x+4$ **б)** $y=x^2$, $y^2=x$

41-50. Вычислить длину дуги кривой, заданной указанным уравнением;

41. $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le \sqrt{15}$

42. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$

43. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le 7/9$

44. $y=\ln\left(\frac{5}{2x}\right)$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

45. $y=-\ln\cos x$, $0\le x\le\pi/6$

46. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $1/4\le x\le 1$

47. $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$

48. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\le x\le 8/9$

49. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $0\le x\le 1/4$

50. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 15/16$

51-60. Требуется вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

51. $\iint\limits_D (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

52. $\iint\limits_D (7x^2+y)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=0,\ y=2\sqrt{x}$

53. $\iint\limits_D (36x^2y^2-96x^3y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

54. $\iint\limits_D 12x\,dxdy$, $D:\ x+y=2,\ x=0,\ x=\sqrt{y}$

55. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D:\ x=1,\ y=0,\ y=15x$

56. $\iint\limits_D 30y\,dxdy$, $D:\ x=0,\ x=\sqrt{y},\ x^2+y^2=2$

57. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D:\ y=x^2,\ y^2=x$

58. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $D:\ x=2,\ y=x,\ y=\frac{1}{x}$

59. $\iint\limits_D \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{3}\right)dxdy$, $\qquad D$**:** $y=\dfrac{5x}{3},\ y=5\sqrt{x}$

60. $\iint\limits_D (3-x)dxdy$, $\qquad D$**:** $x=3,\ y=\sqrt{3x},\ y=6\sqrt{3x}$

61-70. Найти площадь (с помощью двойного интеграла) фигуры D, ограниченной указанными линиями:

61. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8\cdot e^{x},\ y=3,\ y=8$

62. $x=8-y^2,\quad x=-2y$

63. $x=27-y^2,\quad x=-6y$

64. $y=\dfrac{1}{x},\ y=6\cdot e^{x},\ y=1,\ y=6$

65. $y=\sqrt{x},\quad y=1/x,\quad x=16$

66. $y=11-x^2,\quad y=-10x$

67. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\ge 0)$

68. $y=\dfrac{2}{x},\ y=5\cdot e^{x},\ y=2,\ y=5$

69. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2},\quad y=\dfrac{3}{2x},\quad x=9$

70. $x=5-y^2,\quad x=-4y$

71-80. Установить тип ДУ первого порядка и найти его общее решение.

71. а) $\sqrt{9+y^2}\,dx-y\,dy=x^2\,y\,dy$ $\qquad$ **б)** $(2x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$

72. а) $4x\,dx-3y\,dy=3x^2\,y\,dy-3x\,y^2\,dx$ $\qquad$ **б)** $y'=(x+y)/(x-y)$

73. а) $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$ $\qquad$ **б)** $(x^2-y^2)\,dx+x\,y\,dy=0$

74. а) $(e^{2x}+5)\,dy+y\,e^{2x}\,dx=0$ $\qquad$ **б)** $x\,y'=y\ln(y/x)$

75. а) $6x\,dx-6y\,dy=3x^2\,y\,dy-2x\,y^2\,dx$ $\qquad$ **б)** $x\,y'=y+\sqrt{25x^2-y^2}$

76. а) $y(4+e^{x})\,dy-e^{x}\,dx=0$ $\qquad$ **б)** $\dfrac{x\,y'-y}{x}=tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

77. а) $y\ln y+x\,y'=0$ $\qquad$ **б)** $x^2\,dy=(x^2+y^2+x\,y)\,dx$

78. а) $\sqrt{3+y^2}+y\sqrt{1-x^2}\,y'=0$ $\qquad$ **б)** $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$

79. а) $y(1+e^{x})\,y'=e^{x}$ $\qquad$ **б)** $x\,y'-y=(x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$

80. а) $y(1+\ln y)+x\,y'=0$ **б)** $(y+\sqrt{xy})\,dx=xdy$

81–90. Установить тип ДУ, найти его общее и частное решения.

81. $y'+y\,tgx=\cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$. **82.** $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x$, $y(-1)=\dfrac{3}{2}$.

83. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x$, $y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$. **84.** $y'+\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0)=\dfrac{2}{3}$.

85. $y'-y\,ctgx=2x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **86.** $y'+\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)e^x$, $y(1)=e$.

87. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$, $y(1)=1$. **88.** $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2$, $y(1)=1$.

89. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$, $y(0)=1$. **90.** $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$, $y(1)=3$.

91-100. Требуется найти:

а) общее решение простейшего ДУ порядка n: $y^{(n)}(x)=f(x)$;

б) общее и частное решения однородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами;

в) общее решение линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

91. а) $y'''=2x+\sin 3x$ **б)** $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

в) $y''-4y'+4y=x^2$

92. а) $y'''=4/x^3$ **б)** $y''-5y'+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

в) $y''+2y'+5y=-\sin 2x$

93. а) $y'''=e^{2x}$ **б)** $y''+y'-2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-3$

в) $y''-7y'=(x-1)^2$

94. а) $y''=\ln 2x$ **б)** $y''-5y'-6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

в) $y''-5y'+6y=2\cos x$

95. а) $y'''=4+\cos 2x$ **б)** $y''+6y'+25y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

в) $y''-2y'+5y=x^2+1$

96. а) $y''' = x^2 - \cos 3x$ **б)** $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

в) $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x$

97. а) $y'' = \sin^2 x$ **б)** $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

в) $y'' + 7y' = e^{-7x}$

98. а) $y'' = x^2 \ln x$ **б)** $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

в) $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$

99. а) $y''' = 3 - \sin 4x$ **б)** $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

в) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$

100. а) $y'' = \cos^2 x$ **б)** $2y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

в) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$

101-110. Исследовать на сходимость ряды и указать применяемые признаки.

101. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{9n}$ **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n (n-1)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$

102. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^3-1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$

103. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^3}{(n+1)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{n-1}\right)^n$

104. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+5n}{9n^2-n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{2^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

105. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2^n(3n+5)}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

106. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$

107. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n^2}{(n+2)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$

108. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{\sqrt{n^3+8n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{4^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}$

109. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot 2^n}{(2n)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$

110. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+\sqrt{n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n (n+1)^2}{n!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

111-120. Найти интервал, радиус и область сходимости степенного ряда:

111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\,9^n}$ **112.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)\,5^n}$ **113.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3 (x+3)^n}{n+1}$

114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+7)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ **115.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$ **116.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n^3 \cdot 4^n}$

117. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n \cdot 3^n}$ **118.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-6)^n}{(n+2)\cdot 3^n}$ **119.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{2n}}{n \cdot 4^n}$

120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\,(n+1)}$

121-130. Требуется найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

121. $y = \dfrac{1}{3+6x}$, $x_0 = 0$ **122.** $y = \dfrac{1}{2-x}$, $x_0 = 0$

123. $y = \dfrac{x}{3-x}$, $x_0 = 2$ **124.** $y = xe^x$, $x_0 = 0$

125. $y = \sin^2 x$, $x_0 = 0$ **126.** $y = e^{3x}$, $x_0 = 0$

127. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$ **128.** $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$

129. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$ **130.** $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

131-140. Требуется разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, определённую указанным ниже образом (в ответе указать первые пять отличные от нуля члена ряда) и построить график функции $f(x)$.

131. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ **132.** $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

133. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ **134.** $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0,\\ -4, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

135. $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ **136.** $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

137. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ **138.** $f(x)=\begin{cases}5, & -\pi\le x<0,\\ -3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

139. $f(x)=x+\pi$, $-\pi\le x\le\pi$. **140.** $f(x)=x-\pi$, $-\pi\le x\le\pi$.

141-150. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***классическое определение*** вероятности:

141. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что число выпавших очков на одном из кубиков в два раза больше, чем на другом.

б) В магазине выставлены для продажи 20 изделий, среди которых 6 изделий некачественные. Найти вероятность того, что взятые случайным образом 2 изделия будут некачественными.

142. а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров равна десяти.

б) В партии из 20 изделий 4 изделия имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий дефектными являются 2 изделия.

143. а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона содержит цифру 4.

б) На ТЭЦ 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажется две женщины.

144. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях равна восьми.

б) Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованные, наудачу извлекают 3 изделия для контроля. Найти вероятность того, что в выборке содержится одно бракованное изделие.

145. а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что произведение номеров вынутых шаров больше пятнадцати.

б) В магазине имеются 20 холодильников, причем 15 из них – импортные. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня холодильников окажется три импортных холодильника.

146. а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 3.

б) Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся два юноши и две девушки.

147. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях больше четырёх, но меньше семи.

б) В магазине выставлены для продажи 18 изделий, среди которых 8 изделий некачественные. Найти вероятность того, что взятые случайным образом 3 изделия будут некачественными.

148. а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что абсолютная величина разности номеров вынутых шаров равна двум.

б) В партии из 30 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий дефектными являются 3 изделия.

149. а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона является числом, кратным 5 (делится на 5 без остатка).

б) На ТЭЦ 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажется хотя бы один мужчина.

150. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях меньше их произведения.

б) Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется хотя бы одна девушка.

151-160. Требуется:

а) найти вероятности указанных событий, используя ***формулы сложения и умножения вероятностей;***
б) найти вероятности указанных событий, используя ***формулу Бернулли***.
151. а) Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом справочнике 0.8, во втором – 0.7, в третьем – 0.85. Найти вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.
б) Экзамен состоит из 6 вопросов. На каждый вопрос дано четыре возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Найти вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить не менее чем на 5 вопросов.
152. а) В первом ящике 5 белых и 7 чёрных шаров. Во втором 3 белых и 12 чёрных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара разного цвета.
б) Покупатель приобрел шесть изделий, изготовленных на данном предприятии, 80% изделий которого составляет продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что не менее пяти из них являются изделиями высшего сорта.
153. а) Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго – 0.8 и для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа два станка из трёх потребуют внимания рабочего.
б) Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 машин из 10 имеющихся. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0.1. Найти вероятность того, что автобаза будет работать нормально в ближайший день.
154. а) Три стрелка стреляют по разу в одну мишень независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0.7, вторым – 0.8, третьим – 0.9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена два раза.
б) В урне 20 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимают подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется три белых.
155. а) Экзаменационный билет по теории вероятностей содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0.9; на третий – 0.8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все вопросы.
б) Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0.25. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок попал в «яблочко» не менее четырёх раз.

156. а) Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом справочнике 0.8, во втором – 0.7, в третьем – 0.85. Найти вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике.
б) Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.
157. а) В первом ящике 6 белых и 4 чёрных шара, во втором -7 белых и 3 чёрных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары одного цвета.
б) Экзамен состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос дано три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Найти вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить на все вопросы.
158. а) Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго – 0.8 и для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа все три станка потребуют внимания рабочего.
б) Покупатель приобрел пять изделий, изготовленных на данном предприятии, 80% изделий которого составляет продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что четыре из них являются изделиями высшего сорта.
159. а) Три стрелка стреляют по разу в одну мишень независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0.7, вторым – 0.8, третьим – 0.9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз.
б) Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 9 машин из 10 имеющихся. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0.2. Найти вероятность того, что автобаза будет работать нормально в ближайший день.
160. а) Экзаменационный билет по теории вероятностей содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0.9; на третий – 0.8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трёх.
б) Вероятность выиграть по лотерейному билету равна $1/7$. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из шести.

161-170. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***<u>формулы полной вероятности и Байеса.</u>***
1161. В магазин поступает продукция трёх фабрик. Причём продукция первой фабрики составляет 20%, второй -45% и третьей -35% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%,

для второй -2%, и для третьей -4%. Найти вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на первой фабрике.

162. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов в количестве: 25 - с первого завода, 35 – со второго, 40 - с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0.9, на втором – 0.8, на третьем – 0.7. Найти вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным.

163. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная, для первого станка равна 0.8, для второго – 0.9. Производительность второго станка вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется нестандартной.

164. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов в количестве: 40 - с первого завода, 35 – со второго, 25 - с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0.9, на втором – 0.7, на третьем – 0.9. Найти вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным.

165. Известно, что 90% выпускаемой заводом продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.95 и признает пригодной нестандартную продукцию с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что изделие, не прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

166. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка-автомата 1% нестандартных, со второго – 2%, с третьего – 2.5%, с четвертого – 5%. Производительности их относятся как 4:3:2:1. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на третьем станке-автомате.

167. В магазин поступает продукция трёх фабрик. Причём продукция первой фабрики составляет 20%, второй -45% и третьей -35% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй -2%, и для третьей -4%. Найти вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на второй фабрике.

168. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов в количестве: 25 - с первого завода, 10 – со второго, 15 - с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0.7, на втором – 0.9, на третьем – 0.8. Найти вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным.

169. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная, для первого станка равна 0.8, для второго – 0.9. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

170. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий -25. Вероятность брака у первого рабочего 0.03, у второго – 0.02, у третьего – 0.01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что это изделие изготовил второй рабочий.

171-180. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X; построить многоугольник полученного распределения; вычислить её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

171. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Дискретная случайная величина X – число нестандартных деталей среди двух отобранных;

172. Стрелок производит по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.9. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень.

173. В экзаменационном билете две задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0.9, второй – 0.6. Дискретная случайная величина X –число правильно решённых задач в билете.

174. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Дискретная случайная величина X – число нестандартных деталей среди отобранных.

175. Стрелок производит по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.7. Дискретная случайная величина X – число промахов.

176. Из пяти купленных роз 2 красные. Для составления букета наудачу берут 3 розы. Дискретная случайная величина X – число красных роз среди отобранных.

177. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Дискретная случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных.

178. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0.1. Дискретная случайная величина X – число отказавших элементов в одном опыте.

179. В урне 6 белых и 4 чёрных шаров. Из неё извлекли два шара. Дискретная случайная величина X – число белых шаров среди отобранных.

180. В урне 6 белых и 4 чёрных шаров. Из неё извлекли два шара. Дискретная случайная величина X – число чёрных шаров среди отобранных.

181-190. Требуется найти функцию плотности вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X; вычислить её математическое ожидание MX, дисперсию DX и вероятность $P(X \in (\alpha, \beta))$.

181. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/25 & 0 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}, \quad \alpha = 1, \beta = 4.$$

182. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3}{4}.$$

183. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{9} & -1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \alpha = 0, \beta = 1.$$

184. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ (x-1)/5 & 1 < x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}, \quad \alpha = 2, \beta = 5.$$

185. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x/4 & 0 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}, \quad \alpha = 2, \beta = 3.$$

186. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/4 & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \alpha = 1, \beta = 2.$$

187. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{8x^2 - x^4}{16} & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \alpha = 1, \beta = 2.$$

188. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -2\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & -2<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases},\quad \alpha=-1,\beta=1.$$

189. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 3\\ \dfrac{(x-3)^2}{4} & 3<x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases},\quad \alpha=3,\beta=4.$$

190. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 2\\ x^2-4x+4 & 2<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases},\quad \alpha=2,\beta=\frac{5}{2}.$$

191-200. Для приведённых выборок требуется:

а) построить вариационный и дискретный статистический ряды; вычислить числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); построить полигон частот;

б) вычислить числовые характеристики группированной выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); построить гистограмму частот.

191. а) Выборка объема $n=20$**:**

0	**4**	**2**	**0**	**5**	**1**	**1**	**3**	**0**	**2**	**2**	**4**	**3**	**2**	**3**	**3**	**0**	**4**	**5**	**1**

б) Выборочные данные о месячной заработной плате X по цеху (в тыс.руб.)

Зар.плата	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	**12-14**	**14-16**	**16-18**
Число рабочих	**1**	**3**	**10**	**15**	**20**	**12**	**7**	**2**

192. а) Выборка объема $n=15$**:**

4	**5**	**6**	**4**	**4**	**6**	**2**	**2**	**5**	**4**	**5**	**5**	**4**	**2**	**3**

б) Выборочные данные о расходе X фирм, продающих компьютеры, на рекламу (в % к общему расходу фирмы):

Расход на рекламу	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число фирм	**5**	**8**	**16**	**12**	**9**

193. а) Выборка объема $n = 15$ **:**

2	2	1	3	4	2	1	1	3	3	4	3	2	4	5

б) Выборочные данные о стаже работы X сотрудников банка:

Стаж, лет	**0-2**	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число сотрудников	**3**	**9**	**18**	**14**	**10**	**6**

194. а) Выборка объема $n = 15$ **:**

9	8	10	6	6	7	9	9	10	4	10	11	11	11	6

б) Выборочные данные о годовом товарообороте X (млн.руб) продовольственных магазинов города

Товарооборот	**10-12**	**12-14**	**14-16**	**16-18**	**18-20**
Число магазинов	**17**	**40**	**32**	**8**	**3**

195. а) Выборка объема $n = 20$ **:**

5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	3	3	4	1	5	5

б) Выборочные данные о месячной заработной плате X по цеху (в тыс.руб.)

Зар.плата	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число рабочих	**5**	**8**	**16**	**12**	**9**

196. а) Выборка объема $n = 20$ **:**

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	2	3	1	2	2

б) Данные измерений роста X (в см) студентов одного из вузов города:

Рост	**150-160**	**160-170**	**170-180**	**180-190**	**190-200**
Число студентов	**10**	**34**	**25**	**21**	**10**

197. а) Выборка объема $n = 15$ **:**

6	8	9	9	4	9	6	8	9	4	6	6	8	6	4

б) Выборочные данные о годовом товарообороте X (млн.руб) мебельных магазинов города

Товарооборот	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**
Число магазинов	**12**	**17**	**46**	**12**	**13**

198. а) Выборка объема $n = 15$ **:**

5	**10**	**10**	**9**	**5**	**8**	**8**	**9**	**6**	**6**	**6**	**8**	**8**	**10**	**8**

б) Данные измерений внутреннего диаметра X (в мкм) поршневых колец:

Диаметр	**28-32**	**32-36**	**36-40**	**40-44**	**44-48**
Число колец	**5**	**16**	**11**	**8**	**10**

199. а**)** Выборка объема $n = 15$ **:**

1	**0**	**2**	**6**	**5**	**4**	**1**	**4**	**5**	**1**	**2**	**4**	**2**	**2**	**2**

б) Выборочные данные о расходе X фирм, продающих автомобили, на рекламу (в % к общему расходу фирмы):

Расход на рекламу	**3-5**	**5-7**	**7-9**	**9-11**	**11-13**
Число фирм	**1**	**6**	**14**	**7**	**2**

200. а) Выборка объема $n = 20$ **:**

1	**3**	**3**	**2**	**0**	**2**	**4**	**3**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**

б) Данные о содержании X (в куб. м) деловой древесины в одном дереве:

Содержание деловой древесины	**0.2-0.6**	**0.6-1.0**	**1.0-1.4**	**1.4-1.8**
Число деревьев	**2**	**14**	**15**	**9**

5.2. Вопросы к экзамену.

1. Первообразная функция, её свойства.
2. Неопределённый интеграл, условия его существования и свойства.
3. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование заменой переменной; интегрирование по частям.
4. Вычисление интегралов вида:

   а) $\int f(ax+b)dx$ **б)** $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ **в)** $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
5. Неправильная и правильная рациональные дроби, разложение правильной дроби на простые. Интегрирование простых, правильных и неправильных рациональных дробей.
6. Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка и ее применение.
7. Вычисление интегралов вида: **а)** $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} xdx$, $((m, n > 0)$;

б) $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$.

8. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, \ldots, (ax+b)^{m_k/n_k}\right) dx$
9. Вычисление интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.
10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы, его геометрический смысл. Условия существования определённого интеграла.
11. Основные свойства определенного интеграла. Оценивание интеграла. Формула среднего значения.
12. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.
14. Площадь плоской фигуры и её вычисление с помощью определённого интеграла.
15. Длина дуги кривой и её вычисление с помощью определённого интеграла.
16. Объем тела и его вычисление с помощью определенного интеграла. Объём тела вращения.
17. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
18. Двойной интеграл как предел интегральной суммы, условие его существования и геометрический смысл.
19. Основные свойства двойного интеграла. Оценивание двойного интеграла. Формула среднего значения.
20. Понятие правильной области в направлении координатных осей Ox, Oy. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному интегрированию.
21. Замена переменных интегрирования в двойном интеграле. Полярные координаты, их связь с декартовыми.+ Формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам.
22. Вычисление площади плоской фигуры и объёма цилиндрического тела с помощью двойного интеграла.
23. Понятие дифференциального уравнения первого порядка, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения ДУ первого порядка. Задача Коши.
24. ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными, их решение.
25. Однородные ДУ первого порядка, их решение.
26. Линейное ДУ первого порядка и его решение. Уравнение Бернулли.

