Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 25–32

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.С. КАЛИНИНА, С.С. МАРЧЕНКОВ

О СЛОЖНОСТИ ПРОБЛЕМЫ ВЫПОЛНИМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СЧЕТНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Аннотация. Рассматривается проблема выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики, содержащих тернарный дискриминатор p. Доказывается, что данная проблема является m-полной в классе Π_1 иерархии Клини–Мостовского.

Ключевые слова: функциональные уравнения, счетнозначная логика, проблема выполнимости.

УДК: 519.716

Функциональные уравнения широко применяются практически во всех разделах математики. Отличительная особенность функциональных уравнений состоит в том, что в качестве решений данных уравнений рассматриваются функции и наборы функций, тогда как предметные переменные в уравнениях находятся под кванторами общности и по существу лишь "очерчивают" основную предметную область. Выразительные возможности языка функциональных уравнений значительно превосходят выразительные возможности языка уравнений, не содержащих функциональных переменных. Этим во многом объясняется широкое распространение функциональных уравнений.

В дискретной математике систематические исследования по функциональным уравнениям начались сравнительно недавно. В области функциональных булевых уравнений и функциональных уравнений многозначной логики отметим работы [1]–[10]. В работах [4]–[9], в частности, полностью решен вопрос об определимости множеств функций системами функциональных уравнений над произвольными множествами функциональных констант. Стоит также сказать, что проблема выполнимости для систем функциональных уравнений многозначной логики может быть решена алгоритмами переборного типа, однако полиномиальными алгоритмами эту проблему решить нельзя [10].

При переходе от функциональных уравнений многозначной логики к функциональным уравнениям счетнозначной логики происходит качественный скачок: большая часть рассматриваемых проблем далеко выходит за рамки алгоритмической эффективности [11], [12]. В связи с этим проблему выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики имеет смысл рассматривать только для систем уравнений, которые либо вообще не содержат функциональных констант, либо содержат "очень слабые" функциональные константы. К таким функциональным константам относим тернарный дискриминатор p — функцию, хорошо известную в универсальной алгебре, теории функций многозначной логики, а также теории рекурсивных функций [13]–[15].

Поступила 06.06.2014

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00958).

Выбор функции p обусловлен следующими причинами. Во-первых, дискриминатор p является однородной функцией [13], т. е. максимально "симметричной" функцией (функцией с максимально возможной группой автоморфизмов). Поэтому с помощью функции p невозможно ни "выбрать" конкретное натуральное число, ни определить какую-либо из известных арифметических функций. Во-вторых, дискриминатор p позволяет в рамках систем функциональных уравнений "различать" неравные натуральные числа. Это свойство дает возможность с использованием дискриминатора p перейти от языка функциональных уравнений к более богатому языку QFEC, включающему полную систему логических связок и кванторы по предметным переменным [11]. Язык QFEC оказывается наиболее удобным средством для построения формул, имеющих отношение к рассматриваемой проблеме выполнимости. Поэтому именно он используется при доказательстве неразрешимости проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений с функциональной константой p.

Как отмечалось, проблема выполнимости для систем функциональных уравнений многозначной логики алгоритмически разрешима. Техника получения основного результата из [10] показывает, что системами функциональных уравнений можно моделировать вычисления на досточно мощных вычислительных устройствах. В случае счетнозначной логики и при наличии функциональных констант 0, $x+1$ с помощью систем функциональных уравнений удается "изобразить" даже неарифметические (по Клини–Мостовскому) функции [12]. Однако в отсутствие простейшей "арифметики" возможности моделирования резко сужаются. Тем не менее средствами языка QFEC удалось выразить формулы чистого исчисления предикатов. Фактически это означает, что в языке QFEC (а также в языке функциональных уравнений с функциональной константой p) все-таки возможно моделирование некоторых алгоритмических вычислений.

Целью данной работы является определение положения проблемы выполнимости (для языка функциональных уравнений с функциональной константой p) в арифметической иерархии Клини–Мостовского. В теоремах 1, 2 показывается, что эта проблема принадлежит классу Π_1 иерархии и, более того, является m-полной в классе Π_1.

Введем необходимые определения. Пусть $N = \{0, 1, \dots\}$, P_N — множество всех функций на N (множество функций счетнозначной логики). Если $Q \subseteq P_N$ и $n \geqslant 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначим множество всех функций из Q, зависящих от n переменных.

