

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ

АНИМАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ С РЯДАМИ
ФУРЬЕ

в пакете Maple XVII

Выпускная квалификационная работа
студентки Каримовой И.И.
Научный руководитель: Игнатъев Ю.Г.
доктор физ.-мат. наук, профессор

Казань 2014 год

© Оформление: LaTeX - стиль $\mathcal{B}L\mathcal{B}L\mathcal{O}$ профессора Ю.Г.Игнатъева

Оглавление

Введение	3	
I	Ряды Фурье	4
I.1	Периодические величины и гармонический анализ	4
I.2	Определение коэффициента по методу Эйлера - Фурье	6
I.3	Ортогональные системы функций	8
I.4	Тригонометрическое интерполирование	9
II	Разложение функций в ряд Фурье	12
II.1	Постановка задачи. Интеграл Дирихле	12
II.2	Первая основная лемма	14
II.3	Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье	15
II.4	Вторая основная лемма	18
II.5	Признак Дирихле - Жордана	19
II.6	Разложение только по косинусам или только по синусам	21
III	Теория рядов Фурье в пакете Maple	25
III.1	Создание собственных процедур. Разложение функции в ряд Фурье . .	25
III.2	Процедура разложение функции в ряд Фурье	27
III.3	Создание анимационной процедуры для рядов Фурье	28
III.4	Примеры применения анимационных процедур	29
Заключение	36	
Литература	38	

Введение

Целью моей квалификационной работы является создание программных процедур анимации процесса вычисления рядов Фурье в пакете компьютерной математики Maple XVII. Квалификационная работа состоит из Введения, 3 глав, Заключения и Списка литературы. В 3 главе содержится описание авторских пользовательских процедур по анимации процесса вычисления рядов Фурье. В Заключении кратко сформулированы основные результаты.

Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы LaTeX2 ϵ . Она позволяет автору набрать свою рукопись применением уже готовых форматов и распечатать ее с высоким полиграфическим качеством. При этом использовался специальный стиль профессора проф. Ю.Г. Игнатьева, содержащие макросы, удобные для оформления работы, особенно для импорта графики в LaTeX2 ϵ . Основными литературными источниками по рядам Фурье были книги Г.М. Фихтенгольца, дополнительными книгами, использованными в моей работе была книга Пискунова. По издательской системе LaTeX использовалась, в основном, книга С. Львовского.

Глава I

Ряды Фурье

I.1 Периодические величины и гармонический анализ

В науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, то есть такими, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени T , называемый *периодом*. Примером может служить установившееся движение паровой машины, которая по истечении определенного числа оборотов снова проходит через свое начальное положение, затем явление переменного тока, и т. п. Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям и представляют, следовательно, *периодические функции* от времени t , характеризуемые равенством

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока или - в примере паровой машины - путь, скорость и ускорение кривокопфа, давление пара, касательное усилие в пальце кривошипа и т. д. Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является *синусоидальная величина*: $A \sin(\omega t + a)$, где ω есть частота, связанная с периодом T соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{I.1})$$

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Наперед ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо, как легко убедиться, сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, ибо приводит опять к синусоидальной величине, притом той же частоты. Наоборот, если сложить несколько величин вида

$$y_0 = A_0, y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \dots, \}$$

которые, если не считать постоянной, имеют частоты

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, \quad (\text{I.2})$$

кратные наименьшей из них, ω , и периоды

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots,$$

то получается *периодическая* функция (с периодом T), но уже существенно отличная от величин типа (2).

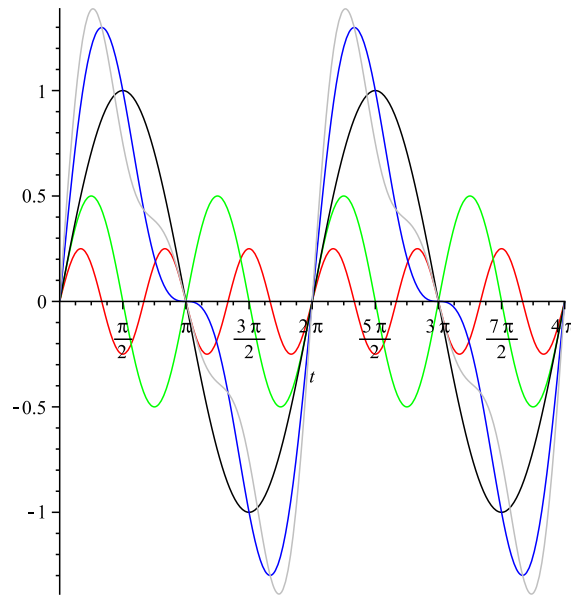


Рис. 1. Сумма трех синусоидальных величин

Для приема мы воспроизводим здесь (рис.1) сложение трех синусоидальных величин:

$$\sin t, \frac{1}{2} \sin 2t, \frac{1}{4} \sin 3t;$$

график этой функции по своему характеру уже значительно разнится от синусоиды. Еще в большей степени это имеет место для суммы *бесконечного* ряда, составленного из величин вида (2).