27. Дифференциальное уравнение порядка n, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения ДУ порядка n. Задача Коши.
28. ДУ порядка n, допускающие понижение порядка, их решение.
29. Понятие линейной зависимости и независимости системы функций. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости систем функций.
30. Линейное ДУ порядка n. Однородные и неоднородные ЛДУ. Свойства частных решений, фундаментальная система решений ОЛДУ.
31. Структура общего решения однородного и неоднородного ЛДУ порядка n. Принцип суперпозиции частных решений.
32. ОЛДУ порядка n с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ в случаях когда корни характеристического уравнения: **а)** действительные и различные; **б)** действительные и есть кратные; **в)** комплексно-сопряжённые.
33. Нахождение частного решения НЛДУ порядка n с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.
34. Нормальная система ДУ. Решение, начальные условия, общее и частное решения нормальной системы ДУ. Задача Коши. Нахождение решения нормальной системы ДУ методом исключения.
35. Понятие числового ряда (ЧР). Частичная сумма и остаток ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда.
36. Основные свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости ряда.
37. Достаточные признаки сравнения (классический и предельный) сходимости рядов с положительными членами.
38. Эталонные числовые ряды (геометрический и обобщённый гармонический), условия их сходимости и расходимости.
39. Достаточные признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами, условия их применимости.
40. Знакочередующийся числовой ряд. Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда и его остатка. Вычисление суммы знакочередующегося ряда с заданной степенью точности ε ?
41. Знакопеременный числовой ряд. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды, их свойства. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
42. Функциональный ряд (ФР). Частичная сумма, остаток, точка сходимости, область определения и область сходимости ФР. Сумма функционального ряда. Абсолютно сходящиеся ФР.

43. Степенной ряд. Признак Абеля абсолютной сходимости степенного ряда. Радиус и интервал абсолютной сходимости степенного ряда. Нахождение области обычной и абсолютной сходимости степенного ряда. Основные свойства степенных рядов.
44. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Применение ряда Тейлора в приближённых вычислениях.
45. Тригонометрический ряд. Ряд Фурье. Условия Дирихле. Достаточный признак Дирихле разложимости функции в ряд Фурье.
46. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на половине периода.
47. Предмет теории вероятностей. Понятия случайного эксперимента, случайного события. Свойство статистической устойчивости исходов случайного эксперимента, пример такого эксперимента.
48. Элементарное событие. Пространство элементарных событий $\mathbf{\Omega}$. Случайное событие, как подмножество $\mathbf{\Omega}$. Достоверное и невозможное события. Представление событий в виде диаграмм Эйлера-Венна.
49. Действия над случайными событиями, их геометрическая иллюстрация с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Совместные и несовместные, противоположные события.
50. Комбинаторика: правила суммы и произведения; сочетания, размещения и перестановки, подсчёт их числа.
51. Равновозможные события. Классическое определение вероятности. Частота, относительная частота появления события. Статистическое определение вероятности.
52. Основные свойства вероятности. Условная вероятность события. Зависимые и независимые события. Формулы сложения и умножения вероятностей (для двух событий).
53. Полная группа событий, гипотезы. Формулы полной вероятности,Байеса.
54. Повторные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
55. Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения случайной величины и её основные свойства.
56. Дискретная случайная величина (ДСВ). Ряд распределения, многоугольник распределения, функция распределения ДСВ, их построение.
57. Непрерывная случайная величина (НСВ). Функция плотности распределения, её основные свойства. Представление функции распределения НСВ через функцию плотности распределения.
58. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величин. Основные свойства математического ожидания.
59. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины. Основные свойства дисперсии. Вычисление дисперсии дискретной и непрерывной случайных величин.

60. Основные законы распределения ДСВ (биномиальный, закон Пуассона), их числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия).
61. Равномерный закон распределения НСВ, его числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия).
62. Показательный закон распределения НСВ, его числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия).
63. Нормальный закон распределения НСВ, его числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс). График функции плотности нормального распределения, его особенности.
64. Стандартный нормальный закон распределения. Интеграл Лапласа и его применение для вычисления вероятности попадания нормально распределённой СВ в заданный интервал. Правило «трёх сигм».
65. Неравенства Чебышева. Законы больших чисел в форме Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема ТВ.
66. Предмет математической статистики, её основные задачи. Взаимосвязь математической статистики и теории вероятностей.
67. Генеральная совокупность и выборка. Основные способы организации выборки (повторный и бесповторный отбор). Репрезентативность выборки. Случайная выборка.
68. Вариационный ряд. Медиана и размах выборки, их нахождение. Статистический ряд распределения выборки. Графическое представление выборки: полигон, гистограмма, их построение.
69. Среднее арифметическое выборки, его свойства и вычисление.
70. Дисперсия $\widehat{\sigma}^2$ выборки, её свойства и вычисление. Исправленная дисперсия s^2 выборки. Взаимосвязь дисперсий $\widehat{\sigma}^2$ и s^2.

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

1-10. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\frac{3}{x}-4x^3+\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}\right)dx$; **б)** $\int\frac{\cos 2x dx}{4+\sin 2x}$; **в)** $\int(4x-2)\cos 2x dx$;

г) $\int\frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5}$; **д)** $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx$; **е)** $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$.

Нахождение неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения $f(x)dx$, чтобы получить интегралы (возможно по новой переменной интегрирования) из таблицы основных интегралов (*приложение 6.3*).

Решение.

а) Интеграл вычислим непосредственным интегрированием. Получим:

$$\int\left(\frac{3}{x}-4x^3+\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}\right)dx=3\int\frac{dx}{x}-4\int x^3dx+2\int x^{-4}dx+\int x^{2/5}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\textit{используем}\\ \textit{табличные}\\ \textit{интегралы}\ 1,3\end{array}\right]=3\ln|x|-4\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}+c=$$

$$=3\ln|x|-x^4-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C.$$

Ответ: $3\ln|x|-x^4-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$.

б) Интеграл вычислим методом замены переменной интегрирования. Замену переменной интегрирования x выполним методом подведения функции под знак дифференциала**,** используя для этого таблицу дифференциалов основных элементарных функций (*Приложение 6.3*). Получим:

$$\int\frac{\cos 2x dx}{4+\sin 2x}=\left[\begin{array}{c}\cos 2x dx=\frac{1}{2}d\sin 2x\\ \sin 2x=t\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+4}=\left[\begin{array}{c}\textit{используем}\\ \textit{таличный интеграл}\ 4\\ \textit{по переменной}\ t\end{array}\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t+4|+C = \begin{bmatrix} \textit{выполним} \\ \textit{обратную замену} \\ t = \sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x + 4| + C\ .$$

Замечание. Замену переменной интегрирования в данном интеграле можно выполнить и следующим образом. Положим $t = 4 + \sin 2x$. Тогда $dt = (4+\sin 2x)' dx = 2\cos 2x dx$, откуда $\cos 2x dx = \frac{dt}{2}$. Подставив все это в интеграл, получим:

$$\int \frac{\cos 2x dx}{4+\sin 2x} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x| + C$.

в) Интеграл вычислим методом интегрирования по частям, используя формулу $$\int f(x)dx = \int udv = u\,v - \int vdu\ .$$

Положим: $u = 4x-2$, $dv = \cos 2x dx$. Найдём $du = (4x-2)' dx = 4dx$,

$$v(x) = \int \cos 2x dx = \begin{bmatrix} 2x = t \Rightarrow x = t/2 \\ dx = (t/2)' dt = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin t = [t = 2x] = \frac{1}{2}\sin 2x\ .$$

> Интеграл $\int dv = \int v'(x)dx$ в формуле интегрирования по частям вычисляется с точностью до постоянной, т.е. в качестве функции $v(x)$ выбирается одна из первообразных для функции $v'(x)$.

> Для вычисления интеграла $\int \cos 2x dx$ можно использовать и следующее свойство неопределённого интеграла: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $\int f(x)dx$ - табличный интеграл. В данном случае, так как $\int \cos x dx = \sin x + C$, то $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Тогда, получим:

$$\int (4x-2)\cos 2x dx = (4x-2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 4dx = (2x-1)\sin 2x -$$

$$-2\int \sin 2x dx = (2x-1)\sin 2x - 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = (2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$$

Ответ: $(2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$.

г) Интеграл относится к интегралам вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$. Для его вычисления сначала выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, затем сделаем замену переменной интегрирования. Получим:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5} = \left[\begin{array}{c} x^2-6x+5=(x-3)^2-4 \\ x-3=t \Rightarrow x=3+t \\ dx=(3+t)' dt = dt \end{array}\right] = \int \frac{(3+t)+2}{t^2-4}dt = \int \frac{t+5}{t^2-4}dt =$$

$=[$*представляем интеграл в виде суммы интегралов*$] = \int \frac{tdt}{t^2-4} + 5\int \frac{dt}{t^2-4}$.

Вычислим каждый из интегралов в отдельности: 1) $\int \frac{tdt}{t^2-4} =$

$$= \left[\begin{array}{c} \textit{преобразуем подынтегральное выражение,} \\ \textit{используя таблицу дифференциалов} \\ \textit{и заменим переменную интегрирования} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} tdt = \frac{1}{2}dt^2 = \frac{1}{2}d(t^2-4) \\ t^2-4=z \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = [z=t^2-4] = \frac{1}{2}\ln|t^2-4| + C.$$

Одним из часто выполняемых преобразований является преобразование: $tdt = \frac{1}{2}d(t^2) = \frac{1}{2a}d(at^2) = \frac{1}{2a}d(at^2+b)$, где $a \neq 0$, b - некоторые числа.

2) $\int \frac{dt}{t^2-4} = \int \frac{dt}{t^2-2^2} = \left[\begin{array}{c} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 14 \end{array}\right] = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C.$

Тогда: $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{2}\ln|t^2-4| + 5\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = [t=x-3] =$

$$= \frac{1}{2}\ln|(x-3)^2-4| + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x+5| + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+5\right|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$.

Конечное выражение для неопределённого интеграла записывают, указывая одну из первообразных и добавляя к ней произвольную постоянную C.

д) Интеграл относится к интегралам от рациональных дробей. В данном случае подынтегральная функция является правильной рациональной дробью.

Для вычисления интеграла, сначала разложим дробь на простые дроби: $\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-1}$, где неизвестные постоянные A,B,C найдем методом неопределенных коэффициентов. Для этого выражение в правой части разложения приведем к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3)^2}{(x+3)^2(x-1)}$$

и приравняем числители правой и левой дробей. Получим:

$$5x^2+6x+9=A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3)^2=(A+C)x^2+$$
$$+(2A+B+6C)x+(-3A-B+9C).$$

Два многочлена одинакового порядка равны, тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Приравняв соответствующие коэффициенты этих многочленов, получим систему линейных уравнений относительно A,B,C: $\begin{cases} A+C=5 \\ 2A+B+6C=6 \\ -3A-B+9C=9 \end{cases}$.

Решив систему (например, методоми Гаусса или Крамера), найдем $A=\frac{15}{4}$, $B=-9$, $C=\frac{5}{4}$. Тогда $\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{15}{4(x+3)}-\frac{9}{(x+3)^2}+\frac{5}{4(x-1)}$.

Затем подставим это разложение в исходный интеграл и используем свойство линейности интегралов.

$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, где α,β -некоторые числа.

Получим: $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx=\frac{15}{4}\int\frac{dx}{x+3}-9\int\frac{dx}{(x+3)^2}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-1}$.

Вычислим теперь каждый из интегралов в отдельности:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл}\ \ 4 \end{bmatrix} = \ln|x+3| + C$.

2) $\int \frac{dx}{(x+3)^2} = \int (x+3)^{-2}\, dx = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл}\ \ 2 \end{bmatrix} = \frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x+3} + C$.

3) $\int \frac{dx}{x-1} = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл}\ \ 4 \end{bmatrix} = \ln|x-1| + C$.

Тогда получим: $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx = \frac{15}{4}\ln|x+3| + \frac{9}{x+3} + \frac{5}{4}\ln|x-1| + C$.

Ответ: $\frac{15}{4}\ln|x+3| + \frac{9}{x+3} + \frac{5}{4}\ln|x-1| + C$.

е) Интеграл относится к интегралам вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Вычисление интеграла сводим методом замены переменной интегрирования к вычислению табличных интегралов от новой переменной, с последующей обратной заменой переменной.

Так как для подынтегральной функции $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x}$ выполняется условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то сделаем подстановку $t = tgx$. Получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \Rightarrow x = arctgt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t}dt = \int \left(\frac{1}{t} + t\right)dt = \int \frac{dt}{t} + \int tdt = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличные} \\ \textit{интегралы}\ \ 1,3 \end{bmatrix} = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$=\begin{bmatrix} \text{выполним} \\ \text{обратную замену} \\ t=tgx \end{bmatrix}=\ln|tgx|+\frac{tg^2x}{2}+C.$$

Ответ: $\ln|tgx|+\dfrac{tg^2x}{2}+C$.

11-20. Вычислить определённые интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{3/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **б)** $\displaystyle\int_{-1/2}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$

Определённый интеграл для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, где $F(x)$ -одна из её первообразных, используя для нахождения $F(x)$ все приёмы и методы вычисления неопределённых интегралов.

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются:

1) формула интегрирования по частям $\displaystyle\int_a^b udv=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;

2) формула замены переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx=\begin{bmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ \alpha=\varphi^{-1}(a),\ \beta=\varphi^{-1}(b) \end{bmatrix}=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$ где функция $x=\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$. Часто замена переменной в определённом интеграле выполняется с помощью подстановки $\psi(x)=t$ по формуле: $$\int_a^b f(x)dx=\begin{bmatrix} \psi(x)=t\Rightarrow x=\psi^{-1}(t) \\ dx=(\psi^{-1}(t))'dt \\ \alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b) \end{bmatrix}=\int_\alpha^\beta f(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1}(t))'dt,$$ где функция $\psi(x)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Решение.

а) Первообразная для подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ принадлежит к классу первообразных вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$. С помощью подстановки $x=a\sin t$ (в нашем случае $a=3$) и формулы замены переменной в определенном интеграле получим:

$$\int\limits_0^{3/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=3\sin t \\ dx=(3\sin t)'dt=3\cos tdt \\ 0\le 3\sin t\le\dfrac{3}{2},\ \alpha\le t\le\beta \\ 3\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0 \\ 3\sin\beta=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right]=\int\limits_0^{\pi/6}\frac{(3\sin t)^2\,3\cos tdt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}=$$

$$=9\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{\cos t}dt=9\int\limits_0^{\pi/6}\sin^2 tdt.$$

Для вычисления последнего интеграла используем формулу понижения степени: $\sin^2 t=(1-\cos 2t)/2$. Тогда

$$\int\limits_0^{3/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=9\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/6}(1-\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{9}{2}\left[\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{8}.$$

б) Первообразная для подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{x}{2+\sqrt{2x+1}}$ относится к первообразным вида $\int R\left(x,\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$, где $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots$.- целые числа. С помощью подстановки $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\ldots$ (в нашем случае – подстановки $\sqrt{2x+1}=t$), данный интеграл сводим к интегралу от рациональной функции новой переменной t :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ dx=\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)' dt=t\,dt\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le 0,\quad \alpha\le\sqrt{2x+1}\le\beta\\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\sqrt{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1}=0\\ x=0\Rightarrow\beta=\sqrt{2\cdot 0+1}=1\end{array}\right]=\int_0^1\frac{\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)tdt}{2+t}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^3-t}{t+2}dt.$$

Последний интеграл является интегралом от неправильной рациональной дроби. Для его вычисления, разделим «уголком» числитель на знаменатель и представим подынтегральную функцию $\dfrac{t^3-t}{t+2}$ в виде:

$$\frac{t^3-t}{t+2}=t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}.$$

Тогда

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}+3t-6\ln|t+2|\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-1+3-6\ln 3\right)-\left(0-0+0-6\ln 2\right)\right]=\frac{7}{6}-3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Для нахождения первообразной вида $\int\dfrac{P_n(t)dt}{at+b}$, где $P_n(t)$ - многочлен порядка n, можно использовать также подстановку $at+b=z$.

Ответ: а) $\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{8}$; **б)** $\dfrac{7}{6}-3\ln\dfrac{3}{2}$.

21-30. Вычислить несобственный интеграл I-ого рода $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$ или установить его расходимость.

Решение.

По определению несобственного интеграла имеем $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$. Определенный интеграл, стоящий под знаком предела, вычислим методом замены переменной:

$$\int\limits_0^{b}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=\left[\begin{array}{c} arctgx=t \\ \dfrac{dx}{1+x^2}=dt \\ 0\le x\le b,\alpha\le arctgx\le\beta \\ x=0\Rightarrow\alpha=arctg0=0 \\ x=b\Rightarrow\beta=arctgb \end{array}\right]=\int\limits_0^{arctgb}\sqrt{t}dt=\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{arctgb}=\frac{2}{3}(arctgb)^{3/2}$$

Тогда $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{3}arctgb\right)^{3/2}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

Ответ: Несобственный интеграл сходится и равен $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

31-40.

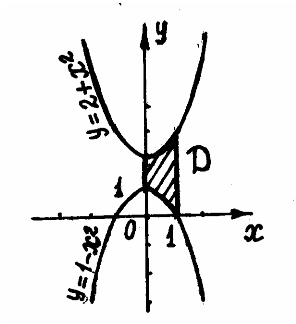
а) Вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями: $y=1-x^2$, $y=2+x^2$, $x=0$, $x=1$.

Площадь фигуры $D=\left\{\begin{array}{c} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{array}\right\}=D_y$, где $f_1(x), f_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $S=\int\limits_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$.

Площадь фигуры $D=\left\{\begin{array}{c} g_1(y)\le x\le g_2(y) \\ c\le y\le d\end{array}\right\}=D_x$ где $g_1(y), g_2(y)$ - непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $S=\int\limits_c^d[g_2(y)-g_1(y)]dy$.

Решение.

1) Изобразим фигуру D:



2) Представим D в виде $D_y = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x^2 \le y \le 2 + x^2 \end{matrix} \right\}$.

Если $D \ne D_y$ или $D \ne D_x$, то фигуру D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом площадь фигуры D находят как сумму площадей её частей.

3) Вычислим площадь:

$$S = \int_0^1 \left(\left(2 + x^2\right) - \left(1 - x^2\right) \right) dx = \int_0^1 \left(1 + 2x^2\right) dx = \left(x + 2\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

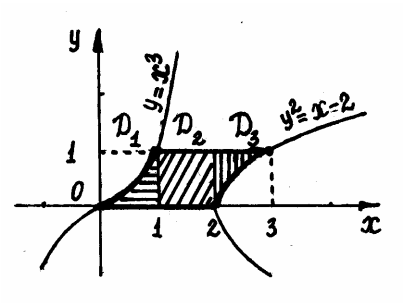
Ответ: $S = 5/3$.

б) Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры D, ограниченной линиями: $y^2 = x - 2$, $y = x^3$, $y = 0$, $y = 1$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $D = \left\{ \begin{matrix} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{matrix} \right\} = D_y$, где $f_1(x), f_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $V_x = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx$.

Решение.

1) Изобразим фигуру D:



2) Представим D в виде D_y.

Если $D \neq D_y$, то фигуру D прямыми, параллельными оси Oy, разбиваем на части, такие, чтобы они имели вид D_y. При этом объём тела, образованного вращением фигуры D находим как сумму объёмов тел, образованных вращением её частей.

Так как это сделать невозможно, то фигуру D разобьём прямыми $x=1$, $x=2$ на три части D_1, D_2, D_3, такие что $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ и представим их в виде D_{1y}, D_{2y}, D_{3y}: $D_1 = D_{1y} = \begin{Bmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^3 \end{Bmatrix}$, $D_2 = D_{2y} = \begin{Bmatrix} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{Bmatrix}$,

$D_3 = D_{3y} = \begin{Bmatrix} 2 \le x \le 3 \\ \sqrt{x-2} \le y \le 1 \end{Bmatrix}$. При этом $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x}$.

3) Вычислим объём тела вращения: $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x}$. Так как

$$V_{1x} = \pi \int_0^1 \left[\left(x^3\right)^2 - 0^2 \right] dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left(\frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{7},$$

$$V_{2x} = \pi \int_1^2 \left(1^2 - 0^2\right) dx = = \pi x \Big|_1^2 = \pi(2-1) = \pi,$$

$$V_{3x} = \pi \int_2^3 \left[1^2 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \right] dx = \pi \int_2^3 (3-x) dx = \pi \left(3x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_2^3 = \pi \left(9 - \frac{9}{2} - 6 + 2 \right) = \frac{\pi}{2}$$

то: $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} = \frac{\pi}{7} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{23\pi}{14}$.

