

# Гипершашки.

**Дана** последовательность  $X$ , содержащая  $n$  целых чисел

$$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \quad (1 \leq x_i \leq 10^9, 3 \leq n \leq 10^5).$$

**Найти** количество различных последовательностей из трёх чисел, которые можно составить из элементов последовательности  $X$ , при условии, что числа в искомым последовательностях могут различаться между собой не более, чем в  $k$  раз ( $1 \leq k \leq 10^9$ ).

### Анализ.

Искомые последовательности могут состоять:

- из трёх различных чисел, каждая такая тройка порождает 6 искомых последовательностей;
- из двух одинаковых и третьего отличающегося числа, каждая такая тройка порождает 3 искомых последовательности;
- из трёх одинаковых чисел, каждая такая тройка даёт 1 искомую последовательность (отметим, что при  $k=1$  возможны только такие последовательности).

**Следовательно**, надо определить, какие различающиеся числа и в каком количестве содержатся в последовательности  $X$ . Для этого сначала упорядочим последовательность  $X$  по возрастанию, затем запишем в массив  $A$  различающиеся числа из последовательности  $X$ , заодно подсчитывая их количество  $m$ , а в массив  $KA$  запишем количества вхождений каждого из них.

//сортировка с временной сложностью  $O(n \times \log(n))$

m:=1; a[1]:=x[1]; ka[1]:=1;

For i:=2 To n Do

  If x[i]=x[i-1]

  Then Inc(ka[m])

  Else Begin

    Inc(m);

    a[m]:=x[i]; ka[m]:=1;

  End;

Отметим, что в массиве a[1 .. m] все числа различны и идут в возрастающем порядке.

Начнём подсчёт искомым последовательностей.

Сначала учтём все последовательности, состоящие из одинаковых чисел:

```
ans:=0; // учитывая исходные данные, опишем ans: Int64;  
//три одинаковых числа
```

```
For I := 1 To m Do
```

```
  If ka[i] > 2 Then Inc(ans);
```

Добавим количество последовательностей, содержащих два одинаковых числа. При этом сначала учтём последовательности, в которые дважды входит большее значение. Для этого посмотрим все элементы  $a[i]$ ,  $i=2,3,\dots,m$ , для каждого из них определим минимальное  $a[j]$ , удовлетворяющее условию  $a[j]^k \leq a[i]$ . Тогда, если  $ka[i] > 1$ , то к двум экземплярам  $a[i]$  можно добавить любое из чисел  $a[j]$ ,  $a[j+1]$ , ...,  $a[i-1]$ . Таким образом, можно составить  $(i-j)$  троек, а из каждой тройки получить 3 искомым последовательности.

```
// два одинаковых числа
J:=1;
For i := 2 To m Do Begin
  While ( j < i ) And ( a[j] * k < a[i] ) Do Inc(j);
  If ka [i]>1 Then ans := ans + ( i-j ) * 3;
End;
```

Обратим внимание на то, что для каждого нового значения  $i$  подбор  $j$  начинается от уже достигнутого значения, и вложенный цикл по  $j$  не нужен.

Аналогично учтём те последовательности, в которые дважды входит меньшее значение:

```
J:=m;
For I := m-1 DownTo 1 To Begin
  While ( j > I ) And ( a[i]*k < a[j] ) Do Dec(j);
  If ka[i] > 1 Then ans := ans + ( j-i ) * 3;
End;
```

Наконец, похожим способом подсчитаем количество последовательностей, в которых все числа разные. Перебирая значения  $a[2], a[3], \dots, a[m]$ , для каждого из них определим минимальное значение  $a[j]$ , которое удовлетворяет условию  $a[j]^k \geq a[i]$ . Таких значений  $(i-j)$ . Любые два из них можно добавить к  $a[i]$  и получить  $C_{(i-j)}^2 = (i-j) \times (i-j-1) \div 2$  троек из разных чисел, а из каждой тройки образовать шесть последовательностей.

```
J:=1;
```

```
For i:=2 To m Do Begin
```

```
    While (j<i) And (a[j]^k < a[i]) Do Inc(j);
```

```
    ans:=ans + (i-j)*(i-j-1)*3;
```

```
End;
```

Таким образом, количество возможных последовательностей ans вычислено.