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [11], [12]. Для обозначения n-местных функций из P_N используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем функциональными константами. Наряду с функциональными константами рассматриваем функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ со значениями в области $P_N^{(n)}$. Кроме функциональных переменных используем обычные предметные переменные $x_1, x_2, \dots$ с областью значений N. Далее для большей выразительности используем также предметные переменные x, y и функциональные переменные ψ_i.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие *терма над* Q. Всякая предметная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \dots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n), \quad \varphi_j^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$$

суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q считаем также функциональными уравнениями над Q. Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \dots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. *Решением уравнения*

$t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_N, которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение предметных переменных). Если Ξ — конечная система уравнений, то *решением системы уравнений* Ξ называем систему функций из P_N, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Определим тернарный дискриминатор $p(x, y, z)$:

$$p(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y; \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Проблемой выполнимости для системы функциональных уравнений назовем проблему существования хотя бы одного решения для данной системы уравнений. В дальнейшем будем рассматривать только системы функциональных уравнений над множеством, состоящим из одной функциональной константы p.

Теорема 1. *Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений с функциональной константой p алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Покажем неразрешимость проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений путем сведения к ней проблемы разрешимости для чистого исчисления предикатов (ЧИП).

Прежде всего, расширим язык функциональных уравнений. Добавим к нему полную систему логических связок, а также кванторы существования и общности по предметным переменным. Полученный язык обозначим QFEC [11]. Вместо систем функциональных уравнений будем рассматривать в языке QFEC логические формулы, которые построены по обычным логическим правилам из элементарных формул — равенств термов. Выполнимость (замкнутой) формулы в языке QFEC понимается стандартным образом: как существование функций из P_N, которые после замены ими всех функциональных переменных рассматриваемой формулы обращают ее в истинное высказывание.

В работе [11] показано, как эффективно по произвольной (замкнутой) формуле языка QFEC построить эквивалентную ей по выполнимости систему функциональных уравнений над множеством $\{p\}$. В связи с этим в доказательстве данной теоремы будем рассматривать проблему выполнимости для замкнутых формул языка QFEC.

Нетрудно видеть, что формуле

$$(\forall x)(\forall y)((\varphi_0(x) = \varphi_0(y)) \& (\varphi_1(x) = \varphi_1(y)) \& (\varphi_0(x) \neq \varphi_1(x))) \tag{1}$$

по переменным φ_0, φ_1 удовлетворяют лишь любые две неравные константы (как обычно, формулу $\neg(\varphi_0(x) = \varphi_1(x))$ записываем в виде $\varphi_0(x) \neq \varphi_1(x)$). Символически будем обозначать их как v_0 и v_1.

Далее v_0 и v_1 будут играть роль истинностных значений "ложь" и "истина". В связи с этим определим на множестве $\{v_0, v_1\}$ "логические связки" отрицание φ_2 и дизъюнкцию φ_3:

$$(\forall x)(\varphi_2(\varphi_0(x)) = \varphi_1(x) \& \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_0(x)),$$

$$\begin{aligned}(\forall x)(\varphi_3(\varphi_0(x), \varphi_0(x)) = \varphi_0(x) \& \varphi_3(\varphi_0(x), \varphi_1(x)) = \varphi_1(x) \& \\ \& \varphi_3(\varphi_1(x), \varphi_0(x)) = \varphi_1(x) \& \varphi_3(\varphi_1(x), \varphi_1(x)) = \varphi_1(x)).\end{aligned} \tag{2}$$

Другие логические связки (в частности, конъюнкция) могут быть определены обычным образом через отрицание и дизъюнкцию.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением функций, которые принимают лишь значения v_0 и v_1. С этой целью для всякой используемой функциональной переменной $\varphi_i^{(n)}$ будем конъюнктивно добавлять к рассматриваемым формулам формулу

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\varphi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n)=\varphi_0(x_1)\vee\varphi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n)=\varphi_1(x_1)). \tag{3}$$

Понятно, что такие "ограниченные" функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ можно считать n-местными предикатными переменными. В этой связи стоит заметить, что хотя формуле (1) удовлетворяют любые две неравные константы, однако если в рассматриваемой формуле Φ конъюнктивно присутствует только одна формула (1), а всякая используемая в Φ функциональная переменная ограничена условием (3), то в формуле Φ значения v_0, v_1 можно считать фиксированными. Это позволяет "изобразить" в языке QFEC язык ЧИП.