Теперь естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (2)? Как увидим ниже, по отношению довольно к широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, но только если привлечь именно *всюбесконечную* последовательность величин (2). Для функций этого класса имеет место разложение в "тригонометрический ряд":

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots =;$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (I.3)$$

причем $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \dots$ суть постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота ω дается формулой (1).

Геометрически это означает, что *график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид*. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что здесь *сложное колебание, характеризуемое функцией $\varphi(t)$, разлагается на отдельные гармонические колебания*. В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения (3), называют *гармоническими составляющими* функции $\varphi(t)$ или просто её *гармониками*. Сам же процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа*.

Если за независимую переменную выбрать

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

то получится функция от x :

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом 2π . Разложение же (3) примет вид

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \dots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \quad (\text{I.4})$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы и положив

$$A_0 = \alpha_0, A_n \sin \alpha_n = a_n, A_n \cos \alpha_n = b_n (n = 1, 2, 3, \dots),$$

мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = \\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (\text{I.5})$$

Здесь функция от угла x , имеющая период 2π , оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных x .

Мы пришли к разложению функции в тригонометрический ряд, отправляясь от периодических, колебательных явлений и связанных с ними величин. Важно отметить, однако, уже сейчас, что подобные разложения часто оказываются полезными и при исследовании функций, заданных лишь определенном конечном промежутке и вовсе не порожденных никакими колебательными явлениями.

I.2 Определение коэффициента по методу Эйлера - Фурье

Для того чтобы установить возможность тригонометрического разложения (5) для заданной функции $f(x)$, имеющей период 2π , нужно исходить из определенного набора коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$

Мы укажем прием для определения их, который во второй половине XVIII века был применен *Эйлером* и независимо от него в начале XIX века – *Фурье*.

Будем предполагать функцию $f(x)$ интегрируемой в промежутке $[-\pi; \pi]$ – в собственном или несобственном смысле; в последнем случае мы дополнительно будем предполагать, что функция абсолютно интегрируема. Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно от $-\pi$ до π ; мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx].$$

I.2. Определение коэффициента по методу Эйлера - Фурье

Но, как легко видеть,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (I.6)$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, и окончательно найдем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (I.7)$$

Для того чтобы установить величину коэффициента a_m , умножим обе части равенства (5), которое мы все время предполагаем выполненным, на $\cos mx$ и снова проинтегрируем почленно в том же промежутке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx].$$

Первый член справа исчезает ввиду (6). Далее имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = 0; \quad (I.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0, \quad (I.9)$$

если $n \neq m$, и, наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \pi \quad (I.10)$$

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m . Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (I.11)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

Аналогично умножая предварительно разложение (5) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, определим коэффициент при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (I.12)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

При этом, кроме (6) и (8), мы опираемся еще на легко проверяемые соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \quad (\text{I.13})$$

если $n \neq m$, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi \quad (\text{I.14})$$

Формулы (7), (11) и (12) известны под названием *формул Эйлера - Фурье*; вычисленные по этим формулам коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* данной функции, а составленный с их помощью тригонометрический ряд (5) - её *рядом Фурье*. Так как мы исходили из предположения, что тригонометрическое разложение (5) имеет место, то вопрос о том, отвечает ли это действительно, естественно, остается открытым. Но убедительны ли те соображения, с помощью которых по примеру Эйлера и Фурье мы определили коэффициенты разложения (5), даже в предположении, что оно осуществляется? Мы пользовались повторно почленным интегрированием ряда, а эта операция не всегда дозволительна. Достаточным условием для её применимости является *равномерная сходимостъ* ряда. Поэтому строго установленным можно считать лишь следующее: *если функция $f(x)$, имеющая период 2π , разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (5), то последний необходимо будет её рядом Фурье*.

I.3 Ортогональные системы функций

Изложенное в предыдущем разделе является образцом рассуждений, которыми часто приходится пользоваться в математическом анализе при изучении многих разложений. Назовем две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в промежутке $[a, b]$, *ортогональными* в этом промежутке, если их произведение имеет интеграл, равный нулю:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных в промежутке $[a, b]$ и интегрируемых в нем вместе с их квадратами; тогда, как мы знаем, и произведение этих функций, взятых попарно также интегрируемы. Если функция данной системы попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad (\text{I.15})$$

$(n, m = 1, 2, \dots; n \neq m),$

то ее называют *ортогональной системой функций*. При этом мы всегда будем предполагать:

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0, \quad (\text{I.16})$$

так что в составе нашей системы нет ни функции, тождественно равной нулю, ни какой-либо другой ей уподобляющейся, в некотором смысле функции, интеграл от квадрата которой оказывается нулем.