Ответ: $V_x = \frac{23\pi}{14}$.

41-50. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением: $y=\ln\left(1-x^2\right)$, $0\le x\le\dfrac{1}{4}$.

Длина дуги кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$ вычисляется по формуле $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx$.

Решение.

1) Сначала найдём: $y'_x=\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-\dfrac{2x}{1-x^2}$. Тогда

$$1+\left(y'_x\right)^2=1+\left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2=1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2.$$

2) Вычислим длину: $L=\int\limits_0^{1/4}\sqrt{\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int\limits_0^{1/4}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$. Последний интеграл является интегралом от неправильной рациональной дроби. Для его вычисления, разделим «уголком» числитель на знаменатель и представим подынтегральную функцию $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ в виде: $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1+\dfrac{2}{1-x^2}$. Тогда:

$$L=\int\limits_0^{1/4}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx=-\int\limits_0^{1/4}dx-2\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{x^2-1}=-x\Big|_0^{1/4}-2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{1/4}=$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-0\right)-\left(\ln\left|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}\right|-\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right)+=-\frac{1}{4}-\ln\frac{3}{5}=\ln(5/3)-\frac{1}{4}.$$

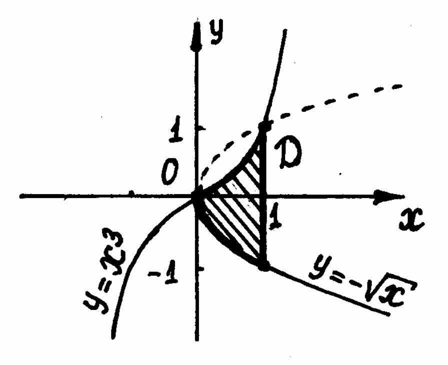
Ответ: $L=\ln(5/3)-\dfrac{1}{4}$.

51-60. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$ по области D, ограниченной линиями: $x=0,\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

Если $D=\left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{matrix}\right\} = D_y$, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. Если $D=\left\{\begin{matrix} \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \\ c \le y \le d \end{matrix}\right\} = D_x$ где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ -непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

Решение.

1) Изобразим область интегрирования D:



2) Представим D в виде D_y: $D = D_y = \left\{\begin{matrix} 0 \le \quad x \le \ 1 \\ -\sqrt{x} \le y \le x^3 \end{matrix}\right\}$.

Если $D \ne D_y$ или $D \ne D_x$, то область D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом двойной интеграл по области D находят как сумму двойных интегралов по её элементарным частям.

3) Вычислим двойной интеграл:

$$\iint_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dy.$$

В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной y, считая переменную x постоянной величиной:

$$\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}(54x^2y^2+150x^4y^4)dy=54x^2\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}y^2dy+150x^4\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}y^4dy=$$

$$=54x^2\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3}+150x^4\left(\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3}=18x^2\left(x^9+x^{\frac{3}{2}}\right)+30x^4\left(x^{15}+x^{\frac{5}{2}}\right)=$$

$$=18x^{11}+18x^{\frac{7}{2}}+30x^{19}+30x^{\frac{13}{2}}.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменной x:

$$\int_0^1\left(18x^{11}+18x^{\frac{7}{2}}+30x^{19}+30x^{\frac{13}{2}}\right)dx=\left(18\frac{x^{12}}{12}+18\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+30\frac{x^{20}}{20}+30\frac{x^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

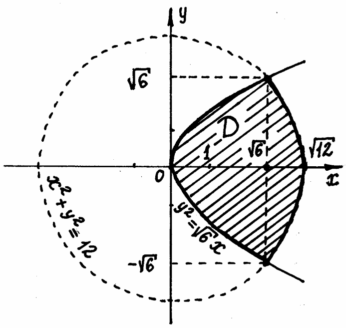
$$=\frac{18}{12}+\frac{36}{9}+\frac{30}{20}+\frac{60}{15}=\frac{3}{2}+4+\frac{3}{2}+4=11.$$

Ответ: $\iint_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=11.$

61-70. Найти площадь (с помощью двойного интеграла) фигуры D, ограниченной линиями: $x^2+y^2=12,\quad x\sqrt{6}=y^2\quad (x\ge 0)$.

Решение.

1) Изобразим фигуру D:



2) Представим D в виде D_x.

В направлении оси Oy область D элементарной не является, т.е. $D \neq D_y$. Если $D \neq D_y$ и $D \neq D_x$, то фигуру D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом площадь фигуры D находят как сумму площадей её частей.

С этой целью составим систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ \sqrt{6}x = y^2 \end{cases}$ и найдем ординаты точек пересечения окружности с параболой. Для этого, исключив переменную x, получим уравнение относительно переменной y: $y^4+6y^2-72=0$. Решив данное уравнение, найдём $y_{1,2}=\pm\sqrt{6}$. Таким образом: $y_1=-\sqrt{6}$, $y_2=\sqrt{6}$ - ординаты точек пересечения окружности с параболой. Тогда $D = D_x = \left\{ \begin{array}{c} y^2/\sqrt{6} \le x \le \sqrt{12-y^2} \\ -\sqrt{6} \le \ y \le \ \sqrt{6} \end{array} \right\}$.

3) Вычислим площадь фигуры D: $S_D = \iint\limits_{D_x} dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}} dx$.

В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной x, считая переменную y постоянной величиной:

$$\int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = (x)\Big|_{y^2/\sqrt6}^{\sqrt{12-y^2}} = \sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt6}.$$

Затем вычислим внешний интеграл по переменной y:

$$\int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt6}\right)dy = \int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\sqrt{12-y^2}\,dy - \frac{1}{\sqrt6}\int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6} y^2 dy.$$

Так как $\int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\sqrt{12-y^2}\,dy = \int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\sqrt{(\sqrt{12})^2-y^2}\,dy = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл}\ 21 \end{bmatrix} =$

$$= \left(\frac{(\sqrt{12})^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{12}}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{(\sqrt{12})^2-y^2}\right)\Bigg|_{-\sqrt6}^{\sqrt6} =$$

$$= \left(6\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{12}}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{12-y^2}\right)\Bigg|_{-\sqrt6}^{\sqrt6} = \left(6\arcsin\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) + \frac{\sqrt6}{2}\cdot\sqrt6\right) -$$

$$-\left(6\arcsin\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right) - \frac{\sqrt6}{2}\cdot\sqrt6\right) = 6\cdot\frac{\pi}{4}+3+6\cdot\frac{\pi}{4}+3 = 3\pi+6;$$

$\int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6} y^2 dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt6}^{\sqrt6} = \left(\frac{6\sqrt6}{3} - \left(-\frac{6\sqrt6}{3}\right)\right) = 4\sqrt6$, то $\int\limits_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt6}\right)dy =$

$= 3\pi + 6 - \frac{1}{\sqrt6}\cdot 4\sqrt6 = 3\pi + 2$. Тогда $S_D = 3\pi + 2$.

Ответ: $S_D = 3\pi + 2$.

71-80. Установить тип ДУ первого порядка и найти его общее решение.

а) $(2-y^2)\,y' + 2(y^2x + x) = 0$ **б)** $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

Решение.

Тип ДУ первого порядка устанавливают по форме его записи.

а) Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно записать в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 .$$

Действительно, осуществив в исходном уравнении замену $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и умножив его затем на dx, получим: $2x\left(y^2+1\right)dx + \left(2-y^2\right)dy = 0$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными.

Нахождение общего решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$, путём деления обеих его частей на $Q_1(y)P_2(x)$, сводится к интегрированию уравнения с разделёнными переменными $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, где $P(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, $Q(y) = \dfrac{Q_2(y)}{Q_1(y)}$, общее решение которого записывается в виде $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$.

Разделим обе части уравнения $2x\left(y^2+1\right)dx + \left(2-y^2\right)dy = 0$ на множитель (y^2+1), получим ДУ с разделёнными переменными: $2xdx + \dfrac{2-y^2}{y^2+1}dy = 0$.

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$$\int 2xdx + \int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = C \text{, где } C \text{ - произвольная постоянная.}$$

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка должно обязательно содержать одну произвольную постоянную.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int 2xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2,$$

$$\int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = \int \frac{3-(y^2+1)}{y^2+1}dy = \int\left(\frac{3}{y^2+1} - 1\right)dy = 3\int \frac{dy}{y^2+1} - \int dy = 3arctgy - y$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения запишется в виде:

$$3arctgy - y + \frac{x^2}{2} = C .$$

Ответ: $3arctgy - y + \dfrac{x^2}{2} = C$, где C - произвольная постоянная.

б) Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как его можно записать в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Действительно, выполнив преобразования: $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(2y-3x) = 3y - 4x \Rightarrow y' = \frac{3y-4x}{2y-3x}, \text{ получим } y' = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)-4}{2\left(\frac{y}{x}\right)-3} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

При выполнении преобразований однородного ДУ первого порядка к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ следует учесть, что $\frac{dy}{dx} = y'$.

Нахождение общего решения однородного ДУ первого порядка с помощью подстановки $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$ или $dy = udx + xdu$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная функция, сводится к нахождению общего решения ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$ с последующей заменой $u = \frac{y}{x}$.

С помощью подстановки $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$ уравнение $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ или $y' = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)-4}{2\left(\frac{y}{x}\right)-3}$ приведём к ДУ с разделяющимися переменными вида $P_1(x)Q_1(u)du + P_2(x)Q_2(u)du = 0$ относительно новой неизвестной функции $u(x)$. Получим:

$$u + xu' = \frac{3u-4}{2u-3} \Rightarrow xu' = \frac{3u-4}{2u-3} - u = \frac{-2u^2+6u-4}{2u-3} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{учитываем, что} \\ u' = \dfrac{du}{dx} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$xdu + \frac{2u^2 - 6u + 4}{2u-3}dx = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Сведём его, разделив обе части уравнения на множитель $x \cdot \left(\dfrac{2u^2 - 6u + 4}{2u - 3} \right)$ к уравнению с разделёнными переменными. Получим:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u-3}{2u^2 - 6u + 4} du = 0 .$$

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(2u-3)du}{2u^2 - 6u + 4} = C \text{ , где } C \text{ - произвольная постоянная.}$$

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|;$$

$$\int \frac{(2u-3)du}{2u^2 - 6u + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{(2u-3)du}{u^2 - 3u + 2} = \begin{bmatrix} \textit{выделим в знаменателе полный квадрат} \\ u^2 - 3u + 2 = (u - 3/2)^2 - 1/4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2u-3)du}{(u-3/2)^2 - 1/4} = \begin{bmatrix} \textit{сделаем замену} \\ u - 3/2 = t \Rightarrow u = t + 3/2 \\ du = (t + 3/2)' dt = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int \frac{2(t+3/2) - 3}{t^2 - 1/4} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2t + 3 - 3)dt}{t^2 - 1/4} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 - 1/4} = \begin{bmatrix} \textit{сделаем замену} \\ 2tdt = d(t^2) = d(t^2 - 1/4) \\ t^2 - 1/4 = z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|z| = \left[z = t^2 - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \ln|t^2 - 1/4| = \left[t = u - \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} \ln\left| \left(u - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u^2 - 3u + 2| .$$

Тогда общее решение последнего дифференциального уравнения запишется в виде: $\ln|x| + \dfrac{1}{2} \ln|u^2 - 3u + 2| = C$ или $\begin{bmatrix} \textit{используя} \\ \textit{свойства} \\ \textit{логарифмов} \end{bmatrix}$ в виде:

$x^2 \cdot (u^2 - 3u + 2) = C_1$, где $\pm e^{2C} = C_1$ - новая произвольная постоянная.

Теперь в найденном решении вернёмся к старой неизвестной функции $y(x)$, выполнив обратную замену $u = y/x$. В итоге получим:

$$x^2 \cdot \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 3\frac{y}{x} + 2 \right) = C_1 \quad \text{или} \quad y^2 - 3xy + 2x^2 = C_1.$$

Ответ: $y^2 - 3xy + 2x^2 = C_1$, где C_1 - произвольная постоянная.

81-90. Установить тип ДУ, найти его общее и частное решения, если:

$$y' - 3x^2 y = x^2, \ y(0) = 0.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка, так как его можно записать в виде $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x) = -3x^2$, $q(x) = x^2$.

Общее решение ЛДУ первого порядка находится с помощью подстановки $y = u\,v$, где $u(x)$, $v(x)$ - новые неизвестные функции. Одну из них, например $u(x)$, находят в виде $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x)$, тогда другую неизвестную функцию $v(x)$ находят в виде общего решения ДУ: $v'(x) = \dfrac{q(x)}{u(x)}$. В итоге будет найдено и общее решение исходного уравнения в виде $y = u\,v$

Частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ получают из общего решения данного уравнения при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$. Находят C_0 как решение уравнения, получаемого подстановкой в общее решение начального условия.

Сначала найдем общее решение линейного ДУ первого порядка. Его ищем в виде $y = u\,v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

Функцию $u(x)$ найдём в виде $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x) = -3x^2$. Вычислив интеграл, получим $\int p(x)dx = -3\int x^2 dx = -3 \cdot \dfrac{x^3}{3} = -x^3$. Тогда $u(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{x^3}$.

Простейшим ДУ первого порядка называется уравнение вида $y'(x) = f(x)$. Общее решение такого уравнения находится интегрированием и записывается в виде $y(x) = \int f(x)dx + C$.

Функцию $v = v(x)$ найдём как общее решение ДУ: $v'(x) = \dfrac{q(x)}{u(x)}$, где $u(x) = e^{x^3}$, $q(x) = x^2$. Данное уравнение $v'(x) = x^2\, e^{-x^3}$ является простейшим ДУ первого порядка. Его общее решение найдём интегрированием и запишем в виде $v(x) = \int x^2 e^{-x^3}\, dx + C$. Вычислив интеграл (с точностью до постоянной), получим:

$$\int x^2 e^{-x^3}\, dx = \left[\begin{array}{c} \textit{сделаем замену} \\ x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = -\frac{1}{3} d(-x^3) \\ -x^3 = t \end{array}\right] = -\frac{1}{3}\int e^t\, dt = -\frac{1}{3} e^t =$$

$$= \left[t = -x^3\right] = -\frac{1}{3}\, e^{-x^3}.$$

Таким образом $v(x) = -\dfrac{1}{3} e^{-x^3} + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = u\,v = e^{x^3} \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C\right) = Ce^{x^3} - \frac{1}{3}.$$

Теперь найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$. Его получим из общего решения $y = Ce^{x^3} - \dfrac{1}{3}$ при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$, которое найдём из уравнения, полученного подстановкой начального условия $y(0) = 0$ в общее решение. В результате получим: $0 = Ce^{0^3} - \dfrac{1}{3} \Rightarrow C = C_0 = \dfrac{1}{3}$. Тогда частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, запишется в виде:

$$y = \frac{1}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(e^{x^3} - 1\right).$$

Ответ: $y = Ce^{x^3} - \dfrac{1}{3}$ - общее решение; $y = \dfrac{1}{3}\left(e^{x^3} - 1\right)$ частное решение.

91-100. Требуется найти**:**

а) общее решение простейшего ДУ порядка n: $y'' = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

б) общее и частное решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 5y' - 6 = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0;$$

в) общее решение линейного ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида: $y''+4y'+4y = 50\cos x$.

Решение.

Общее решение простейшего ДУ n-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ находят, выполняя последовательно n интегрирований, и записывают в виде:

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

Общее решение дифференциального уравнения порядка n должно обязательно содержать n разных произвольных постоянных.

а) Данное уравнение дважды проинтегрируем.

После первого интегрирования получим: $y' = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + C_1$. Интеграл вычислим (с точностью до постоянного слагаемого) методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{array} \right] = \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.$$ Тогда $y' = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1$.

После второго интегрирования получим:

$$y = \int (2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1)dx + C_2 = 2\int \sqrt{x}\ln x dx - 4\int \sqrt{x}\, dx + C_1 \int dx + C_2.$$

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого). Получим:

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \left[\begin{array}{c}\text{вычислим}\\ \text{методом}\\ \text{интегрирования}\\ \text{по частям}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}\\ dv=\sqrt{x}dx \Rightarrow v=\int\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{array}\right] =$$

$$\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}\cdot x^{3/2};$$

$\int\sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$; $\int dx = x$.

Тогда $y = 2\cdot\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}\right) - 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C_1x + C_2 =$

$$= \frac{4}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{32}{9}x^{3/2} + C_1x + C_2 .$$

Ответ: $y = \frac{4}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{32}{9}x^{3/2} + C_1x + C_2$.

Общее решение однородного линейного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $ay'' + by' + cy = 0$ имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где $\{y_1, y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений; C_1, C_2 -произвольные постоянные.

Фундаментальная система решений $\{y_1, y_2\}$ строится на основе характера корней характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. А именно: **1)** если λ_1, λ_2 - пара различных действительных корней характеристического уравнения, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$; **2)** если λ_1, λ_2 - пара одинаковых $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$ действительных корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$; **3)** если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.

Корни характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, являющегося квадратным, находят на множестве комплексных чисел по формулам:

1) если дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac \ge 0$, то $\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

2) если дискриминант уравнения $D<0$, то $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$.

б) Сначала найдём общее решение ДУ в виде: $y=C_1y_1+C_2y_2$, где $\{y_1,y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений.

Для нахождения ФСР, составим характеристическое уравнение $\lambda^2-5\lambda-6=0$ для данного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25+24=49\geq 0$, то $\lambda_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 7}{2}\Rightarrow$ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=6$, т.е. характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Следовательно, ФСР имеет вид $\left\{e^{-x},e^{6x}\right\}$.

Тогда общее решение данного ДУ запишется в виде: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$.

Теперь найдём частное решение данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Для этого сначала найдём производную $y'(x)$ общего решения: $y'=(C_1e^{-x}+C_2e^{6x})'=-C_1e^{-x}+6C_2e^{6x}$. Затем подставим начальные данные в выражения для общего решения и его производной, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1e^{-0}+C_2e^{6\cdot 0}=1 \\ -C_1e^{-0}+6C_2e^{6\cdot 0}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1+6C_2=0 \end{cases}.$$

Решив систему, найдём: $C_1=6/7$, $C_2=1/7$. Тогда частное решение данного ДУ запишется в виде: $y=\frac{6}{7}e^{-x}+\frac{1}{7}e^{6x}$.

Ответ:

Общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; частное решение: $y=\frac{6}{7}e^{-x}+\frac{1}{7}e^{6x}$.

Общее решение неоднородного ЛДУ 2-го порядка $ay''+by'+cy=f(x)$ имеет вид $y=y_0+\tilde{y}$, где $y_0=C_1y_1+C_2y_2$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения.

Частное решение $\widetilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется *методом неопределённых коэффициентов* в виде $\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0, 1, 2, 3, \ldots$ соответственно являются: a, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $ax^3 + bx^2 + cx + d$,…. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\widetilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ равно сумме частных решений $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями f_1, f_2 (*принцип наложения решений*).

в) Общее решение данного ДУ найдём в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \widetilde{y}$, где $\{y_1, y_2\}$ - фундаментальная система частных решений соответствующего ему однородного ДУ: $y'' + 4y' + 4y = 0$ **;** $\widetilde{y}$ **-** какое-нибудь частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения.

Сначала найдём ФСР $\{y_1, y_2\}$ соответствующего однородного ДУ $y'' + 4y' + 4y = 0$**.** Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ для данного однородного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 16 - 16 = 0 \geq 0$, то $\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2\cdot 1} = \dfrac{-4}{2} \Rightarrow$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, т.е. характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня. Следовательно, ФСР имеет вид $\left\{e^{-2x}, xe^{-2x}\right\}$.