Действительно, пусть Γ — замкнутая формула ЧИП, содержащая только символы предикатных переменных $Q_1,\dots,Q_r$. Будем предполагать, что формула Γ находится в предваренной нормальной форме. Вводим функциональные переменные $\psi_1,\dots,\psi_r$ от тех же предметных переменных, что и предикатные переменные $Q_1,\dots,Q_r$. Определяем аналог формулы Γ — формулу Φ': сначала заменяем в формуле Γ каждый символ Q_i соответствующим символом ψ_i, а затем с помощью функциональных переменных φ_2 и φ_3 последовательно исключаем из полученной формулы логические связки. Образуется терм T, который состоит только из символов предметных переменных и символов функциональных переменных φ_2, φ_3, $\psi_1,\dots,\psi_r$. Теперь образуем из терма T формулу $(\exists x)(T=\varphi_1(x))$, где переменная x не входит в формулу Γ. Для получения формулы Φ' остается к последней формуле приписать кванторную приставку из формулы Γ.

Нетрудно видеть, что формула Φ' полностью моделирует формулу Γ, если только считать, что переменные $\psi_1,\dots,\psi_r$ принимают лишь значения v_0, v_1, а переменные φ_2, φ_3 на множестве $\{v_0,v_1\}$ изображают отрицание и дизъюнкцию. Поэтому далее конъюнктивно добавляем к формуле Φ' формулы (1), (2) (считая, что переменные φ_0–φ_3 отличны от переменных $\psi_1,\dots,\psi_r$) и r формул вида (3) — по формуле на каждый функциональный символ ψ_i. Получаем формулу Φ языка QFEC.

Из проведенного построения сразу следует, что формула Γ выполнима на множестве N тогда и только тогда, когда на множестве N выполнима формула Φ. Однако, как известно, формула Γ выполнима (на непустом множестве) в том и только том случае, когда она выполнима на счетном множестве N. Таким образом, эффективно свели (на самом деле m-свели) проблему выполнимости формул ЧИП к проблеме выполнимости формул языка QFEC. Хорошо известно, что множество выполнимых формул ЧИП неразрешимо (оно даже является m-полным множеством в классе Π_1). Поэтому неразрешимым будет множество выполнимых формул языка QFEC и вместе с ним — множество выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p\}$. □

Теорема 2. *Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p\}$ принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини–Мостовского.*

Доказательство. Пусть Ξ — произвольная система функциональных уравнений над множеством $\{p\}$. По системе Ξ эффективным образом будем строить дерево Δ (вообще говоря, бесконечное), все вершины которого имеют конечную степень. В каждой вершине дерева Δ, за исключением его корня, для всякой функциональной переменной φ_i, входящей в систему Ξ, будут определяться в конечном числе точек значения соответствующей функции f_i. Некоторые ветви дерева Δ в процессе построения будут отсекаться (точнее, будут целиком отсекаться некоторые поддеревья, "растущие" из вершин дерева Δ). Покажем, что система уравнений Ξ выполнима тогда и только тогда, когда в данном дереве Δ имеется хотя бы одна бесконечная ветвь. Существование бесконечной ветви в дереве Δ будет выражено формулой класса Π_1.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все предметные переменные, входящие в систему Ξ. Зафиксируем вычислимую "канторовскую" нумерацию множества N^n, в которой нулевой набор имеет номер 0, а далее номера присваиваются последовательно в "блоках", состоящих из всех наборов с заданной суммой координат. Набор с номером k в этой нумерации будем обозначать через $\mathbf{x}_k$. Отметим, что в наборе $\mathbf{x}_k$ все компоненты не превосходят величины k. Выделим в системе Ξ все вхождения функциональных переменных и обозначим их $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ (в этом списке возможны повторения).