1.4. Тригонометрическое интерполирование

При соблюдении условий $\lambda_n = 1$ ($n=0,1,2,\dots$) система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе $\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$, которая уже заведомо будет нормальной.

1.4 Тригонометрическое интерполирование

Можно естественным образом подойти к вопросу о представлении заданной функции $f(x)$ тригонометрическим рядом, отталкиваясь от *тригонометрического интерполирования*, т.е. приближения к функции $f(x)$ с помощью тригонометрического многочлена

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (\text{I.17})$$

значение которого в ряде точек совпадает с соответствующими значениями функции.

Именно, всегда можно подобрать $2n + 1$ коэффициентов: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ тригонометрического многочлена n -го порядка (17) так, чтобы его значения были равны значениям функции $f(x)$ в $2n+1$ наперед указанных точках промежутка $(-\pi, \pi)$ например в точках

$$\xi_i = i\lambda (i = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1, n),$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$. Действительно, для определения этих $2n + 1$ коэффициентов мы имеем столько же линейных уравнений:

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\xi_i + \beta_k \sin k\xi_i) = f(\xi_i) \quad (\text{I.18})$$

$$(i = -n, -n + 1, \dots, n).$$

Для решения этой системы нам придется вспомнить одно элементарное тригонометрическое тождество¹:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ih = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})h}{2 \sin \frac{1}{2}h}. \quad (\text{I.19})$$

Сложим почленно все равенства (17). Ввиду *нечетности* синуса коэффициент при β_k

$$\sum_{i=-n}^n \sin k\xi_i = 0$$

То же можно сказать и о коэффициенте при α_k , по *четности* косинуса

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos ik\lambda = 0 \quad (\text{I.20})$$

в силу тождества (19), если взять в нем $h = k\lambda = \frac{2k\pi}{2n+1}$. Поэтому

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n + 1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i). \quad (\text{I.21})$$

¹Его легко поучить, если умножить левую часть на $2 \sin \frac{1}{2}h$ и каждое произведение $2 \sin \frac{1}{2}h \cos ih$ заменить разностью $\sin(i + \frac{1}{2})h - \sin(i - \frac{1}{2})h$.

Чтобы определить α_m ($1 \leq m \leq n$), умножим равенство (18), соответственно, на $\cos m\xi_i$ и снова почленно сложим. Коэффициент при α_0 будет нулем ввиду (20); равен, очевидно нулю и коэффициент при β_k по нечетности синуса. Что же касается коэффициента при α_k , то он представится так:

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i \cos m\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k+m)\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k-m)\xi_i;$$

при $k \neq m$ обе суммы справа ввиду (20) обратятся в нуль, а при $k = m$ первая сумма будет нулем, в то время как вторая получит, очевидно значение $\frac{2n+1}{2}$. Таким образом, лишь коэффициент при α_m оказывается отличным от нуля, именно, равным $\frac{2n+1}{2}$. Теперь уже легко найти

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (I.22)$$

Совершенно аналогично, умножая равенства (18) на $\sin m\xi_i$ и складывая, найдем

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (I.23)$$

Можно заметить в примененном приеме сходство с методом Эйлера - Фурье для определения коэффициентов тригонометрического ряда. Однако здесь наши выкладки безупречны, легко проверить, что полученные значения неизвестных действительно удовлетворяют уравнениям (18). Мы видели, что система (18) может иметь, если вообще имеет, лишь *единственное* решение, которое дается формулами (21), (22), (23), каков бы ни был набор правых частей. Но в таком случае ее определитель необходимо отличен от нуля, и сама система является *определенной*. Итак, тригонометрический многочлен $\sigma_n(x)$ с найденными значениями коэффициентов удовлетворяет поставленным требованиям и может служить для интерполирования нашей функции в промежутке $[-\pi, \pi]$. Предположим теперь, что заданная функция в этом промежутке *интегрируема*. Если мы станем увеличивать n до бесконечности, то интерполяционный многочлен $\sigma_n(x)$ будет меняться, совпадая с $f(x)$ на все более и более "густом" множестве точек. Чтобы лучше разобраться в их поведении, представим себе промежуток $[-\pi, \pi]$ разложенным на $2n+1$ равных частей с помощью точек деления $x_i = (2i-1)\frac{\pi}{2n+1}$ ($-n \leq i \leq n+1$). Точки ξ_i являются как раз серединами этих частичных промежутков, а длины последних равны $\Delta x_i = \frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$. Если переписать формулы (21), (22), (23) в виде

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \Delta x_i,$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \Delta x_i,$$

то суммы в правых частях окажутся *интегральными суммами*, отвечающими именно указанному разбиению промежутка. Теперь ясно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

1.4. Тригонометрическое интерполирование

$$\beta_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx,$$

так что предельными значениями коэффициентов интерполяционного тригонометрического многочлена являются соответствующие коэффициенты Фурье нашей функции.