Затем найдём частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' + 4y' + 4y = 50\cos x$**,** имеющего правую часть специального вида $f(x) = 50\cos x = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$, где $\alpha = 0$, $\beta = 1$,

$P_m(x) = 50 \Rightarrow m = 0$, $Q_\ell(x) \equiv 0 \Rightarrow \ell = 0$. Частное решение найдём в виде $\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. В данном случае: 1) число $\lambda = \alpha + i\beta = 0 + i\cdot 1 = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 0$; 2) $N = \max\{m, l\} = \max\{0, 0\} = 0$, поэтому $S_N(x) = S_0(x) = a$, $T_N(x) = T_0(x) = b$, где a, b - неизвестные постоянные, подлежащие определению. Таким образом, частное решение с неизвестными постоянными запишется в виде:

$$\tilde{y} = x^0 e^{0\cdot x}\left[a\cos(1\cdot x) + b\sin(1\cdot x)\right] = a\cos x + b\sin x.$$

Для определения значений постоянных a и b, найдём производные $\tilde{y}', \tilde{y}''$ и подставим выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ вместо y, y', y'' в неоднородное уравнение $y''+4y'+4y = 50\cos x$. Учитывая, что:

$$\tilde{y}' = (a\cos x + b\sin x)' = -a\sin x + b\cos x,$$

$$\tilde{y}'' = (\tilde{y}')' = (-a\sin x + b\cos x)' = -a\cos x - b\sin x,$$

получим:

$$-a\cos x - b\sin x + 4\cdot(-a\sin x + b\cos x) + 4\cdot(a\cos x + b\sin x) = 50\cos x \Rightarrow$$

$$(3a + 4b)\cos x + (-4a + 3b)\sin x = 50\cos x.$$

Приравняв, в правой и левой части полученного равенства, постоянные коэффициенты, стоящие при одинаковых функциях, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a и b: $\begin{cases} 3a + 4b = 50 \\ -4a + 3b = 0 \end{cases}$. Решив систему, найдём: $a = 6$, $b = 8$. Частное решение $\tilde{y}$ запишется тогда в виде: $\tilde{y} = 6\cos x + 8\sin x$.

Теперь запишем общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 6\cos x + 8\sin x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 6\cos x + 8\sin x$.

101-110. Исследовать на сходимость ряды и указать применяемые признаки:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{10n^2 + 1}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n\text{-}2)}{(2n)!}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$.

Если общий член u_n числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ представляет собой отношение многочленов или алгебраических функций относительно аргумента n, то исследование его на сходимость следует начинать с проверки необходимого признака сходимости. Если он не выполняется, то ряд расходится, в противном случае проводят дополнительное исследование на сходимость, используя предельный признак сравнения, где в качестве ряда сравнения выбирают обобщённый гармонический ряд.

Если в выражение общего члена u_n числового ряда входят: $n!$, a^n, то для исследования его на сходимость следует применить признак Даламбера. Если выражение для u_n можно представить в виде $u_n = f(n) = (g(n))^n$, то для исследования ряда на сходимость следует применить радикальный признак Коши.

Решение.

а) Для данного ряда проверим сначала выполнение необходимого признака сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (если он не выполняется, то ряд расходится). Получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{10n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2\left(10+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}\left(10+\frac{1}{n^2}\right)} = \left[\frac{1}{\infty\cdot(10+0)}\right] = 0.$$ Так как необходимый признак сходимости выполняется, то требуется дополнительное исследование ряда на сходимость.

Используем для исследования на сходимость предельный признак сравнения. В качестве ряда сравнения выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, который сходится, как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ с показателем степени $p = 3/2 > 1$.

При выборе в качестве ряда сравнения обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ руководствуются следующим, если $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{A}{n^{\alpha}}$, где $A \neq 0$ - некоторое число, то ряд сравнения имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Тогда, по предельному признаку сравнения, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{\sqrt{n}}{10n^2+1}\right)}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n^{3/2}}{10n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{10n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{10} \neq 0,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ или одновременно сходятся, или одновременно расходятся. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}$ также сходится.

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}$ сходится по предельному признаку сравнения.

При исследовании рядов на сходимость следует иметь в виду следующие предельные значения функций: $\ln(+0) = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$, $arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & при \quad a > 1 \\ 0 & при \quad 0 < a < 1 \end{cases}$, $a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & при \quad a > 1 \\ +\infty & при \quad 0 < a < 1 \end{cases}$, а также известные пределы: $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$ ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$),

$\lim_{n\to\infty}(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0 & \text{если } k<m\\ a_0/b_0 & \text{если } k=m\\ \infty & \text{если } k>m\end{cases},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.72$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

б) Данный ряд исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$, где

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1)}{(2n+2)!}\right)}{\left(\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n)!}\right)}=\frac{(1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1))\cdot(2n)!}{(1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2))\cdot(2n+2)!}.$$ В полученном для $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ выражении выполним преобразование с факториалом $(2n+2)!=(2n)!(2n+1)(2n+2)$ и сократим числитель и знаменатель на общие множители. Получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=0=L$.

Так как $L=0<1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

Ответ: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n\text{-}2)}{(2n)!}$ сходится по признаку Даламбера..

в) Данный ряд исследуем на сходимость по радикальному признаку Коши. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$, где

$$\sqrt[n]{u_n}=(u_n)^{\frac{1}{n}}=\left(n^4arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=n^{\frac{4}{n}}\cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$ С учётом известного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{4}{n}}\cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sqrt[n]{n})^4\cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right]=1^4\cdot arctg0=0=L$. Так как $L=0<1$, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\, arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ сходится по радикальному признаку Коши.

111-120. Найти интервал, радиус и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$.

Интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ обычно находят решая неравенство $L(x) < 1$, где $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$, $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$, R - радиус сходимости.
Областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, к которому присоединяются точки $x_0 \pm R$, если в них ряд сходится. Для исследования сходимости ряда на концах интервала сходимости обычно применяют признаки сравнения (для рядов с положительными членами) и признак Лейбница (для знакочередующихся рядов).

Решение.

1) Найдём интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ сходимости степенного ряда. Для этого сначала вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)\cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right| = |(x+1)| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right| = |x+1| \lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}} =$$

$|x+1| \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}} = |x+1|\cdot\frac{1}{(1+0)^{3/2}} = |x+1| = L(x)$. Затем решим неравенство $L(x) = |x+1| < 1$. Полученное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+1<1 \\ -(x+1)<1 \end{cases}$, откуда: $-2<x<0$. Таким образом, интервалом сходимости данного ряда является интервал $(-2,0)$.

2) Радиус $R \geq 0$ сходимости степенного ряда найдём, учитывая, что интервалом его сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $x_0 = -1$, является интервал $(-2,0)$, т.е. из условия $(-1-R, -1+R) = (-2,\ 0)$ или $\begin{cases} -1-R=-2 \\ -1+R=0 \end{cases}$. Откуда $R=1$.

3) Для нахождения области сходимости степенного ряда исследуем его сходимость на концах интервала сходимости $(-2,0)$, т.е. в точках $x=-2$ и $x=0$.

При $x=-2$ получим знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. Исследуем его на сходимость по признаку Лейбница.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, где $u_n > 0$, сходится, если: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$; 2) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ (может выполняться начиная с номера $n = n_0$).

Для этого проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$; 2) $\dfrac{1}{1\sqrt{1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}} > \dfrac{1}{3\sqrt{3}} > \ldots$. Оба условия выполняются и, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница.

При $x=0$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, являющийся обобщенным гармоническим рядом с показателем степени $p = 3/2$. Так как $p = 3/2 > 1$, то этот ряд сходится.

Таким образом, в точках $x=-2$ и $x=0$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится и тогда областью его сходимости является промежуток $[-2,0]$.

Ответ: Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$: $(-2,0)$ - интервал сходимости; $R=1$ - радиус сходимости; $[-2,0]$ - область сходимости.

121-130. Требуется найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $y=f(x)=\frac{x}{x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=x_0=1$;

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называется степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots.$$

Решение.

Найдём сначала первые три отличные от нуля производные функции $f(x)$ в точке $x_0=1$: $f^{(0)}(1)=f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$,…. Получим:

$$f^{(0)}(1)=f(1)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}\neq 0;$$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+2}\right)'=\frac{(x)'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(1)=\frac{2}{(1+2)^2}=\frac{2}{9}\neq 0;$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{2}{(x+2)^2}\right)'=-2\cdot\frac{\left((x+2)^2\right)'}{(x+2)^4}=-2\cdot\frac{2(x+2)(x+2)'}{(x+2)^4}=$$

$$=-2\cdot\frac{2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4}=-\frac{4}{(x+2)^3}\ \Rightarrow\ f''(1)=-\frac{4}{(1+2)^3}=-\frac{4}{27}\neq 0.$$

Теперь подставим найденные ненулевые значения производных в ряд Тейлора функции $f(x)=\frac{x}{x+2}$ в окрестности точки $x=1$ и получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x+1)^n\approx\frac{1}{3}+\frac{(2/9)}{1!}(x+1)+\frac{(-4/27)}{2!}(x+1)^2=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(x+1)-\frac{2}{27}(x+1)^2.$$

Ответ: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(x+1)-\frac{2}{27}(x+1)^2$.

131-140. Требуется разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$ определённую следующим образом: $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ (в ответе указать первые пять отличные от нуля члена ряда) и построить график функции $f(x)$.

Разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ - кусочно-монотонной и непрерывной на промежутке $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, во всякой точке её непрерывности имеет вид:
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
где коэффициенты a_n и b_n определяются формулами:
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n=0,1....; \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ n=1,2....$$

Решение:

1) Найдём коэффициенты ряда Фурье: $a_n \ (n=0,1,2,\ldots)$ и $b_n \ (n=1,2,\ldots)$:
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$
$$a_n=(n=1,2,\ldots)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx=$$
[*для вычисления интегралов применим метод интегрирования по частям*]
$$=\left[\begin{array}{c} u=x \Rightarrow du=(x)'dx=dx \\ dv=\cos nxdx \Rightarrow v=\int \cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\textit{учитываем, что}\\ \sin(n\pi)=\sin(-n\pi)=0\\ \cos(n\pi)=\cos(-n\pi)=(-1)^n\\ \sin(2n\pi)=0,\ \cos(2n\pi)=1\end{array}\right]=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi\, n^2};$$

$$b_n=(n=1,2,\ldots)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=$$

[*для вычисления интегралов применим метод интегрирования по частям*]

$$=\left[\begin{array}{c}u=x\Rightarrow du=(x)'dx=dx\\ dv=\sin nxdx\Rightarrow v=\int\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\left[\begin{array}{c}\textit{учитываем, что}\\ \sin(n\pi)=\sin(-n\pi)=0\\ \cos(n\pi)=\cos(-n\pi)=(-1)^n\\ \sin(2n\pi)=0,\ \cos(2n\pi)=1\end{array}\right]=0.$$

Таким образом, получили, что:

$$a_0=\pi,\quad a_n=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi\, n^2}\ \ (n=1,2,\ldots),\quad b_n=0\ \ (n=1,2,\ldots).$$

2) Запишем разложение 2π -периодической функции $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

в ряд Фурье: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx$.

Полученное равенство имеет смысл во всех точках.

Если 2π -периодическая функция имеет точки разрыва 1-го рода, то: *полученное равенство имеет смысл во всех точках, кроме точек её разрыва.*

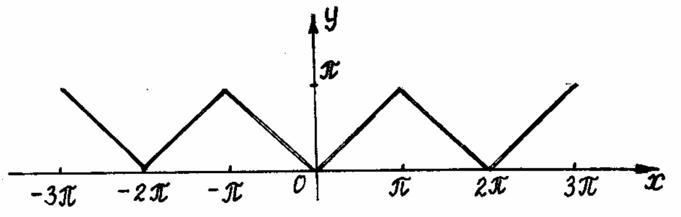
3) Запишем разложение, указав в нём первые пять ненулевых членов ряда Фурье. Для этого вычислим первые пять ненулевых коэффициента ряда Фурье: $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots : a_0=\pi\ne 0$, $a_1=\dfrac{2((-1)^1-1)}{\pi 1^2}=-\dfrac{4}{\pi}\ne 0$, $b_1=0$,

$a_2=\dfrac{2((-1)^2-1)}{\pi 2^2}=0$, $b_2=0$, $a_3=\dfrac{2((-1)^3-1)}{\pi 3^2}=-\dfrac{4}{9\pi}\ne 0$, $b_3=0$,

$a_4=\dfrac{2((-1)^4-1)}{\pi 4^2}=0$, $b_4=0$, $a_5=\dfrac{2((-1)^5-1)}{\pi 5^2}=-\dfrac{4}{25\pi}\ne 0$, $b_5=0$,

$a_6=\dfrac{2((-1)^6-1)}{\pi 6^2}=0$, $b_6=0$, $a_7=\dfrac{2((-1)^7-1)}{\pi 7^2}=-\dfrac{4}{49\pi}\ne 0$. Таким образом, первыми пятью ненулевыми коэффициентами ряда Фурье являются коэффициенты $a_0=\pi$, $a_1=-\dfrac{4}{\pi}$, $a_3=-\dfrac{4}{9\pi}$, $a_5=-\dfrac{4}{25\pi}$, $a_7=-\dfrac{4}{49\pi}$ и разложение 2π -периодической функции $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$ в ряд Фурье имеет вид: $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cos x-\dfrac{4}{9\pi}\cos 3x-\dfrac{4}{25\pi}\cos 5x-\dfrac{4}{49\pi}\cos 7x+\ldots$.

4) Построим график 2π -периодической функции $f(x)$:



Ответ: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\frac{4}{49\pi}\cos 7x+\ldots$

141-150. Требуется найти вероятность указанного события, используя ***классическое определение*** вероятности.

а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одного из кубиков появится шестерка.

При классическом определении вероятность случайного события A определяется равенством: $P(A)=\frac{m(A)}{n}$, где $m(A)$ - число элементарных (далее неделимых и взаимно исключающих друг друга) исходов эксперимента, благоприятных появлению события A; n - общее число равновозможных элементарных исходов эксперимента. Равновозможность элементарных исходов обеспечивается такими условиями проведения эксперимента (опыта, испытания), при выполнении которых можно считать, что ни один из исходов не является объективно более возможным, чем другие.

Если событие A определяется словами «хотя бы один…», то непосредственное нахождение $P(A)$ по формуле классического определения вероятности приводит обычно к громоздким вычислениям. Проще сначала найти вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A и определяемого словами «ни один…», а затем, используя формулу для вероятностей противоположных событий: $P(A)=1-P(\overline{A})$, вычислить вероятность искомого события.

Для нахождения вероятности события по формуле $P(A)=\frac{m(A)}{n}$ необходимо:

1) Рассмотреть событие A, вероятность которого следует найти.

2) Правильно определить, что является в данном испытании элементарным исходом.

3) Найти общее число n элементарных исходов, предварительно выписав их все непосредственно. Если выписать все элементарные исходы не представляется возможным из-за их чрезмерного количества, то при подсчете их числа используют правила и формулы комбинаторики.

4) Установить какое число $m(A)$ элементарных исходов данного испытания благоприятствуют появлению события A.

Решение.

Рассмотрим событие $A=\{$**сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одного из кубиков появится шестерка**$\}$.

Элементарными исходами данного испытания (подбрасывание двух игральных кубиков) являются всевозможные комбинации очков: $1, 2, 3, 4, 5, 6$, которые могут появиться на верхних гранях двух кубиков.

Общее число элементарных исходов n данного испытания найдём, используя правило умножения комбинаторики.

> Пусть α_1, α_2 – действия из некоторого конечного множества действий.
>
> ***Правило умножения.*** Если действие α_1 можно выполнить n_1 способами и, после каждого такого выполнения, действие α_2 можно выполнить n_2 способами, то последовательное выполнение пары действий α_1 и α_2 можно осуществить $n=n_1\cdot n_2$ способами.

На каждом игральном кубике 6 граней, поэтому возможны шесть исходов бросания каждого из них. Если испытание представить в виде последовательно выполняемых подбрасываний кубиков, то первое подбрасывание можно выполнить $n_1=6$ способами, второе подбрасывание - $n_2=6$ способами, тогда последовательно выполняемое подбрасывание двух кубиков можно осуществить $n=n_1\cdot n_2=6\cdot 6=36$ способами.

> Общее число элементарных исходов n можно найти и, выписав непосредственно все возможные исходы испытания:
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
> | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
> | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
> | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
> | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
> | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6). |

Теперь найдём число элементарных исходов $m(A)$ данного испытания, благоприятных событию A, выписав их непосредственно. Такими исходами, очевидно, являются: (2,6); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6). Их число $m(A)=5$.

Тогда искомая вероятность $P(A)=\dfrac{5}{36}\approx 0.139$.

Ответ: $P(A)=\dfrac{5}{36}\approx 0.139$.

б) В урне находятся 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом из урны вынимают 4 шара. Найти вероятности того, что среди вынутых шаров окажутся: «2 белых шара»; «не более одного белого шара»; «хотя бы один белый шар».

Решение.

Рассмотрим события: $A=${**среди четырёх вынутых шаров - 2 белых**}, $B=${**среди четырёх вынутых шаров – не более одного белого шара**}, $C=${**среди четырёх вынутых шаров - хотя бы один белый шар**}.

Элементарными исходами данного испытания (случайное вынимание четырех шаров) являются всевозможные комбинации по 4 шара из находящихся в урне 11 шаров.

Для подсчёта общего числа элементарных исходов n данного испытания и чисел $m(A), m(B), m(C)$ элементарных исходов, благоприятных событиям A, B, C, используем правила и формулы комбинаторики.

Пусть α_1, α_2 – действия из некоторого конечного множества действий.

Правило сложения. Если действие α_1 можно выполнить n_1 способами, действие α_2 - другими n_2 способами, отличными от первых n_1, то выполнение одного из действий: или α_1, или α_2 (но не двух одновременно) можно осуществить $n=n_1+n_2$ способами.

Сочетаниями из n ***элементов по*** m называются всевозможные комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только составом элементов. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в одновременном неупорядоченном выборе без возвращения m элементов из n различных элементов, а их общее число C_n^m определяется формулой:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!},\quad \text{где } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n,\qquad 0!=1.$$

Общее число элементарных исходов n данного испытания, очевидно, равно числу всевозможных неупорядоченных комбинаций по 4 шара из находящихся в урне 11 шаров, т.е. числу сочетаний C_{11}^4. Тогда:

$$n=C_{11}^4=\frac{11!}{4!\cdot(11-4)!}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!}=330.$$

Подсчитаем теперь число элементарных исходов $m(A), m(B), m(C)$ благоприятных событиям A, B, C, соответственно.

Событие $A = \{$**среди четырёх вынутых шаров - 2 белых**$\}$ означает, что среди вынутых шаров – «2 белых и 2 черных шара». Следовательно, благоприятными событию A являются всевозможные комбинации по 4 шара (два белых и два черных шара) из находящихся в урне 11 шаров. Их число $m(A)$ найдём, используя правило умножения комбинаторики. Представим для этого выбор четырёх шаров в виде двух последовательно выполняемых действий: сначала выбор двух белых шаров из имеющихся в урне 6 белых шаров и затем выбор двух чёрных шаров из имеющихся в урне 5 чёрных шаров. Получим: $m(A) = C_6^2 \cdot C_5^2 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} \cdot \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 15 \cdot 10 = 150$. Тогда: $P(A) = \dfrac{150}{330} \approx 0.455$

Событие $B = \{$**среди четырёх вынутых шаров – не более одного белого шара**$\}$ означает, что среди вынутых шаров - или «один белый и три черных шара», или «четыре чёрных шара». Следовательно, благоприятствующими событию B являются всевозможные комбинации по 4 шара (один белый и три черных или четыре черных шара) из находящихся в урне 11 шаров. Их число $m(B)$ найдём, используя правила сложения и умножения комбинаторики. Сначала, используя правило умножения комбинаторики, найдём число способов выбрать один белый и три черных шара. Получим $C_6^1 \cdot C_5^3 = \dfrac{6!}{1!\cdot 5!} \cdot \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 6 \cdot 10 = 60$. Затем, используя правило умножения комбинаторики, найдём число способов выбрать 4 чёрных шара. Получим $C_5^4 = \dfrac{5!}{4!\cdot 1!} = 5$. Теперь, используя правило сложения комбинаторики, найдём число $m(B)$ способов выбрать или один белый и три чёрных шара, или четыре чёрных шара. Получим $m(A) = C_6^1 \cdot C_5^3 + C_5^4 = 60 + 5 = 65$. Тогда $P(B) = \dfrac{65}{330} \approx 0.197$.