Опишем шаг 1 в построении дерева Δ — определение вершин первого яруса (вершины, связанные ребрами с корнем дерева). Рассмотрим набор $\mathbf{x}_0$ и придадим всем предметным переменным $x_1, \ldots, x_n$ системы Ξ значение 0. Далее, каждому из полученных термов системы Ξ, который начинается с функциональной переменной, придадим одно из значений $0, 1, \ldots, m$. Отметим, что при фиксировании набора $\mathbf{x}_0$ для "означивания" всех термов системы Ξ (включая термы вида $p(t_1, t_2, t_3)$) достаточно значений из множества $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Всего имеется $(m+1)^m$ таких присвоений, этим присвоениям будут отвечать в дереве Δ $(m+1)^m$ вершин первого яруса. Как видно, в результате одного присвоения каждая функция f_i (отвечающая функциональной переменной φ_i) будет определена в конечном числе точек. Действительно, если в систему Ξ входит терм вида $\varphi_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, то функция f_i будет определена на нулевом наборе. Если же в систему Ξ входит терм вида $\varphi_i(t_1, \ldots, t_s)$, где $t_1, \ldots, t_s$ — термы, и в результате присвоения термы $t_1, \ldots, t_s$ получили значения $a_1, \ldots, a_s$, то функция f_i получит значение на наборе $(a_1, \ldots, a_s)$. (Не рассматриваем отдельно термы, которые начинаются символом функциональной константы p, поскольку вычисление значений таких термов проводится очевидным образом.)

При выполнении присвоений следует соблюдать следующее естественное условие: если для нескольких различных вхождений одной и той же функциональной переменной φ_i в результате присвоения определяются значения функции f_i на одном и том же наборе, то эти значения должны быть равны.

Для каждого присвоения проверяем, может ли оно обеспечить истинность всех равенств системы (напомним, что на шаге 1 всем предметным переменным присвоено значение 0). Если возникло противоречие, то прекращаем дальнейшее построение дерева Δ из данной вершины. Если же противоречивых равенств из системы Ξ не получено, то фиксируем значения, присвоенные функциональным переменным на рассматриваемых наборах (т. е. фактически значения функций f_i), и переходим к построению вершин второго яруса.

Предположим, что уже определили все вершины k-го яруса дерева Δ (все те вершины, к которым в построенном фрагменте дерева Δ ведут из корня пути длины k). Будем также считать, что на всех вершинах дерева с 1-го по k-й ярусы в операциях присвоения были использованы числа только из множества $\{0, 1, \ldots, k(m+1)-1\}$. Кроме того, предполагаем, что в результате предыдущих присвоений в каждой из построенных вершин дерева Δ соответствующие функции f_i уже корректно определены на некоторых наборах из декартовых степеней множества $\{0, 1, \ldots, k(m+1)-1\}$.

На всех вершинах $(k+1)$-го яруса будем рассматривать набор $\mathbf{x}_k$, все компоненты которого не превосходят k. Выберем в k-м ярусе вершину v. Присвоим переменным $x_1, \ldots, x_n$ соответствующие значения из набора $\mathbf{x}_k$. Будем далее присваивать всем термам, которые отвечают вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ функциональных переменных, независимым образом всевозможные значения из множества $\{0, 1, \ldots, (k+1)(m+1)-1\}$. При этом присвоения должны быть корректными (см. шаг 1 в построения дерева Δ) и согласованными с уже имеющимися в вершине v значениями функций f_i. Образуется не более $(k+1)^m(m+1)^m$ вершин $(k+1)$-го яруса, которые будут соединены в дереве Δ ребрами с вершиной v. Как и на шаге 1, для всякого присвоения осуществляем проверку выполнимости всех равенств системы Ξ. В случае невыполнения какого-либо из равенств системы Ξ (с присвоенными значениями) обрываем построение дерева Δ в соответствующей вершине. В противном случае рассматриваем набор $\mathbf{x}_{k+1}$ и переходим к построению яруса $k+2$.

Нетрудно видеть, что процесс построения дерева Δ является полностью эффективным: существует алгоритм, который по "координате" произвольной вершины дерева Δ определяет, является ли данная вершина концевой, а если нет, то вычисляет значения функций f_i во всех рассматриваемых точках.

Предположим теперь, что в дереве Δ имеется бесконечная ветвь B. Проходя по всем вершинам ветви B, сможем для любой функциональной переменной φ_i системы Ξ корректно определить значения соответствующей функции f_i на некотором множестве точек F_i. При этом, как легко понять, набор функций f_i будет удовлетворять системе уравнений Ξ. Единственная возникающая здесь проблема состоит в том, что множество F_i не обязано быть полным (т. е. совпадать с надлежащей декартовой степенью множества N). Иными словами, определяемые на ветви B функции f_i будут, вообще говоря, частичными. Эту проблему можно легко решить, если заметить, что полученная система функций f_i удовлетворяет системе уравнений Ξ при всех значениях предметных переменных. Это означает, в частности, что наборы, не входящие в множество F_i, в данном решении системы уравнений Ξ вообще не используются. Поэтому на них значения функции f_i можно определить произвольным образом.