Событие $C = \{$**среди четырёх вынутых шаров-хотя бы один белый шар**$\}$ определяется словами «хотя бы один…». Прямое решение задачи, учитывая, что событие C означает, среди вынутых шаров: или «один белый и три черных шара», или «два белых и два черных шара», или «три белых и один черный шар», или «четыре белых шара», приводит к громоздким вычислениям. Поэтому сначала найдём вероятность противоположного события $\overline{C}$ =$\{$**среди вынутых четырёх шаров нет ни одного белого шара, т.е. все шары – черные**$\}$. Получим $m(\overline{C}) = C_5^4 = 5$, тогда $P(\overline{C}) = \dfrac{m(\overline{C})}{n} = \dfrac{5}{330}$. Затем по формуле $P(C)=1-P(\overline{C})$ найдём вероятность искомого события: $P(C)=1-\frac{5}{330}=\frac{325}{330}\approx 0.985$.

Ответ: $P(A)=\frac{150}{330}\approx 0.455$; $P(B)=\frac{65}{330}\approx 0.197$; $P(C)=\frac{325}{330}\approx 0.985$.

151-160. Требуется:
а) найти вероятности указанных событий, используя: ***<u>формулы сложения и умножения вероятностей;</u>***
б) найти вероятность указанного события, используя ***<u>формулу Бернулли</u>***.

а) Экзаменационная сессия состоит из трёх экзаменов. Студент оценивает свои шансы успешно сдать экзамены следующим образом: вероятность сдать первый экзамен - 0.8, второй – 0.9, третий – 0.7. Найти вероятности того, что студентом будут успешно сданы: «все три экзамена», «по крайней мере два экзамена», «хотя бы один экзамен». Предполагается, что сдача экзаменов – независимые события.

Сложным называют событие, наблюдаемое в эксперименте и выражаемое через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций над событиями.

Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется с помощью *формул умножения вероятностей*:

1) $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$, $P(A)>0$;

2) $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ (для независимых событий)

и *формул сложения вероятностей*:

3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$;

4) $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (для несовместных событий).

События A и B называют *несовместными*, если $A\cdot B=\varnothing$. Несовместными событиями являются, например, элементарные исходы эксперимента.

События A и B, называются *независимыми*, если выполняется равенство $P(A\mid B)=P(A)$, в противном случае они называются *зависимыми*. Часто, независимость событий определяется условиями проведения эксперимента.

Для решения задач с использованием формул сложения и умножения вероятностей следует:

1) рассмотреть «сложное» событие, вероятность которого нужно вычислить;

2) выразить «сложное» событие, посредством допустимых алгебраических операций, через наблюдаемые в том же эксперименте «простые» события, вероятности которых известны или легко определяются из условий задачи, например, по формуле классического определения вероятности;
3) вычислить вероятность «сложного» события с помощью формул сложения и умножения вероятностей, учитывая зависимость или независимость, совместность или несовместность составляющих его событий.

Решение.

Рассмотрим «сложные» события: $A = \{$**студент успешно сдаст все три экзамена**$\}$, $B = \{$**студент успешно сдаст по крайней мере два экзамена из трёх**$\}$, $C = \{$**студент успешно сдаст хотя бы один экзамен из трех**$\}$.

Выразим сначала «сложные» события A, B, C через «простые» события: $D_1 = \{$студент успешно сдаст первый экзамен$\}$, $D_2 = \{$студент успешно сдаст второй экзамен$\}$, $D_3 = \{$студент успешно сдаст третий экзамен$\}$, вероятности которых известны и равны: $P(D_1) = 0.8$, $P(D_2) = 0.9$, $P(D_3) = 0.7$. Затем вычислим вероятности $P(A), P(B), P(C)$, используя формулы сложения и умножения вероятностей, учитывая при этом зависимость и независимость, совместность и несовместность составляющих событий.

Событие A представим в виде $A = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$. Тогда, учитывая независимость событий D_1, D_2, D_3, по формуле умножения вероятностей для независимых событий получим: $P(A) = P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.504$.

Событие B означает, очевидно, что студент сдаст или все три экзамена, или только любые два экзамена из трёх. Следовательно:

$$B = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 + \overline{D}_1 \cdot D_2 \cdot D_3 + D_1 \cdot \overline{D}_2 \cdot D_3 + D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{D}_3,$$

где $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3$ - события, противоположные к событиям D_1, D_2, D_3: $\overline{D}_1 = \{$студент не сдаст первый экзамен$\}$, $\overline{D}_2 = \{$студент не сдаст второй экзамен$\}$, $\overline{D}_3 = \{$студент не сдаст третий экзамен$\}$, вероятности которых:

$$P(\overline{D}_1) = 1 - P(D_1) = 0.2, \ P(\overline{D}_2) = 1 - P(D_2) = 0.1, \ P(\overline{D}_3) = 1 - P(D_3) = 0.3.$$

Тогда, учитывая несовместность событий $D_1 \cdot \overline{D}_2 \cdot \overline{D}_3$, $\overline{D}_1 \cdot D_2 \cdot \overline{D}_3$, $\overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2 \cdot D_3$, являющихся элементарными исходами эксперимента (экзаменационной сессии), а также независимость событий D_1, D_2, D_3, $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3$, используя формулы сложения (для несовместных событий) и умножения вероятностей (для независимых событий), получим:

$P(B) = P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) + P(\overline{D}_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) + P(D_1) \cdot P(\overline{D}_2) \cdot P(D_3) +$
$+ P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(\overline{D}_3) = 0.504 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 = 0.902$

Событие C, определяемое словами «хотя бы один», означает, что студент сдаст или все три экзамена, или только любые два экзамена из трёх, или только любой один экзамен из трёх. Прямое вычисление вероятности данного события приводит к громоздким вычислениям. Поэтому, сначала найдём вероятность противоположного события $\overline{C}$ ={**студент не сдаст ни одного экзамена**}, представляемого в виде $\overline{C} = \overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2 \cdot \overline{D}_3$. Учитывая независимость событий $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3$, по формуле умножения вероятностей для независимых событий получим: $P(\overline{C}) = P(\overline{D}_1) \cdot P(\overline{D}_2) \cdot P(\overline{D}_3) = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.006$.
Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.006 = 0.994$.

Ответ: $P(A) = 0.504$, $P(B) = 0.902$, $P(C) = 0.994$.

б) В урне 15 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимают подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров окажется не более двух белых.

Схемой Бернулли называют последовательность испытаний, удовлетворяющую условиям: **1)** результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов: «успех» (появление некоторого события A) и «неудача»; **2)** испытания являются независимыми, т.е. вероятность «успеха» в каждом следующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний; **3)** вероятность «успеха» во всех испытаниях одинакова и равна $P(A) = p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k «успехов», определяется *формулой Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Следствием формулы Бернулли является формула: $P_n(k \ge 1) = 1 - (1-p)^n$ - вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли «успех» наступит хотя бы один раз.

Для решения задач с использованием формулы Бернулли следует:
1) установить, что эксперимент представляет собой схему Бернулли (вероятности событий, связанных с таким экспериментом, всегда можно выразить через вероятности $P_n(k)$, вычисляемые по формуле Бернулли);

2) рассмотреть событие A, которое может наступить или не наступить в каждом испытании и вычислить его вероятность $p = P(A)$;

3) рассмотреть событие B, вероятность которого нужно найти и которое состоит в том, что событие A в данном эксперименте появляется определённое число раз;

4) найти $P(B)$, выразив её предварительно, через вероятности $P_n(k)$, вычисляемые по формуле Бернулли.

Решение.

Эксперимент (последовательный выбор пяти шаров из урны с неизменным составом шаров) представляет собой, очевидно, схему Бернулли.

Рассмотрим событие $A = \{$вынутый из урны шар – белый$\}$. Это событие происходит или не происходит при каждом выборе шара из урны с одной и той же вероятностью $p = P(A) = \dfrac{m(A)}{n} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} = 0.6$.

Рассмотрим событие $B = \{$из пяти вынутых из урны шаров, белых - не более двух$\}$. Таким образом, событие B состоит в том, что в данном эксперименте событие A произойдёт $0, 1$ или 2 раза.

Выразим $P(B)$ через $P_n(k)$ -вероятности того, что событие A в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k раз: $P(B) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)$.

Вычислим вероятности $P_n(k)$ по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{32}{3125} = 0.01024,$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{16}{625} = 0.0768,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 10 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{8}{125} = 0.2304.$$

Тогда $P(B) = 0.01024 + 0.0768 + 0.2304 = 0.31744 \approx 0.32$.

Ответ: $P(B) \approx 0.32$ - вероятность того, что среди пяти вынутых шаров окажутся не более двух белых шаров.

161-170. Требуется найти вероятность указанного события, используя ***формулы полной вероятности и Байеса.***

В группе из 20 студентов, пришедших сдавать экзамен по «Теории вероятностей», 3 студента подготовлены на «5», 5 –на «4», 8 – на «3» и 4 – на «2». В экзаменационных билетах имеется 60 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 60 вопросов, хорошо – на 45, удовлетворительно – на 30 и неудовлетворительно – на 20. Наудачу вызванный студент ответил на произвольно заданный преподавателем вопрос. Найти вероятность того, что студент был подготовлен неудовлетворительно.

Для любого наблюдаемого в эксперименте события A имеет *место формула полной вероятности:* $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i)$, где $P(H_i)>0$, $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$. Здесь $H_1,H_2,\ldots,H_n$ - наблюдаемые для данного эксперимента события, попарно несовместные и образующие полную группу, только с одним из которых событие A происходит. Такие события называют *гипотезами* по отношению к событию A.
Если стало известно, что в результате эксперимента событие A произошло, то можно переоценить *априорные* (*доопытные*) вероятности $P(H_i)$ гипотез по *формуле Байеса*:

$P(H_i\,|\,A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}$, где $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i)$. $P(H_i\,|\,A)$ называют тогда *апостериорными* (*послеопытными*) вероятностями гипотез H_i.

Для решения задач с использованием формул полной вероятности и Байеса следует:
1) рассмотреть событие A, вероятность которого нужно найти и набор гипотез $H_1,H_2,\ldots,H_n$ - наблюдаемых в том же эксперименте событий, с одним из которых событие A происходит;
2) вычислить вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A\,|\,H_i)$ события A, в предположении, что имела место гипотеза H_i
3) по формуле полной вероятности найти $P(A)$ и, если это требуется по условиям задачи, найти по формуле Байеса апостериорные вероятности $P(H_i\,|\,A)$, в предположении, что событие A в эксперименте произошло.

Решение.

Рассмотрим событие $A=\{$**наудачу вызванный студент ответил на произвольно заданный вопрос**$\}$. Данное событие, очевидно, может произойти только с одним из следующих несовместных событий (гипотез): $H_1=\{$наудачу вызванный студент подготовлен на «5»$\}$, $H_2=\{$наудачу вызванный студент подготовлен на «4»$\}$, $H_3=\{$наудачу вызванный студент подготовлен на «3»$\}$, $H_4=\{$наудачу вызванный студент подготовлен на «2»$\}$. Из условия задачи следует, что в эксперименте (сдача экзамена) событие A произошло и необходимо переоценить вероятность гипотезы H_4, с учётом дополнительной информации относительно осуществления события A. Решение такой задачи, сводится к нахождению вероятности $P(H_4 \mid A)$ по формуле Байеса: $P(H_4 \mid A) = \dfrac{P(H_4) \cdot P(A \mid H_4)}{P(A)}$, где $P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$.

Вычислим, сначала, используя формулу классического определения вероятности, вероятности $P(H_i)$ гипотез H_i и условные вероятности $P(A \mid H_i)$ события A, в предположении, что имела место каждая из гипотез:

$$P(H_1) = \frac{m(H_1)}{n} = \frac{3}{20} = 0.15, \qquad P(H_2) = \frac{m(H_2)}{n} = \frac{5}{20} = 0.25,$$

$$P(H_3) = \frac{m(H_3)}{n} = \frac{8}{20} = 0.4, \qquad P(H_4) = \frac{m(H_4)}{n} = \frac{4}{20} = 0.2, \quad \sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1;$$

$$P(A \mid H_1) = \frac{m(A \mid H_1)}{n} = \frac{60}{60} = 1, \qquad P(A \mid H_2) = \frac{m(A \mid H_2)}{n} = \frac{45}{60} = 0.75,$$

$$P(A \mid H_3) = \frac{m(A \mid H_3)}{n} = \frac{30}{60} = 0.5, \qquad P(A \mid H_4) = \frac{m(A \mid H_4)}{n} = \frac{20}{60} \approx 0.33.$$

Затем, по формуле полной вероятности, вычислим $P(A)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = \frac{3}{20} \cdot \frac{60}{60} + \frac{5}{20} \cdot \frac{45}{60} + \frac{8}{20} \cdot \frac{30}{60} + \frac{4}{20} \cdot \frac{20}{60} = \frac{725}{1200} \approx 0.60.$$

После чего, по формуле Байеса, найдём $P(H_4 \mid A)$:

$$P(H_4 \mid A) = \frac{P(H_4) \cdot P(A \mid H_4)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{20} \cdot \frac{20}{60}}{\frac{725}{1200}} = \frac{80}{725} \approx 0.11.$$

Ответ: $P(H_4 \mid A) \approx 0.11$ - вероятность, того на заданный преподавателем вопрос ответил студент подготовленный неудовлетворительно.

171-180. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытания для каждого из приборов равна 0.9. Требуется: составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытанных приборов;

построить многоугольник полученного распределения; вычислить её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

Закон распределения ДСВ удобно задавать рядом распределения. *Рядом распределения* ДСВ называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ этой случайной величины и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \ldots$.

Решение.

Случайная величина X – число испытанных приборов, может, очевидно, принимать значения: $1, 2, 3, 4, 5$. Вычислим вероятности этих значений $p_i = P(X = x_i)$, используя формулы сложения и умножения вероятностей.

Для вычисления вероятностей p_i могут, в зависимости от условий задачи, использоваться также формулы классического определения вероятности и Бернулли.

Рассмотрим события $A_i = \{$ i **-ый испытанный прибор – надёжный**$\}$ ($i = 1,2,3,4,5$), вероятность которых одинакова и равна $P(A_i) = 0.9$. Противоположными к событиям A_i являются события $\overline{A_i} = \{$ i **-ый испытанный прибор–ненадёжный**$\}$, вероятность их одинакова и равна $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 0.1$.

Выразим события $X = x_i$, где $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, через события A_i и $\overline{A_i}$:

$\{X = 1\} = \overline{A_1}$ = {испытывался один прибор},

$\{X = 2\} = A_1 \cdot \overline{A_2}$ = {испытывались два прибора},

$\{X = 3\} = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ = {испытывались три прибора},

$\{X = 4\} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}$ = {испытывались четыре прибора},

$\{X = 5\} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot (\overline{A_5} + A_5)$ = {испытывались все пять приборов}. Очевидно, все пять приборов будут испытаны только при условии, что первые четыре оказались надежными, причем они будут испытаны при любом исходе пятого испытания: $\overline{A_5}$ или A_5.

Вычислим вероятности $p_i = P(X = x_i)$, используя формулы умножения вероятностей для независимых, по условиям задачи, событий A_i и $\overline{A_i}$:

$p_1 = P(X = 1) = P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0.1$,

$p_2 = P(X = 2) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) = 0.9 \cdot 0.1 = 0.09$,

$$p_3 = P(X=3) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot (1 - P(A_3)) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.081$$

$$p_4 = P(X = 4) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot (1 - P(A_4)) = 0.9^3 \cdot 0.1 = 0.0729.$$

$$p_5 = P(X=5) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot (A_5 + \overline{A_5})) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5 + \overline{A_5}) = 0.9^4 \cdot 1 = 0.6561.$$

Если при вычислении вероятностей p_i производится округление их значений, то округление выполняется таким образом, чтобы $\sum_i p_i = 1$.

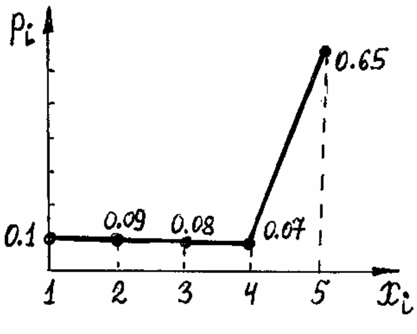
Тогда ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

.

Для наглядности закон распределения ДСВ изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i, p_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру и называют *многоугольником распределения*.

Построим в прямоугольной системе координат, многоугольник полученного распределения:



Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называется число $MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n$.

Вычислим математическое ожидание MX :

$$MX=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1\cdot 0.1+2\cdot 0.09+3\cdot 0.081+\ 4\cdot 0.0729+5\cdot 0.6561=4.0951\approx 4.10\ .$$

Дисперсией случайной величины X называется неотрицательное число $DX=M(X-MX)^2$.Дисперсию дискретной случайной величины X вычисляют по формулам: $DX=\sum\limits_i (x_i-MX)^2\, p_i$ или $DX=\sum\limits_i x_i^2\, p_i-(MX)^2$.

Дисперсию DX вычислим по формуле $DX=M(X^2)-(MX)^2$, где

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2 p_i = 1^2\cdot 0.1+2^2\cdot 0.09+$$

$$+3^2\cdot 0.081+4^2\cdot 0.0729+5^2\cdot 0.6561=18.7579\approx 18.76\ .$$

Тогда $DX\approx 18.76-(4.10)^2=1.95$.

Ответ:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

, $MX\approx 4.10$, $DX\approx 1.95$.

181-190. Найти функцию плотности вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$; вычислить её математическое ожидание MX , дисперсию DX и вероятность $P(X\in(5/4\,,3/2))$.

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать функцией плотности вероятностей $f(x)$ - неотрицательной и интегрируемой в бесконечных пределах функцией.

Функция плотности вероятностей $f(x)$ в точках, где $F(x)$ дифференцируема, определяется равенством: $f(x)=F'(x)$. В точках, где $F(x)$ не дифференцируема, $f(x)$ определяется произвольным образом, чаще всего по непрерывности слева или справа.

Непрерывная функция, задаваемая в области своего определения несколькими аналитическими выражениями, может оказаться не дифференцируемой в точках, в окрестности которых она задаётся разными аналитическими выражениями.

Решение.

Найдём функцию плотности вероятностей $f(x)$, как производную от функции распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$. Учитывая, что: $(0)'=0$,

$\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right)'=\dfrac{2x-1}{2}$, $(1)'=0$, получим $f(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{2x-1}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$.

В точках $x=1$ и $x=2$, являющихся концами промежутка, где $f(x)>0$, и в которых функция $F(x)$ недифференцируема, функцию плотности вероятностей $f(x)$, определили таким образом, чтобы на концах промежутка она была непрерывной справа (в точке $x=1$) и слева (в точке $x=2$).

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Вычислим математическое ожидание MX:

$$MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int\limits_{1}^{2} x\cdot\frac{(2x-1)}{2}dx+\int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx=0+\int\limits_{1}^{2}\left(x^2-\frac{x}{2}\right)dx+0=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{8}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{19}{12}\approx 1.58\,.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \text{ или } DX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2\,.$$

Дисперсию DX вычислим по формуле $DX=M(X^2)-(MX)^2$, где

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{1} x^2\cdot 0dx+\int\limits_{1}^{2} x^2\cdot\frac{(2x-1)}{2}dx+\int\limits_{2}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx=$$

$$=0+\int_1^2\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx+0=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{31}{12}\approx 2.58\,.$$

Тогда $DX\approx 2.58-(1.58)^2\approx 0.08$.

Для непрерывной случайной величины X справедлива формула: $P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=$ $=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

Вероятность $P(X\in(5/4\,,3/2))$ вычислим по формуле:

$$P(X\in(5/4\,,3/2))==F\left(\frac{5}{4}\right)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\Bigg|_{x=3/2}-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\Bigg|_{x=5/4}=$$

$$=\frac{(3/2)^2-(3/2)}{2}-\frac{(5/4)^2-(5/4)}{2}=\frac{7}{32}\approx 0.22\,.$$

Ответ: $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{2x-1}{2} & 1\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$, $MX\approx 1.58$, $DX\approx 0.08$, $P(X\in(5/4\,,3/2))\approx 0.22$.

191-200. а) Дана выборка объема $n=15$ **:**

23	**23**	**21**	**20**	**20**	**23**	**23**	**25**	**23**	**20**	**20**	**24**	**21**	**25**	**21**

Требуется: построить вариационный и дискретный статистический ряды; вычислить числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); построить полигон частот.

Вариационным рядом выборки $x_1,x_2,\dots,x_n$ называется такой способ её записи, при котором элементы выборки упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x_{(1)},x_{(2)},\dots,x_{(n)}$, где $x_{(1)}\le x_{(2)}\le\dots\le x_{(n)}$. Разность $x_{(n)}-x_{(1)}=\widehat{R}$ называется *размахом выборки.*

Различные значения x_i, $i=\overline{1,k}$ ($k \le n$), называются *вариантами.* Число n_i повторений варианты x_i в выборке называется её *частотой.*

Дискретным статистическим рядом называется упорядоченная в порядке возрастания значений вариант x_i последовательность пар (x_i, n_i), $i=\overline{1,k}$. Обычно его записывают в виде таблицы, первая стока которой содержит варианты x_i, а вторая их частоты.

Полигоном частот называется фигура, расположенная под ломаной линией с вершинами в точках $M_i(x_i, n_i)$.

Решение.

Построим вариационный ряд выборки, расположив элементы выборки в порядке возрастания их значений. Получим:

20	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**24**	**25**	**25**

Построим дискретный статистический ряд и запишем его в виде таблицы, в первой строке которой расположим различные значения элементов выборки в порядке их возрастания, а во второй соответствующие им частоты. Получим:

x_i	20	21	23	24	25
n_i	4	3	5	1	2

.

Если выборка записана в виде дискретного статистического ряда

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то *среднее арифметическое выборки* $\overline{x}$ вычисляют по формуле $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, а *дисперсию выборки* $\widehat{\sigma}^2$ - по формулам: $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i$ или $\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$, где $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$.

Вычислим числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$, $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$.

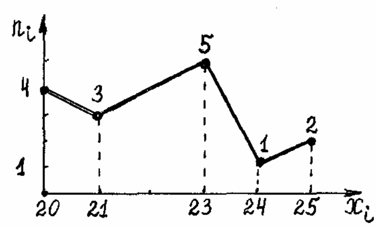
Получим: $x_{\min} = 20$, $x_{\max} = 25$, $\widehat{R} = x_{\max} - x_{\min} = 25 - 20 = 5$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{15}\cdot\left(20\cdot 4 + 21\cdot 3 + 23\cdot 5 + 24\cdot 1 + 25\cdot 2\right) = \frac{332}{15} \approx 22.13,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{1}{15}\cdot\left(20^2\cdot 4 + 21^2\cdot 3 + 23^2\cdot 5 + 24^2\cdot 1 + 25^2\cdot 2\right) = \frac{7394}{15} \approx 492.93,$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \approx 492.93 - (22.13)^2 \approx 492.93 - 489.74 = 3.19.$$

Построим полигон частот. Для его построения в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются варианты x_i, по оси ординат – частоты n_i, начало системы координат совмещено с точкой $(x_{\min}, 0)$, изобразим точки $M_i(x_i, n_i)$ и соединим их отрезками.



Ответ: Вариационный ряд:

20	20	20	20	21	21	21	23	23	23	23	23	24	25	25

Дискретный статистический ряд:

x_i	20	21	23	24	25
n_i	4	3	5	1	2

.

$x_{\min} = 20$, $x_{\max} = 25$, $\widehat{R} = 5$, $\overline{x} \approx 22.13$, $\widehat{\sigma}^2 \approx 3.19$.

б) Получены данные о содержании меди (в %) в 60 образцах сплава:

Содержание меди	**52-56**	**56-60**	**60-64**	**64-68**	**68-72**
Число образцов сплава	**3**	**9**	**18**	**14**	**16**

Требуется: вычислить числовые характеристики группированной выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); построить гистограмму частот.

Если выборка записана в виде интервального статистического ряда

J_i	J_1	J_2	$\cdots$	J_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то *среднее арифметическое выборки* $\overline{x}$ вычисляют по формуле $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i n_i$, а *дисперсию выборки* $\widehat{\sigma}^2$ - по формулам: $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\widetilde{x}_i - \overline{x})^2 n_i$ или $\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$, где $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i^2 n_i$, $\widetilde{x}_i$ - середина интервала J_i.

Решение.

Вычислим числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$, $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$. Получим: $x_{\min} = 52$, $x_{\max} = 72$, $\widehat{R} = x_{\max} - x_{\min} = 72 - 52 = 20$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i n_i = \frac{1}{60}\cdot\left(54\cdot 3 + 58\cdot 9 + 62\cdot 18 + 66\cdot 14 + 70\cdot 16\right) = \frac{3844}{60} \approx 64.07,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i^2 n_i = \frac{1}{60}\cdot\left(54^2\cdot 3 + 58^2\cdot 9 + 62^2\cdot 18 + 66^2\cdot 14 + 70^2\cdot 16\right) =$$

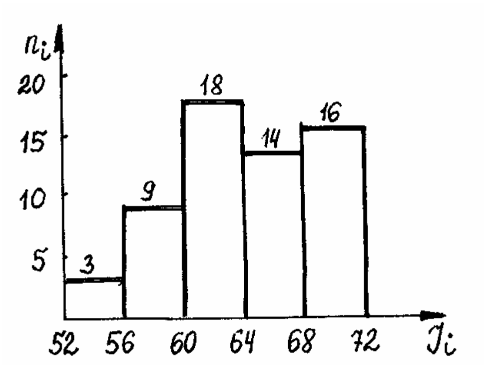
$$= \frac{247600}{60} \approx 4126.67,$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \approx 4126.67 - (64.07)^2 \approx 4126.67 - 4104.96 = 21.71.$$

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна частоте n_i, $i = \overline{1,k}$. Если длины всех интервалов одинаковы и равны h, то высоты прямоугольников равны $\dfrac{n_i}{h}$.

Часто, при построении гистограмм частот по интервалам равной длины, высоту прямоугольников выбирают равной частоте.

Построим гистограмму частот. Для этого в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются интервалы J_i, по оси ординат – частоты n_i, начало системы координат совмещено с точкой $(x_{\min}, 0)$, на интервалах J_i, как на основаниях, построим прямоугольники высоты n_i.



Ответ: $x_{\min} = 52$, $x_{\max} = 72$, $\widehat{R} = 20$, $\bar{x} \approx 64.07$, $\bar{\sigma}^2 \approx 21.71$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Неопределённый интеграл</u>.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Поэтому все первообразные для $f(x)$ содержатся в выражении $F(x) + C$, где $C \in R$ - произвольная постоянная, которое и называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Операция нахождения первообразной или неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** этой функции. Функция $f(x)$ для которой на промежутке X существует первообразная или неопределённый интеграл называется ***интегрируемой*** на этом промежутке. Первообразная и неопределённый интеграл на промежутке X существуют у любой непрерывной на этом промежутке функции. Нахождение неопределённого интеграла состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения, чтобы получить интегралы из таблицы основных интегралов (*приложение 6.3*).

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. **2.** $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ($k = const, k \neq 0$).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, $a \neq 0$.

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям.

Непосредственным интегрированием (интегрированием *методом разложения*) функции $f(x)$ называют отыскание неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$, свойств **3-4** неопределённого интеграла и таблицы основных интегралов.

Часто, заменой переменной интегрирования $x \to t$, удаётся свести нахождение интеграла $\int f(x)dx$ к нахождению более простого интеграла $\int g(t)dt$ с последующей заменой $t \to x$.

Существуют два варианта замены переменной интегрирования:

1) ***Метод подведения функции под знак дифференциала***.

Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде $f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - дифференцируемая функция, то осуществляется замена $\varphi(x) = t$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = [\varphi(x) = t] = \int g(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)} .$$

При подведении функций под знак дифференциала широко используются свойства дифференциалов и таблица дифференциалов основных элементарных функций (*приложение 6.3),* в частности, преобразования:

$$dx = d(x+b) = \frac{1}{a}d(ax+b); \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x};$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b), \ a \neq 0 .$$

2) ***Метод подстановки.***

Если функция $x = \psi(t)$ дифференцируема и имеет обратную $t = \psi^{-1}(x)$ на соответствующем промежутке, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)} .$$

Функция $x=\psi(t)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид. Выбор её определяется конкретным видом подынтегрального выражения.

Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ или кратко $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула используется в тех случаях для вычисления $\int f(x)dx$, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно так представить в виде udv, что интеграл $\int vdu$ может оказаться проще интеграла $\int udv$.

Этим методом вычисляются: **1)** интегралы вида $\int x^n \cos(\alpha x+\beta)dx$, $\int x^n \sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int x^n e^{\alpha x+\beta} dx$, $\int x^n a^{\alpha x+\beta} dx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается x^n ; **2)** интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается одна из указанных выше функций. Указанные группы интегралов не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

<u>Интегрирование основных классов элементарных функций.</u>

Вычисление интегралов вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ и $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, выделяя в квадратном трёхчлене $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ полный квадрат $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$ и делая замену переменной интегрирования $x+\frac{\beta}{2\alpha}=t$, сводят к вычислению табличных интегралов (см. *приложение 6.3*) и интегралов вида $\int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2}$ и $\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$, которые сводят к табличным заменой переменной $t^2 \pm a^2 = z$.

Вычисление интегралов вида $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, делая замену переменной интегрирования $\frac{1}{px+q}=t$, сводят к вычислению интегралов, рассмотренных выше.

Рациональной дробью называется рациональная функция $R(x)$ вида $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_0x^m+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$. Если $m\geq n$, то дробь ***неправильная***, в противном случае – ***правильная***. Всякую неправильную дробь всегда можно представить в виде $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{S_l(x)}{Q_n(x)}$, где $T_{m-n}(x)$, $S_l(x)$ - многочлены от x, причём $l<n$. Выделение целой части (многочлена $T_{m-n}(x)$) в неправильной дроби производят делением числителя на знаменатель, выполняемое «уголком». Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби основано на её представлении в виде конечной суммы простейших дробей вида $\frac{A_1}{\alpha x+\beta}$, $\frac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$ $(k\geq 2)$, $\frac{B_1x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\frac{B_kx+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$ $(k\geq 2)$, причём трёхчлен $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ не имеет действительных корней. Вид этого разложения определяется разложением знаменателя $Q_n(x)$ дроби на линейные и квадратичные множители (не имеющие действительных корней).

Каждому линейному множителю вида $(\alpha x+\beta)^k$, где $k\geq 1$, в разложении соответствует сумма из k простейших дробей вида $\frac{A_1}{\alpha x+\beta}+\frac{A_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$. Каждому квадратичному множителю вида $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k$, где $k\geq 1$, в разложении соответствует сумма из k простейших дробей вида $\frac{B_1x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}+\ldots+\frac{B_kx+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$.

Неизвестные постоянные A_i, B_i, C_i в разложении правильной рациональной дроби $\dfrac{S_l(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших дробей определяют ***методом неопределённых коэффициентов***. Для этого правую часть искомого разложения приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $Q_n(x)$), после чего у получившегося в числителе многочлена с неизвестными постоянными и у многочлена $S_l(x)$ приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате получают систему линейных уравнений, решая которую находят неизвестные постоянные. Можно также определять A_i, B_i, C_i, подставляя в равенство, полученное приравниванием числителя $S_l(x)$ к числителю дроби с неизвестными постоянными, полученной после приведения простейших дробей к общему знаменателю $Q_n(x)$, вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя $Q_n(x)$) (***метод частных значений***). Часто, при нахождении неизвестных постоянных, комбинируют оба способа.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R -рациональная функция относительно аргументов $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам вида $\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ -рациональная функция относительно аргумента t, с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $tg(x/2) = t$. При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Применение универсальной подстановки, иногда приводит к громоздким вычислениям. В частных случаях используют подстановки:

1) $\cos x = t$, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

2) $\sin x = t$, если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

3) $tgx = t$, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ или $R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx)$, при этом: $\sin x = t\big/\sqrt{1+t^2}$, $\cos x = 1\big/\sqrt{1+t^2}$, $dx = dt\big/(1+t^2)$;

4) $ctgx = t$, если $R(\sin x, \cos x) = R_1(ctgx)$, при этом $dx = -dt/(1+t^2)$. Здесь R_1 - рациональная функция относительно аргументов tgx, $ctgx$.

Интегралы вида $\int \sin^{2m} \alpha x \cos^{2n} \alpha x dx$, где m, n - целые неотрицательные числа, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию с помощью формул: $\sin^2 \alpha x = (1-\cos 2\alpha x)/2$, $\cos^2 \alpha x = (1+\cos 2\alpha x)/2$.

Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию по формулам:

$$\sin a \cos b = [\sin(a-b) + \sin(a+b)]/2;$$

$$\sin a \sin b = [\cos(a-b) - \cos(a+b)]/2;$$

$$\cos a \cos b = [\cos(a-b) + \cos(a+b)]/2.$$

Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций. При этом используются формулы:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1; \quad sh^2 x = \frac{ch2x-1}{2}; \quad ch^2 x = \frac{ch2x+1}{2}; \quad sh2x = 2shxchx.$$

Интегралы вида $\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right] dx$, где R - рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ -целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

Вычисление интегралов вида $\int R\,(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})dx$, где R - рациональная функция своих аргументов, выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \beta/(2\alpha)\right)^2 + \gamma - \beta^2/(4\alpha)$ и заменой $x + \beta/(2\alpha) = t$, сводится к вычислению интегралов вида:

1) $\int R_1\,(t, \sqrt{a^2 - t^2})\,dt$**;** **2)** $\int R_1\,(t, \sqrt{a^2 + t^2})\,dt$**;** **3)** $\int R_1\,(t, \sqrt{t^2 - a^2})\,dt$**,** где R_1 - рациональная функция своих аргументов.

Последние интегралы, соответственно, с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок:

1) $t = a \sin z$ или $t = a\, thz$**;**

2) $t = a\,tgz$ или $t = a\,shz$ **;**

3) $t = \dfrac{a}{\cos z}$ или $t = a\ chz$

приводятся к интегралам вида $\int R_2(\sin z, \cos z)dz$ или $\int R_2(shz, chz)dz$, где R_2 - рациональная функция своих аргументов

Тема. <u>Определённый интеграл.</u>

К понятию определённого интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключённой между прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$. Число, равное площади криволинейной трапеции, причём площадь той части, которая лежит выше оси Ox берётся со знаком «+», и ниже её – со знаком «$-$» и называется ***определённым интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Определённый интеграл обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, где числа a, b называются ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определённый интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке. ***Достаточным условием интегрируемости*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является её непрерывность на данном отрезке.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то, по определению, полагают $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Основные свойства определённого интеграла:

1. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (k = const)$**.**

2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$**.**

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$**.**

4. Если $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ **.**

5. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, m - наименьшее, M - наибольшее значения $f(x)$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ (***теорема об оценке определённого интеграла***) .

6. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (***теорема о среднем значении***). Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется при этом ***средним значением*** функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$.

Понятие определённого интеграла тесно связано с понятием неопределённого интеграла (первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - одна из её первообразных, то справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ (***формула Ньютона-Лейбница***).

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$ (***формула интегрирования по частям***).

Если функция $x = \varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c,d] \supset [a,b]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ ($[c,d]$ -образ отрезка $[\alpha,\beta]$, т.е. отрезок для которого $c \le \varphi(t) \le d$ при всех $\alpha \le t \le \beta$), то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ (***формула замены переменной***).

При замене переменной в определённом интеграле в отличие от вычисления неопределённого не нужно возвращаться к исходному аргументу, так как преобразованный определённый интеграл берётся по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент.

При вычислении неопределённого интеграла по умолчанию предполагалось, что первообразная находится на тех промежутках, на которых выполняемые преобразования подынтегральной функции являются тождественными. При вычислении же определённого интеграла первообразная находится на заданном отрезке, поэтому здесь уже необходимо следить за тождественностью выполняемых преобразований.

Геометрические приложения определённого интеграла.

Площадь фигуры (рис.1) $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$ равна

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx .$$

Площадь фигуры (рис.2) $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, $c \le y \le d$ равна

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy .$$

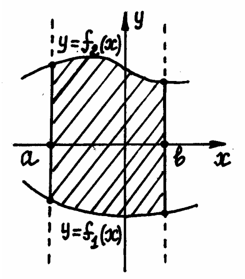


Рис.1

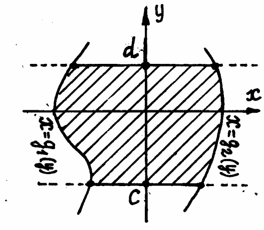


Рис.2

Если фигура (рис.3) ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то её площадь равна $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ ($y(t) \ge 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

Площадь криволинейного сектора (рис.4) $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$, где r, φ - полярные координаты, равна $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))\,d\varphi$.

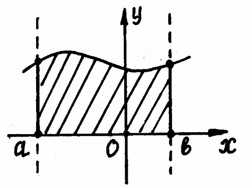


Рис.3

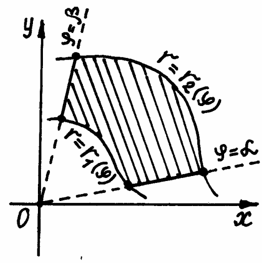


Рис.4

Длина дуги плоской кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx .$$

Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$.

Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt .$$

Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, равна $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi$.

Если $S = S(z)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, в точке с аппликатой z, то объём этого тела равен $V = \int\limits_a^b S(z)dz$, где a и b - аппликаты крайних сечений тела.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры (рис.5) $a \le x \le b$, $0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)$ равен $V_x = \pi \int\limits_a^b [f_2^2(x) - f_1^{\,2}(x)]\, dx$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры (рис.6) $0 \le g_1(y) \le x \le g_2(y)$, $c \le y \le d$, равен $V_y = \pi \int\limits_c^d [g_2^2(y) - g_1^2(y)]\,dy$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры (рис.7) $0 \le a \le x \le b$, $0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)$, равен $V_y = 2\pi \int\limits_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx$.

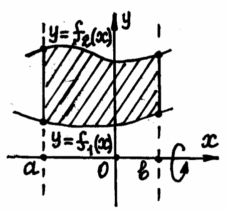


Рис.5

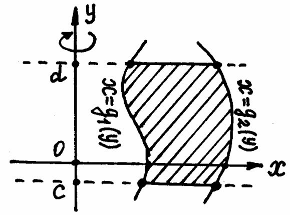


Рис.6

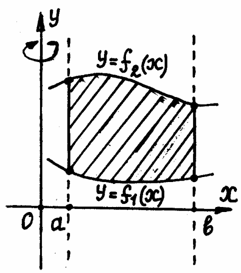


Рис.7

Тема. Несобственные интегралы.

1. Интегралы с бесконечными пределами.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ***несобственным интегралом первого рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ называется $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Аналогично: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется равенством:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, где $c \in R$ - произвольное число, причём интеграл в левой части равенства сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

2. Интегралы от неограниченных функций.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема при $a \le x < b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Аналогично, в случае $a < x \le b$ и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Тема. Кратные интегралы.

Замкнутую область $D = \{(x,y): a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[a,b]$, будем называть ***элементарной в направлении оси*** Oy и обозначать D_y (рис.8).

Замкнутую область $D = \{(x,y): \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$, где функции $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[c,d]$, будем называть ***элементарной в направлении оси*** Ox и обозначать D_x (рис.9).

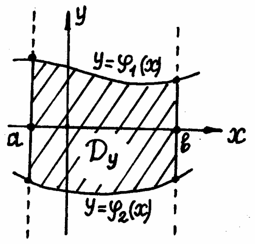


Рис.8

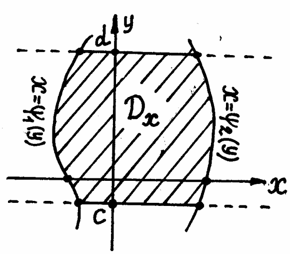


Рис.9

Область, элементарная в направлении одной из осей, не обязана быть элементарной в направлении другой.

Выражение $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ называется ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ ***по области*** D_y, а выражение $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ называется ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ ***по области*** D_x.

В повторных интегралах сначала вычисляются внутренние интегралы, причём интегрирование производится по внутренней переменной, а внешняя переменная считается постоянной. В результате получится подынтегральная функция для внешнего интеграла, интегрируя которую получим число.

Имеет место равенство $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, если $D = D_x = D_y$. Если D не является множеством такого вида, то при изменении порядка интегрирования, её представляют в виде конечного объединения непересекающихся (без общих внутренних точек) областей $D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$, каждая из которых является элементарной в направлении той или другой координатной оси. Тогда в силу аддитивности повторный интеграл по области D будет равен сумме повторных интегралов по областям $D_1, D_2, \ldots, D_k$.

Представление области D в виде $D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$, часто существенно упрощается при изображении области D на чертеже.

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x,y)$ по ограниченной замкнутой области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum\limits_i \sum\limits_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и суммирование ведётся по тем значениям i и j, для которых $(x_i, y_j) \in D$.