Обратно, предположим, что система уравнений Ξ имеет решение. Покажем, что в этом случае в дереве Δ существует хотя бы одна бесконечная ветвь.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ — все функциональные переменные системы уравнений Ξ, а набор функций $(f_1, \ldots, f_l)$ из P_N удовлетворяет системе Ξ. Рассмотрим сначала нулевой набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если заменить в системе Ξ все предметные переменные значением 0 и затем рассматривать последовательно все термы системы Ξ, содержащие функциональные переменные, то с использованием функций $f_1, \ldots, f_l$ для всех вхождений $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ функциональных переменных в систему Ξ можно найти соответствующие значения $a_1, \ldots, a_m$ (это, разумеется, значения функций $f_1, \ldots, f_l$, вычисленные на тех наборах, которые имплицируются в системе Ξ равенствами $x_1 = \ldots = x_n = 0$). Отметим, что в последовательности $a_1, \ldots, a_m$ некоторые значения могут совпадать.

Заменим числа из последовательности $a_1, \ldots, a_m$ наименьшими числами из множества $\{0, 1, \ldots, m\}$ (с сохранением отношения равенства/неравенства между элементами последовательности $a_1, \ldots, a_m$), причем так, чтобы сохранить нулевые значения, если они имеются. Образуется набор $b_1, \ldots, b_m$. Этот набор вместе с нулевыми значениями всех предметных переменных будет удовлетворять системе Ξ, поскольку при определении истинностных значений равенств системы Ξ важны лишь соотношения равенства/неравенства между значениями термов, входящих в Ξ (учитываем также аналогичное свойство тернарного дискриминатора p). Таким образом, на первом шаге построения дерева Δ на одной из вершин первого яруса всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ будут присвоены соответственно значения $b_1, \ldots, b_m$.

Далее продолжаем по индукции. Предположим, что для числа k имеется вершина v дерева Δ, расположенная в $(k+1)$-м ярусе дерева, которая удовлетворяет следующим условиям. Для любого набора $\mathbf{x}_j$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$ в вершине v всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ присвоены значения $b_1, \ldots, b_m$, которые принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, (j+1)(m+1) - 1\}$ и которые отвечают набору $\mathbf{x}_j$ согласно алгоритму построения дерева Δ. Кроме того, если на основе функций $(f_1, \ldots, f_l)$ для набора $\mathbf{x}_j$ вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ приписаны значения $a_1, \ldots, a_m$, то отношения равенства/неравенства между элементами наборов $\mathbf{x}_j$ и $(a_1, \ldots, a_m)$ с одной стороны и элементами наборов $\mathbf{x}_j$ и $(b_1, \ldots, b_m)$ с другой стороны идентичны.

Пусть теперь для функций $(f_1, \ldots, f_l)$ и набора $\mathbf{x}_{k+1}$ вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ отвечают значения $a'_1, \ldots, a'_m$. Заметим, что в соответствии с принятой нумерацией наборов из множества N^n набор $\mathbf{x}_{k+1}$ может содержать максимум одно значение, не входящее в наборы $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$. Поэтому в наборах $\mathbf{x}_{k+1}$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$ может быть максимум $m+1$ значений, которые не содержатся в наборах $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$ и отвечающих им наборах $(a_1, \ldots, a_m)$. Это позволяет согласно алгоритму построения дерева Δ найти в $(k+2)$-м ярусе дерева Δ вершину v' (соединенную ребром с вершиной v), которой, в частности, будут приписаны значения $b'_1, \ldots, b'_m$ из множества $\{0, 1, \ldots, (k+2)(m+1)-1\}$. Кроме того, значения $b'_1, \ldots, b'_m$ будут находиться в том же отношении равенства/неравенства с остальными значениями, приписанными вершине v', как и значения $a'_1, \ldots, a'_m$ с остальными значениями a_i, отвечающими функциям $(f_1, \ldots, f_l)$ и наборам $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Из проведенных рассуждений следует, что если система уравнений Ξ имеет решение, то в дереве Δ существует бесконечная ветвь.

Теперь формально опишем условие существования бесконечной ветви в дереве Δ. Нетрудно видеть, что бесконечная ветвь в дереве Δ существует в том и только том случае, когда для всякого k в дереве Δ имеется хотя бы одна вершина k-го яруса. В связи с этим вводим предикат $R(k)$, истинный тогда и только тогда, когда k-й ярус дерева Δ содержит хотя бы одну вершину. Поскольку построение дерева Δ проводится полностью эффективно, предикат R будет рекурсивным. Отсюда немедленно следует, что проблема существования бесконечной ветви в дереве Δ выражается формулой $(\forall k) R(k)$. Остается заметить, что как дерево Δ, так и предикат R определяются по системе функциональных уравнений Ξ эффективно. $\square$

Следствие. Множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p\}$ является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини–Мостовского.

Необходимо заметить, что множество всех общезначимых формул ЧИП является m-полным множеством (m-полным в классе Σ_1). Отсюда следует, что множество всех формул, выполнимых на N, есть m-полное множество в классе Π_1.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Ekin O., Foldes S., Hammer P. L., Hellerstein L. *Equational characterizations of Boolean function classes*, Discrete Math. **211**, 27–51 (2000).

[2] Foldes S. *Equational classes of Boolean functions via the HSP theorem*, Algebra Univers. **44**, 309–324 (2000).

[3] Pippenger N. *Galois theory for minors of finite functions*, Discrete Math. **254**, 405–419 (2002).

[4] Марченков С.С. *Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях*, Дискрет. анализ и исслед. операций **17** (4), 18–31 (2000).

[5] Марченков С.С. *О классификациях функций многозначной логики с помощью групп автоморфизмов*, Дискрет. анализ и исслед. операций **18** (4), 66–76 (2011).

[6] Марченков С.С. *FE-классификация функций многозначной логики*, Вест. МГУ **15** (2), Вычисл. матем. и кибернетика, 32–39 (2011).

[7] Марченков С.С., Федорова В.С. *О решениях систем функциональных булевых уравнений*, Дискрет. анализ и исслед. операций **15** (6) 48–57 (2008).

[8] Марченков С.С., Федорова В.С. *О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики*, Докл. РАН **426** (4), 448–449 (2009).

[9] Марченков С.С., Федорова В.С. *Решения систем функциональных уравнений многозначной логики*, Вест. МГУ **15** (4), Вычисл. матем. и кибернетика 29–33 (2009).

[10] Федорова В.С. *О сложности проблемы выполнимости системы функциональных булевых уравнений*, Дискрет. анализ и исслед. операций **20** (3), 84–100 (2013).
[11] Марченков С.С. *Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики*, Дискрет. матем. **25** (4), 13–23 (2013).
[12] Марченков С.С., Калинина И.С. *Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике*, Вест. МГУ. **15** (3), Вычисл. матем. и кибернетика, 42–47 (2013).
[13] Марченков С.С. *Однородные алгебры*, Пробл. кибернетики **39**, 85–106 (1982).
[14] Марченков С.С. *Элементарные рекурсивные функции* (МЦНМО, М., 2003).
[15] Pixley A.F. *The ternary discriminator function in universal algebra*, Math. Ann., **191**, 167–180 (1971).

И.С. Калинина

аспирант, кафедра математической кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, ГСП-1, г. Москва, 119991, Россия,

`e-mail:` isenilova@gmail.com

С.С. Марченков

профессор, кафедра математической кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, ГСП-1, г. Москва, 119991, Россия,

`e-mail:` ssmarchen@yandex.ru

I.S. Kalinina and S.S. Marchenkov

On complexity of problem of satisfiability for systems of countable-valued functional equations

Abstract. We consider the problem of satisfiability for systems of countable-valued functional equations, containing ternary discriminator function p. We prove that this problem is m-complete in the class Π_1 of Kleene–Mostovsky's hierarchy.

Keywords: functional equations, countable-valued logic, problem of satisfiability.

I.S. Kalinina

Postgraduate, Chair of Mathematical Cybernetics,
Moscow State University,
1 Leninskie Gory Bld. 52, GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

`e-mail:` isenilova@gmail.com

S.S. Marchenkov

Professor, Chair of Mathematical Cybernetics,
Moscow State University,
1 Leninskie Gory Bld. 52, GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

`e-mail:` ssmarchen@yandex.ru