Двойной интеграл по области $D = D_y$ вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Двойной интеграл по области $D = D_x$ вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,.$$

Если D не является множеством такого вида, то её представляют в виде объединения непересекающихся (без общих внутренних точек) областей $D=\bigcup_{i=1}^{k} D_i$, каждая из которых является элементарной в направлении той или другой оси. Разбиение зависит от желаемого порядка расстановки пределов интегрирования. Тогда в силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{k}\iint_{D_i} f(x,y)dxdy\,.$$

При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x,y) к полярным координатам (r,φ), связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, имеет место формула $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Если область D^* имеет вид $D^*=\{(\varphi,r):\alpha\le\varphi\le\beta, r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)\}$, где функции $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[\alpha,\beta]$, то двойной интеграл $\iint_{D^*} f_1(\varphi,r)rdrd\varphi$, где $f_1(\varphi,r)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$, вычисляется по формуле $\iint_{D^*} f_1(\varphi,r)rdrd\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f_1(\varphi,r)rdr$. Если область интегрирования D^* не принадлежит к рассмотренному виду, то её разбивают на части, каждая из которых является областью данного вида.

Площадь области D вычисляется по формуле $S_D=\iint_D dxdy$. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x,y) к полярным координатам (r,φ), имеет место формула $S_D=\iint_{D^*} rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Среднее значение непрерывной функции $f(x, y)$ *в области* D вычисляется по формуле $f_{cp} = \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y)dxdy$.

Объём υ ***цилиндроида***, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, вычисляется по формуле $\upsilon = \iint_D f(x, y)dxdy$. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x, y) к полярным координатам (r, φ), имеет место формула $\upsilon = \iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Тема. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется ***интегралом*** уравнения. Процесс нахождения решений называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Уравнение вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - заданная функция переменных x и y, называется ***ДУ первого порядка, разрешённым относительно производной***. Эту форму записи ДУ называют ***нормальной.*** Учитывая, что $y' = dy/dx$, ДУ первого порядка, разрешённое относительно производной, можно всегда записать в ***дифференциальной форме***: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - заданные функции переменных x и y.

Условие $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 -заданные числа, называется ***начальным условием.*** Задача нахождения решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Общим решением ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C)$, зависящее от одной произвольной постоянной C, такое, из которого при надлежащем выборе значения постоянной $C = C_0$ можно получить решение $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

Частным решением ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, получаемое из общего при конкретном значении постоянной $C = C_0$ (при этом не исключаются и значения $C = \pm\infty$). Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется ***частным интегралом*** уравнения.

Решение ДУ первого порядка, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым.*** Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C = \pm\infty$. Особое решение всегда можно обнаружить в процессе построения общего решения (общего интеграла) данного ДУ. Это те решения, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного уравнения, переводящих это уравнение в его общее решение (общий интеграл).

ДУ вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделёнными переменными***. Его общий интеграл имеет вид $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$.

ДУ вида $y' = f(x)g(y)$ или $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделяющимися переменными***. Его интегрирование, путём деления обеих частей уравнения на $g(y)$ или $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, сводится (с учётом $y' = dy/dx$) к интегрированию уравнения с разделёнными переменными.

При выполнении деления возможна потеря решений, для которых $g(y) = 0$ или $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$. Потерянные решения или содержатся в формуле общего решения при каком-то конкретном значении произвольной постоянной (при этом не исключаются и значения $C = \pm\infty$) или являются особыми решениями.

Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка – значит: **1)** найти его общее решение $y = \varphi(x, C)$ или общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$; **2)** найти то частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ (частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$) которое удовлетворяет заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(y/x\right)$ или $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - однородные функции одинаковой степени, называется ***однородным***.

Функция $f(x,y)$, обладающая свойством $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x,y)$ при всех $\lambda > 0$, называется ***однородной функцией степени*** α **.**

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\boxed{y = xu}$, $y' = u + xu'$ или $dy = udx + xdu$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная функция. Интегрируя ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$ и возвращаясь к искомой функции $y(x)$, находим общее решение исходного уравнения. Иногда целесообразно вместо подстановки $y = xu$, использовать подстановку $\boxed{x = yu}$, где $u = u(y)$ - новая неизвестная функция.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется ***линейным***. Уравнение $y' + p(x)y = 0$, в котором правая часть тождественно равна нулю, называется ***однородным линейным*** уравнением.

Общее решение неоднородного линейного уравнения находится подстановкой $\boxed{y = u \cdot v}$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции от x. Уравнение тогда примет вид $[u' + p(x)u] \cdot v + u \cdot v' = q(x)$. Приравняв нулю выражение в скобках, получим уравнение с разделяющимися переменными $u' + p(x) \cdot u = 0$, из которого найдём $u(x)$ в виде его частного решения $u = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для $p(x)$. Подставив затем найденное выражение $u(x)$ в уравнение $[u' + p(x)u] \cdot v + u \cdot v' = q(x)$, получим уравнение с разделяющимися переменными $uv' = q(x)$, из которого найдём $v(x)$ в виде его общего решения. В результате найдём и общее решение исходного уравнения в виде $y = u \cdot v$.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***. Решение уравнения Бернулли, также как и линейного, находится подстановкой $\boxed{y = u \cdot v}$.

Тема. <u>Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений.</u>

Уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется ***дифференциальным уравнением*** n ***-го порядка***. Функция

$y=\varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, то оно называется ***интегралом*** уравнения.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, называется уравнением, ***разрешённым относительно старшей производной***. Эту форму записи ДУ n-го порядка называют ***нормальной***.

Условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0, y_0, $y'_0,\dots,y_0^{(n-1)}$ - заданные числа, называются ***начальными условиями***. Задача нахождения решения уравнения $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

Общим решением ДУ n-го порядка называется решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных $C_1,C_2,\dots,C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1=C_{10},C_2=C_{20},\dots,C_n=C_{n0}$ можно получить решение $y=\varphi(x,C_{10},C_{20},\dots,C_{n0})$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

Частным решением ДУ n-го порядка называется решение $y=\varphi(x,C_{10},\dots,C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1=C_{10},\dots,C_n=C_{n0}$. Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x,y,C_{10},\dots,C_{n0})=0$, называется ***частным интегралом.***

Если для искомого частного решения $y=\varphi(x,C_{10},\dots,C_{n0})$ уравнения $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ заданы начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ и известно общее решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ уравнения, то значения $C_{10},C_{20},\dots,C_{n0}$ произвольных постоянных определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y_0 \\ \varphi'(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y'_0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ называется ***простейшим дифференциальным уравнением*** n***-го порядка***. Его общее решение находят, выполняя последовательно n интегрирований, и записывают в виде

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, $1 \le k < n$, не содержащее явно искомой функции $y(x)$, с помощью подстановки $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция, приводится к уравнению $(n-k)$ порядка $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$.

Функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_m = y_m(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на (a,b), если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0$ для всех $x \in (a,b)$. Если равенство выполняется для всех $x \in (a,b)$ только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m$, то данные функции называются ***линейно независимыми*** на (a,b).

Определитель $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ называется ***определителем Вронского*** *(вронскианом)*.

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ линейно зависимы на (a,b), то определитель Вронского $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = 0$ для всех $x \in (a,b)$ (***необходимое условие линейной зависимости***).

Если $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \ne 0$ хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ линейно независимы на (a,b) (***достаточное условие линейной независимости***).

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ)*** n***-го порядка***, где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$- непрерывные функции или постоянные. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***однородным***. Однородное линейным уравнение n-го порядка имеет вид $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$.

Любая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ однородного линейного уравнения называется ***фундаментальной системой*** его ***решений***.

Общее решение однородного линейного уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, где $y_1,y_2,\ldots,y_n$ - фундаментальная система его решений; $C_1,C_2,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные .

Фундаментальная система решений $y_1,y_2,\ldots,y_n$ однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ строится на основе характера корней ***характеристического уравнения*** $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$.

А именно: **1)** если λ - действительный простой корень характеристического уравнения, то ему в ФСР соответствует частное решение $e^{\lambda x}$ дифференциального уравнения; **2)** если λ - действительный корень кратности k, то ему в ФСР соответствует k линейно независимых частных решений: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x},\ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$; **3)** если $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ - пара простых комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, то ей в ФСР соответствует два линейно независимых частных решения: $e^{\alpha x}cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$; **4)** если $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней кратности k, то ей в ФСР соответствует $2k$ линейно независимых частных решений: $e^{\alpha x}cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, … , $x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение неоднородного ЛДУ $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$ имеет вид $y=y_0+\widetilde{y}$, где $y_0=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\widetilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения.

Частное решение $\widetilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется ***методом неопределённых коэффициентов*** в виде $\widetilde{y}=x^ke^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x]$, где $k=0$, если число $\lambda=\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\lambda=\alpha+i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N=\max\{m,l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0,1,2,3,\ldots$ соответственно являются: A, $Ax+B$, Ax^2+Bx+C, Ax^3+Bx^2+Cx+D,…. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\tilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ равно сумме частных решений $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями f_1, f_2 (***принцип наложения решений***).

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с любой правой частью $f(x)$ может быть найдено ***методом вариации произвольных постоянных***. Для дифференциального уравнения второго порядка $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ метод состоит в следующем. Если известна фундаментальная система решений y_1, y_2 однородного уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$, то частное решение соответствующего неоднородного уравнения ищется в виде $\tilde{y}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, где неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}.$$

Система дифференциальных уравнений вида $\dfrac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, где $y_i=y_i(x)$ - искомые функции, называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений.*** Число n **называется** ***порядком системы.*** Совокупность n функций $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$,…, $y_n=\varphi_n(x)$ обращающих каждое уравнение системы в тождество, называется ***решением*** этой системы.

Условия $y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20}$,…, $y_n(x_0)=y_{n0}$, где x_0, y_{10}, y_{20},…, y_{n0} - заданные числа, называются ***начальными условиями***. Задача нахождения решения нормальной системы уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

Общим решением нормальной системы ДУ называется решение:

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,\ldots,C_n),\; y_2=\varphi_2(x,C_1,\ldots,C_n),\ldots,\; y_n=\varphi_n(x,C_1,\ldots,C_n),$$

зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1 = C_{10}, \ldots, C_n = C_{n0}$ можно получить решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называется ***общим интегралом*** системы.

Частным решением системы называется решение $y_1 = \varphi_1(x, C_{10}, \ldots, C_{n0})$, $y_2 = \varphi_2(x, C_{10}, \ldots, C_{n0}), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_{10}, \ldots, C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, \ldots, C_n = C_{n0}$. Если для искомого частного решения системы заданы начальные условия $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$ и известно общее решение $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$ системы, то значения $C_{10}, \ldots, C_{n0}$ произвольных постоянных определяются, если это возможно, из системы уравнений $\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{10} \\ \cdots \\ \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{n0} \end{cases}$.

Нормальные системы ДУ с небольшим числом уравнений решают ***методом исключения*** неизвестных функций приводя их к одному дифференциальному уравнению n-го порядка или к нескольким уравнениям порядка, меньшего чем n.

Для нахождения решения, например, нормальной системы двух уравнений $\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$, $\frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ - неизвестные функции независимой переменной t поступают следующим образом. Сначала дифференцируют по t первое из уравнений системы и получают уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} g(t, x, y)$. Затем определяют y из первого уравнения системы и подставляют найденное выражение $y = y(t, x, x'_t)$ в уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g$. В результате получают ДУ второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$, решая которое находят $x = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 -произвольные постоянные. Подставляя $x = \varphi(t, C_1, C_2)$ в формулу $y = y(t, x, x'_t)$, определяют функцию

$y=\psi(t,C_1,C_2)$. Совокупность функций $x=\varphi(t,C_1,C_2)$, $y=\psi(t,C_1,C_2)$ даёт общее решение системы.

Тема. <u>Числовые ряды.</u>

Выражение вида $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, где $u_1,u_2,\ldots$- последовательность чисел, называется ***числовым рядом*** и обозначатся $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ называется ***остатком*** n***-ого порядка*** исходного ряда и обозначается r_n. Сумма $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ n первых членов ряда называется n***-ой частичной суммой*** ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***сходящимся***, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ и ***расходящимся***, если предел не существует. Число S называется ***суммой сходящегося ряда,*** при этом пишут $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится и расходится его остаток r_n. В случае сходящегося ряда его остаток записывают в виде $r_n=S-S_n$.

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ (***необходимый признак сходимости ряда)***. Обратное утверждение неверно.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится (***достаточный признак расходимости ряда***).

Признак сравнения. Если для рядов $U:\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $V:\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, начиная с некоторого n_0, для всех $n\geq n_0$ выполняется условие $0\leq u_n\leq v_n$, то из сходимости ряда V следует сходимость ряда U, из расходимости ряда U следует расходимость ряда V.

Предельный признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$ (в частности, если $u_n \sim v_n$ при $n\to\infty$), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ($u_n>0$, $v_n>0$ начиная с некоторого n_0) сходятся или расходятся одновременно.

Для применения признаков сравнения необходимо наличие «эталонных» рядов, сходимость или расходимость которых известна. В качестве «эталонных» рядов широко используются: **1)** ***обобщённый гармонический ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$; **2)** *геометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, который сходится при $0\le q<1$, при этом его сумма равна $S=\dfrac{1}{1-q}$ и расходится при $q\ge 1$. Таким образом, для применения признаков сравнения нужно найти последовательность $\dfrac{A}{n^p}$ или Bq^n, где A, B - некоторые числа, такую, что $u_n\sim\dfrac{A}{n^p}$ или $u_n\sim Bq^n$ при $n\to\infty$.

Полезно иметь в виду эквивалентности (при $n\to\infty$, $p>0$):

$$\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)\sim tg\left(\frac{1}{n^p}\right)\sim \arcsin\left(\frac{1}{n^p}\right)\sim arctg\left(\frac{1}{n^p}\right)\sim \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\sim\frac{1}{n^p},$$

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n},$$

а также оценки $(\ln n)^\alpha \le n^\beta \le a^n \le n! \le n^n$ ($\alpha>0, \beta>0, a>1$), имеющие место, начиная с некоторого n_0, для всех $n\ge n_0$.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n>0$ начиная с некоторого n_0) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=L$, то ряд сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$. Если $L=1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

Признак Коши (радикальный). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$ начиная с некоторого n_0) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, то ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$. Если $L = 1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

При применении признака Коши полезно иметь в виду, что: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_m(n)} = 1$, где $P_m(n)$- многочлен порядка m относительно n.

Интегральный признак Коши. Если $u_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \geq n_0 \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при перестановке членов ряда. Сумму условно сходящегося ряда путём перестановки его членов можно сделать равной любому числу.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он является сходящимся (***достаточный признак сходимости знакопеременного ряда***).

Для исследования ряда на абсолютную сходимость используют известные признаки сходимости знакоположительных рядов. В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, если $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$. В общем случае из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Но если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$, то расходится не только ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, но и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Ряд называется ***знакочередующимся***, если все его соседние члены имеют разные знаки.

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ ($u_n>0$) модуль его общего члена $|u_n|$ монотонно стремится к нулю, т.е. выполнены условия: **1)** $u_1>u_2>u_3>\ldots$ (может начать выполняться начиная с некоторого n_0); **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то знакочередующийся ряд сходится (по крайней мере условно). Для остатка ряда r_n в этом случае справедлива оценка $|r_n|\le u_{n+1}$.

Сумму знакочередующегося ряда с заданной степенью точности ε вычисляют по приближённой формуле $S\approx S_{n_0}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n_0+1}u_{n_0}$, где n_0 - минимальный из номеров, дл которых $u_{n+1}<\varepsilon$.

Тема. <u>Функциональные ряды.</u>

Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, где $u_1(x),u_2,(x)\ldots$ - последовательность функций, определённых на одном и том же множестве $D\subset R$, называется ***функциональным рядом,*** определённым на D и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Функция $S_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x)$ называется n***-ой частичной суммой*** функционального ряда.

Точка $x_0\in D$, в которой сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, называется ***точкой сходимости*** функционального ряда. Множество $D_0\subset D$, состоящее из всех точек сходимости функционального ряда, называется его ***областью сходимости***. Область D_0 сходимости функционального ряда обычно уже, чем область его определения D .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве D^*, если при всех $x \in D^*$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Всякий ряд, абсолютно сходящийся на множестве D^*, сходится на этом множестве. Область D^* абсолютной сходимости ряда обычно уже его области сходимости D_0.

Функцию $S(x)$, определённую в области сходимости D_0 функционального ряда такую, что при любом фиксированном $x \in D_0$ $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, называют ***суммой ряда*** и пишут $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. При $x \in D_0$ остаток ряда представляет собой также функцию $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $x \in D_0$.

Для нахождения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ применяют известные признаки сходимости числовых рядов, считая $x \in D$ фиксированным.

В частности, на основании признаков Даламбера и Коши (радикального) можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = L(x) < 1$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x) < 1$, соответственно, и расходится, если $L(x) > 1$. В точках x, в которых $L(x) = 1$, сходимость ряда исследуют с помощью других признаков (например, признаков сравнения, интегрального признака Коши, признака Лейбница) .

Тема. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$, где a_i, x_0 - действительные числа. Числа a_i называются ***коэффициентами*** ряда.

Всякий степенной ряд сходится в точке $x = x_0$.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется число R такое, что при $|x - x_0| < R$ ряд сходится (и притом абсолютно), а при

$|x-x_0|>R$ расходится. Интервал (x_0-R, x_0+R) при этом называется ***интервалом сходимости*** ряда. На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=x_0 \pm R$, ряд может как сходится, так и расходится.

Областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости (x_0-R, x_0+R), к которому присоединяются точки $x_0 \pm R$, если в них ряд сходится. В частности, радиус сходимости R может быть равен 0, тогда область сходимости ряда состоит из одной точки x_0, и $+\infty$, тогда областью сходимости ряда является вся числовая прямая) .

Интервал сходимости (x_0-R, x_0+R) определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши (радикального), вычисляя пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = L(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x)$ и решая неравенство $L(x)<1$.

Внутри общего интервала сходимости (x_0-R, x_0+R) степенные ряды можно почленно складывать и вычитать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n \ .$$

Внутри интервала сходимости (x_0-R, x_0+R) степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

$$\textbf{1)}\ \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \ ;$$

$$\textbf{2)}\ \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)} + C \ .$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке $x=x_0$. При $x_0=0$ ряд Тейлора называется ***рядом Маклорена***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots .$$

Представление функции $f(x)$ в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, называется разложением $f(x)$ в ряд Тейлора. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда остаток ряда $r_n(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \to 0$ при $n\to\infty$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, входящей в интервал сходимости ряда. Для оценки остатка ряда Тейлора часто пользуются формулой $r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$, где $0<\theta<1$.

Тема. Тригонометричекий ряд. Ряд Фурье.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\ell,\ell]$ называется функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, где числа a_n и b_n, называемые ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, вычисляются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\ ,\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\ ,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Функция $f(x)$ называется ***кусочно-монотонной*** на отрезке $[\alpha,\beta]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1,x_2,...,x_{k-1}$ на интервалы $(\alpha,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{k-1},\beta)$ так, что на каждом из интервалов функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\ell,\ell]$ кусочно-монотонна и непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, то во всякой точке $x\in(-\ell,\ell)$, в которой $f(x)$ непрерывна, функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$. В точках разрыва $x\in(-\ell,\ell)$ функции $f(x)$ и точках $x=\pm\ell$ сумма ряда Фурье определяется формулами $S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ и $S(-\ell)=S(\ell)=\frac{f(-\ell+0)+f(\ell-0)}{2}$.

В частности, если: **1)** функция $f(x)$ - ***чётная***, то в точках $x\in(-\ell,\ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, где $a_n=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$, $n=0,1,2,\ldots$;

2) функция $f(x)$ - ***нечётная***, то в точках $x \in (-\ell, \ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, где $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$, $n = 1,2,\dots$. Если функция $f(x)$ задана только в интервале $(0,\ell)$, то её можно продолжить в интервал $(-\ell,0)$ либо как чётную, либо как нечётную, а затем разложить её в интервале $(0,\ell)$ в неполный ряд Фурье по синусам или по косинусам.

Тема. <u>Случайные события и их вероятности.</u>

1. <u>Классическое и геометрическое определения вероятности.</u>

При ***классическом определении вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A определяется равенством $P(A) = \frac{m(A)}{n}$, где $m(A)$ - число элементарных исходов эксперимента (опыта, испытания), благоприятствующих появлению события A; n - общее число равновозможных элементарных исходов эксперимента. Каждый из исходов (далее неделимых и взаимно исключающих друг друга) эксперимента называется его ***элементарным исходом*** (элементарным событием) и обозначается ω. Элементарные исходы называются ***равновозможными,*** если в силу условий проведения эксперимента можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Множество всех элементарных исходов эксперимента называется ***пространством элементарных исходов*** и обозначается Ω. Исход ω называется ***благоприятствующим*** данному событию, если его появление влечёт за собой наступление такого события.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не происходит. Например, противоположным событию, определяемому словами «хотя бы один…» является событие, определяемое словами «ни один…». Если вероятность $P(\overline{A})$ известна или легко может быть найдена, то вероятность $P(A)$ вычисляют по формуле: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Для вычисления общего числа n элементарных исходов и числа $m(A)$ элементарных исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, широко используются правила и формулы комбинаторики. Одной из основных задач комбинаторики является подсчёт числа комбинаторных конфигураций (комбинаций элементов), образованных из элементов некоторых конечных множеств в соответствии с заданными правилами. Примерами таких комбинаций являются перестановки, размещения и сочетания.

Сочетаниями из n ***элементов по*** m называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только составом элементов. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в одновременном выборе без возвращения любых m элементов из n различных элементов, а их общее число C_n^m определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \ 0! = 1.$$

Размещениями из n ***элементов по*** m называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга как составом элементов, так и порядком их следования. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего сначала в одновременном выборе без возвращения любых m элементов из n различных элементов, а затем в произвольном их упорядочивании. Общее число A_n^m размещений определяется формулой: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Перестановками из n ***элементов*** называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только порядком их следования. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в произвольном упорядочивании множества, состоящего из n различных элементов, а их общее число P_n определяется формулой $P_n = n!$.

Для подсчёта числа всевозможных комбинаторных конфигураций широко используются правила комбинаторики.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - элементы (действия) из некоторого конечного множества элементов (действий), которые можно выбрать (выполнить), соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ способами. Тогда справедливы следующие правила.

Правило сложения. Осуществить выбор (выполнение) только одного из элементов (действий) можно $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило умножения. Осуществить последовательный выбор (выполнение) всех элементов (действий) можно $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Пусть эксперимент состоит в том, что наудачу бросается точка в некоторую область Ω. Слово «наудачу» означает, что в таком эксперименте все точки области Ω «равновозможны». В этом случае вероятность попадания точки в некоторую часть A области Ω равна отношению меры (длины, площади, объёма) этой части к мере всей области Ω: $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, в предположении, что указанные меры определены, причём $\mu(\Omega) \neq 0$. Данное определение вероятности события называют ***геометрическим определением вероятности***.

2. Условная вероятность. Формулы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Всякое случайное событие A можно рассматривать как подмножество Ω (обратное утверждение, вообще говоря, места не имеет), состоящее из всех тех $\omega \in \Omega$, которые благоприятствуют событию A ($\omega \in A$). Множество Ω называют ***достоверным событием***, а пустое множество $\varnothing$, являющееся по определению подмножеством Ω, называют ***невозможным событием***.

Если $A \subset B$, то говорят, что ***событие*** A ***влечёт событие*** B.

Произведением событий A и B называют событие $A \cdot B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходят одновременно оба события A и B. События A и B называют ***несовместными***, если $A \cdot B = \varnothing$.

Суммой событий A и B называют событие $A + B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

Разностью событий A и B называют событие $A \setminus B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, происходящее тогда и только тогда, когда событие A не происходит, называют ***противоположным*** событию A. Разность событий $A \setminus B$ всегда можно представить в виде $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$.

Из определений вероятности следуют следующие её свойства:

1) $P(\varnothing) = 0$ **; 2)** $P(\Omega) = 1$; **3)** $0 \le P(A) \le 1$; **4)** Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$;

5) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; **6)** $P(A+B) = \begin{cases} P(A) + P(B), & \text{если } A \cdot B = \varnothing \\ P(A) + P(B) - P(A \cdot B), & \text{если } A \cdot B \ne \varnothing \end{cases}$.

Пусть A и B - наблюдаемые события в эксперименте, причём $P(A) > 0$. ***Условной вероятностью*** $P(B \mid A)$ осуществления ***события*** B при условии, что событие A произошло в результате данного эксперимента, называется величина, определяемая равенством: $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называются ***независимыми,*** если выполняется равенство $P(B \mid A) = P(B)$ или $P(A \mid B) = P(A)$, в противном случае события A и B называются ***зависимыми***.

Сложным называют событие, наблюдаемое в эксперименте и выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций над событиями.

Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется с помощью ***формул умножения вероятностей***:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, $P(A) > 0$;

2) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (для независимых событий) и ***формул сложения вероятностей***:

3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$;

4) $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (для несовместных событий).

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - наблюдаемые события для данного эксперимента, попарно несовместные ($H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и образующие полную группу событий ($H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$). Такие события H_i принято называть ***гипотезами*** по отношению к событию A. Тогда для любого наблюдаемого в эксперименте события A имеет место ***формула полной вероятности***:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\,|\,H_i), \text{ где } P(H_i)>0.$$

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - совокупность гипотез по отношению к событию A, безусловные вероятности которых $P(H_i)>0$, называемые ***априорными*** (*доопытными*), известны и пусть стало известно, что в результате эксперимента событие A произошло. Тогда ***апостериорные*** (*послеопытные*) вероятности $P(H_i\,|\,A)$ гипотез H_i при условии, что событие A имело место, вычисляются по ***формуле Байеса***:

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}, \text{ где } P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\,|\,H_i).$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятность каждой из гипотез после поступления дополнительной информации относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

3. <u>Схема Бернулли. Формула Бернулли.</u>

Схемой Бернулли называют последовательность испытаний, удовлетворяющую условиям: **1)** результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов: «успех» (появление некоторого события A) и «неудача»; **2)** испытания являются независимыми, т.е. вероятность «успеха» в каждом следующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний; **3)** вероятность «успеха» во всех испытаниях одинакова и равна $P(A)=p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k «успехов», определяется ***формулой Бернулли***:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \; k=0,1,2,\ldots,n.$$

Следствиями формулы Бернулли являются формулы:

1) $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$ - вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли «успех» наступит не более k_1 раз и не менее k_2 раз;

2) $P_n(k \ge 1) = 1-(1-p)^n$ - вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли «успех» наступит хотя бы один раз.

Тема. <u>Случайные величины. Системы случайных величин.</u>

1. Одномерные случайные величины.

Под ***случайной величиной*** X понимают величину, принимающую свои возможные значения x в зависимости от исхода ω эксперимента, с которым она связана.

Законом распределения *(вероятностей)* случайной величины называют любое правило, позволяющее найти вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого подмножества своих возможных значений. Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам, является функция распределения.

Функцией распределения *(вероятностей)* случайной величины X называется функция $F(x)$ действительной переменной x, $-\infty < x < +\infty$, определяемая формулой $F(x) = P(X < x)$.

Каждая функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$, $-\infty < x < +\infty$; **2)** $F(x)$ не убывает;

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; **4)** $F(x)$ непрерывна слева.

Любая неубывающая непрерывная слева действительная функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Вероятность события $a \le X < b$ определяется формулой:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Случайная величина X называется ***дискретной случайной величиной*** (ДСВ), если множество её возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счётно, причём $P(X = x_i) = p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$, где суммирование распространяется на все возможные значения i. Функция распределения в этом случае имеет ступенчатый вид и задаётся формулой $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$.

Закон распределения ДСВ удобно задавать рядом распределения. ***Рядом распределения*** ДСВ называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ этой случайной величины и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \ldots$. Для наглядности закон распределения ДСВ изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i, p_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения***.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число $MX = \sum_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$, если ряд сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется неотрицательное число $DX = M(X - MX)^2$. Число $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ называется ***средним квадратичным отклонением.***

Дисперсию дискретной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i \text{ или } DX = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2 .$$

Пусть C -постоянная величина. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины обладают следующими свойствами:

Свойства математического ожидания: **1)** $MC = C$; **2)** $M(CX) = CMX$; **3)** $M(X \pm Y) = MX \pm MY$; **4)** $M(XY) = MX \cdot MY$, если X и Y независимы.

Свойства дисперсии: **1)** $DC = 0$; **2)** $D(CX) = C^2 DX$; **3)** $D(X \pm C) = DX$; **4)** $DX = M(X^2) - (MX)^2$; **5)** $D(X \pm Y) = DX + DY$, если X и Y независимы.

Случайная величина X называется *(абсолютно)* ***непрерывной случайной величиной*** (НСВ), если её функция распределения представляется в виде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $-\infty < x < +\infty$, где $f(x)$ -неотрицательная и интегрируемая в бесконечных пределах функция, называемая ***функцией плотности*** *(распределения)* ***вероятностей***. Множество возможных значений непрерывной случайной величины несчётно и обычно представляет собой некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой прямой.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X является непрерывной неубывающей функцией на всей числовой прямой, причём вероятность попадания в любую фиксированную точку равна нулю: $P(X = x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$.

Функция $f(x)$ является плотностью вероятностей некоторой НСВ X, тогда и только тогда, когда: **1)** $f(x) \geq 0$ **;** **2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$**.**

Плотность вероятностей $f(x)$ в точках, где $F(x)$ дифференцируема, определяется равенством: $f(x) = F'(x)$. В точках, где $F(x)$ не дифференцируема, плотность вероятностей $f(x)$, определяется произвольным образом, чаще всего по непрерывности слева или справа.

Для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятностей $f(x)$: $P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) =$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, если интеграл сходится абсолютно.

Дисперсию непрерывной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \text{ или } DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2 .$$

Медианой *непрерывной случайной величины* X называется число $Me(X)$, удовлетворяющее условию $P(X < Me) = P(X > Me)$ или $F(Me) = 0.5$.

Начальным моментом k ***-го порядка*** ($k = 0,1,2,\ldots$) распределения случайной величины X (если он существует) называется число $\nu_k = M(X^k)$.

Центральным моментом k ***-го порядка*** ($k = 0,1,2,\ldots$) распределения случайной величины X (если он существует) называется число $\mu_k = M(X - MX)^k$.

Для непрерывной случайной величины X начальные и центральные моменты вычисляют по формулам: $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x)dx$.

2. <u>Основные законы распределения одномерных случайных величин.</u>

Дискретная случайная величина X имеет ***биномиальное распределение*** $B(n, p)$, если**:** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$**,** $k = \overline{0, n}$**.** Если $X \sim B(n, p)$, то: $MX = np$, $DX = npq$.

Дискретная случайная величина X имеет ***распределение Пуассона*** $P(\lambda)$ **если:** $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda>0)$, $k=\overline{0,\infty}$. Если $X\sim P(\lambda)$, то: $MX=\lambda$, $DX=\lambda$.

Непрерывная случайная величина X имеет ***равномерное распределение*** $R(a,b)$, **если:** $f(x)=\begin{cases}1/(b-a) & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}$. Если $X\sim R(a,b)$, то:

$MX=\dfrac{a+b}{2}$, $DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, $P(\alpha\le X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Непрерывная случайная величина X имеет ***показательное распределение*** $E(\lambda)$, **если:** $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & x\ge 0\end{cases}$ $(\lambda>0)$. Если $X\sim E(\lambda)$, то:

$MX=1/\lambda$, $DX=1/\lambda^2$, $P(\alpha\le X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$.

Непрерывная случайная величина имеет ***нормальное распределение*** $N(a,\sigma)$, **если:** $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$, $-\infty<x<+\infty$. Если

$X\sim N(a,\sigma)$, то: $MX=a$, $DX=\sigma^2$, $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$,

$P(\alpha\le X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа, значения которой находят с помощью специальных таблиц.

Тема. <u>Предельные теоремы теории вероятностей.</u>

Если для неотрицательной случайной величины $X\ge 0$ существует математическое ожидание MX, то для всех $\varepsilon>0$ выполняется неравенство:

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{MX}{\varepsilon}$$ (***первое неравенство Чебышева***).

Если для случайной величины X существует дисперсия DX, то для всех $\varepsilon>0$ выполняется ***второе неравенство Чебышева***:

$$P(|X-MX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \text{или} \quad P(|X|\ge\varepsilon)\le\frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}$$

Второе неравенство Чебышева часто используют в виде:

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}, \qquad P(|X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ называют ***сходящейся по вероятности*** к случайной величине X (кратко записывается $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} X$), если для всех $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Говорят, что для последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, имеющих математические ожидания MX_i, $i = 1,2,\ldots$, выполняется ***закон больших чисел***, если $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i$, т.е. для всех $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Закон больших чисел в форме Чебышева. Если последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ такова, что существуют MX_i и DX_i, причём дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то для неё выполняется закон больших чисел, т.е. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i$. В частности, если случайные величины X_i, $i = 1,2,\ldots$ являются также одинаково распределёнными (в этом случае $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$), то $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} a$.

Закон больших чисел в форме Бернулли. Если m_n - число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, то $\frac{m_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} p$, т.е. для всех $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Закон больших чисел в форме Бернулли является частным случаем закона больших чисел в форме Чебышева.

Центральная предельная теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин ($MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, $i = 1,2,\ldots$), тогда последовательность нормированных случайных величин $Z_n = \frac{\overline{X}_n - a}{(\sigma/\sqrt{n})}$, где $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, сходится по распределению при $n \to \infty$ к стандартной нормальной величине $Z \sim N(0,1)$, т.е. для всех $x \in R$: $F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) \underset{n\to\infty}{\to} F_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Тема. <u>Основные понятия и задачи математической статистики. Предварительная обработка экспериментальных данных.</u>

Выборкой объёма n из генеральной совокупности X называется совокупность $x_1, x_2, \dots, x_n$ наблюдаемых значений случайной величины X, соответствующих n независимым повторениям случайного эксперимента с которым связана величина X. В математической статистике генеральную совокупность отождествляют со случайной величиной, совокупность всех возможных значений которой и называют ***генеральной совокупностью***.

Выборка может быть записана в виде вариационного и статистического (дискретного или интервального) рядов. Выборку, записанную в виде статистического ряда, называют ***группированной***.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется такой способ её записи, при котором элементы выборки упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$. Разность $x_{(n)} - x_{(1)} = \widehat{R}$ называется ***размахом выборки***. Всюду в дальнейшем выборочные характеристики будем, как правило, обозначать символом с «$\wedge$» наверху.

Различные значения x_i, $i = \overline{1,k}$ ($k \le n$), называются ***вариантами***. Число n_i повторений варианты x_i в выборке называется её ***частотой,*** а отношение $w_i = n_i / n$ называется её ***относительной частотой***.

Дискретным статистическим рядом называется упорядоченная в порядке возрастания значений вариант x_i последовательность пар (x_i, n_i), $i = \overline{1,k}$. Обычно его записывают в виде таблицы, первая стока которой содержит варианты x_i, а вторая их частоты.

Полигоном частот называется фигура, расположенная под ломаной линией с вершинами в точках $M_i(x_i, n_i)$, построенных в прямоугольной системе координат.

Интервальным статистическим рядом называется последовательность пар (J_i, n_i), $i = \overline{1,k}$, где $J_1, J_2, \dots, J_k$ - непересекающиеся интервалы, как правило, равной длины, объединением которых является отрезок J, содержащий все выборочные значения; n_i - частота интервала J_i, равная числу элементов выборки, значения которых попали в данный интервал. Обычно его записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит границы интервалов или их середины $\tilde{x}_i$, а вторая – частоты интервалов.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна частоте n_i, $i=\overline{1,k}$. Если длины всех интервалов одинаковы и равны h, то высоты прямоугольников равны $\dfrac{n_i}{h}$.

Основные числовые характеристики выборки.

Негруппированная выборка	Группированная выборка
1.Среднее арифметическое выборки	
$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$	$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\tilde{x}_i n_i$
2.Дисперсия выборки	
$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$	$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i-\overline{x})^2 n_i$
3.Исправленная дисперсия выборки: $s^2=n\hat{\sigma}^2\big/(n-1)$	
4. **Размах** выборки: $\hat{R}=x_{\max}-x_{\min}$	

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$ **.**

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha - \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2]$

13. $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	x^{α} $(\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}dx$
2	a^{x} $(a > 0, \neq 1)$	$a^{x} \ln a$	$a^{x} \ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x}dx$
4	$\log_{a} x$ $(a > 0, \neq 1)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\dfrac{dx}{x \ln a}$
5	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos xdx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin xdx$
8	tgx	$\dfrac{1}{\cos^{2} x}$	$\dfrac{dx}{\cos^{2} x}$
9	$ctgx$	$-\dfrac{1}{\sin^{2} x}$	$-\dfrac{dx}{\sin^{2} x}$
10	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
11	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12	$arctgx$	$\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\dfrac{dx}{1+x^{2}}$
13	$arcctgx$	$-\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$-\dfrac{dx}{1+x^{2}}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\dfrac{1}{ch^{2}x}$	$\dfrac{dx}{ch^{2}x}$
17	$cthx$	$-\dfrac{1}{sh^{2}x}$	$-\dfrac{dx}{sh^{2}x}$

Таблица основных неопределенных интегралов.

№ п/п	$\int f(x)dx$	№ п/п	$\int f(x)dx$
1	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$	**2**	$\int (x+a)^k dx = \frac{(x+a)^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**4**	$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$	**6**	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	**8**	$\int \cos x dx = \sin x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**10**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	**12**	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	**14**	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	**16**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
17	$\int shxdx = chx + C$	**18**	$\int chxdx = shx + C$
19	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$	**20**	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
21	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$		
22	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$		

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине «____________________»

Вариант № ____

(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы № ________

***Ф.И.О. студента*__________**

зач. книжка - № __________

Проверил: **преподаватель кафедры математики**

***Ф.И.О. преподавателя*_____**

Набережные Челны

201…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Номер варианта	Номера выполняемых заданий									
	11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
1	**107**	**118**	**129**	**140**	**149**	**158**	**167**	**176**	**185**	**194**
2	**106**	**117**	**128**	**139**	**150**	**159**	**168**	**177**	**186**	**195**
3	**105**	**116**	**127**	**138**	**149**	**160**	**169**	**178**	**187**	**196**
4	**104**	**113**	**122**	**133**	**144**	**153**	**162**	**173**	**184**	**193**
5	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**192**
6	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**180**	**190**	**200**
7	**109**	**119**	**129**	**139**	**149**	**159**	**169**	**179**	**189**	**199**
8	**106**	**115**	**124**	**133**	**142**	**151**	**162**	**173**	**184**	**195**
9	**107**	**117**	**127**	**137**	**147**	**157**	**167**	**177**	**187**	**197**
10	**106**	**116**	**126**	**136**	**146**	**156**	**166**	**176**	**186**	**196**
11	**105**	**115**	**125**	**135**	**145**	**155**	**165**	**175**	**185**	**195**
12	**104**	**114**	**124**	**134**	**144**	**154**	**164**	**174**	**184**	**194**
13	**103**	**113**	**123**	**133**	**143**	**153**	**163**	**173**	**183**	**193**
14	**102**	**112**	**122**	**132**	**142**	**152**	**162**	**172**	**182**	**192**
15	**101**	**111**	**121**	**131**	**141**	**151**	**161**	**171**	**181**	**191**
16	**104**	**113**	**122**	**131**	**142**	**153**	**164**	**175**	**186**	**197**
17	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**154**	**165**	**176**	**187**	**198**
18	**102**	**111**	**122**	**133**	**144**	**155**	**166**	**177**	**188**	**199**
19	**110**	**119**	**128**	**137**	**146**	**155**	**164**	**173**	**182**	**191**
20	**109**	**118**	**127**	**136**	**145**	**154**	**163**	**172**	**181**	**192**
21	**108**	**117**	**126**	**135**	**144**	**153**	**162**	**171**	**182**	**193**
22	**107**	**116**	**125**	**134**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**194**
23	**108**	**118**	**128**	**138**	**148**	**158**	**168**	**178**	**188**	**198**
24	**105**	**114**	**123**	**132**	**141**	**152**	**163**	**174**	**185**	**196**
25	**104**	**115**	**126**	**137**	**148**	**159**	**170**	**179**	**188**	**197**
26	**103**	**114**	**125**	**136**	**147**	**158**	**169**	**180**	**189**	**198**
27	**102**	**113**	**124**	**135**	**146**	**157**	**168**	**179**	**190**	**199**
28	**101**	**112**	**123**	**134**	**145**	**156**	**167**	**178**	**189**	**200**
29	**109**	**120**	**129**	**138**	**147**	**156**	**165**	**174**	**183**	**192**
30	**108**	**119**	**130**	**139**	**148**	**157**	**166**	**175**	**184**	**193**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е