Глава II

Разложение функций в ряд Фурье

II.1 Постановка задачи. Интеграл Дирихле

Пусть $f(x)$ будет функция с периодом 2π , абсолютно интегрируемая, хотя бы и в несобственном смысле, в промежутке $[-\pi, \pi]$, а следовательно, и в любом конечном промежутке. Вычислим постоянные (ее коэффициенты Фурье):

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu du, b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu du \quad (\text{II.1})$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

и по ним составим ряд Фурье нашей функции

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \quad (\text{II.2})$$

Заметим, что здесь же (этим замечанием мы будем пользоваться и в последующем), для функции $F(u)$, имеющей период 2π , величина интеграла

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) du$$

по промежутку длины 2π не зависит от α . Поэтому и в формулах (1), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π ; например можно было бы написать

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx, m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx, m = 1, 2, \dots$$

и т.п.

II.1. Постановка задачи. Интеграл Дирихле

Для того, чтобы исследовать поведение ряда (2) в какой-нибудь определенной точке $x = x_0$, составим удобное выражение для его частичной суммы

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$

Подставим вместо a_m и b_m их интегральные выражения (1) и подведем постоянные числа $\cos mx_0, \sin mx_0$ под знак интеграла:

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \\ &+ \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) \right\} du. \end{aligned}$$

Воспользовавшись для преобразования выражения в фигурных скобках формулой

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ih = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})h}{2 \sin \frac{1}{2}h}$$

будем иметь:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) = \frac{\sin(2n + 1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}},$$

и окончательно

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n + 1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du. \quad (\text{II.3})$$

Это важный интеграл носит имя Дирихле.

Так как мы имеем здесь дело с функциями от u и 2π , то промежуток интегрирования $[-\pi; \pi]$ можем заменить, например, промежутком $[x_0 - \pi; x_0 + \pi]$:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(u) \frac{\sin(2n + 1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du.$$

Подстановкой $t = u - x_0$ преобразуем этот интеграл к виду:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

Затем, разбивая интеграл на два: $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ и приводя второй интеграл путем изменения знака переменной тоже к промежутку $[0, \pi]$, придем к такому окончательному выражению n -ой частичной суммы ряда Фурье:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad (\text{II.4})$$

Таким образом, дело сводится к исследованию поведения именно этого интеграла, содержащего параметр p .

II.2 Первая основная лемма

Прежде чем продолжить исследование, надо доказать важное для дальнейшего утверждение, которое принадлежит Риману: *Если функция $g(t)$ абсолютно интегрируема в некотором конечном промежутке $[a, b]$, то*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin ptdt = 0$$

и, аналогично,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos ptdt = 0$$

Доказательство достаточно провести для первого из этих пределов. Заметим предварительно, что, каков бы ни был конечный промежуток $[\alpha, \beta]$, имеем такую оценку:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin ptdt \right| = \left| \frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p} \right| \leq \frac{2}{p}. \quad (\text{II.5})$$

Допустим сначала, что функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n -частей точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b \quad (\text{II.6})$$

и в соответствии с этим разложим и интеграл

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin ptdt.$$

Обозначим через m_i точную нижнюю границу значений $g(t)$ в i -ом промежутке, можно преобразовать это выражение так:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin ptdt + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m_i \sin ptdt.$$

Если ω_i есть колебание функции $g(t)$ в i -ом промежутке, то в его пределах $g(t) - m_i \leq \omega_i$; с учетом неравенства (5) теперь легко получить для нашего интеграла оценку:

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, выберем сначала дробление (6) так, чтобы было

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

II.3. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье

это сделать можно именно ввиду интегрируемости функции $g(t)$. Теперь, так как числа m_i тем самым уже определены можем взять

$$p > \frac{4}{\varepsilon} \sum |m_i|,$$

и для этих значений p получим

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt dt \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение. В случае, если функция $g(t)$ интегрируема в несобственном смысле (но обязательно абсолютно!) достаточно ограничиться предположением, что в промежутке $[a, b]$ имеется лишь одна особая точка например точка b^2 .

Пусть $0 < \eta < b - a$. Разлагая интеграл на два:

$$\int_a^b = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b,$$

для второго интеграла справа имеем при любом p оценку:

$$\left| \int_{b-\eta}^b g(t) \sin pt dt \right| \leq \int_{b-\eta}^b |g(t)| dt,$$

что $< \frac{\varepsilon}{2}$, если выбрать η достаточно малым. Что же касается интеграла

$$\int_a^{b-\eta} g(t) \sin pt dt,$$

то при $p \rightarrow +\infty$ он стремится к нулю - по уже доказанному, так как в промежутке $[a, b - \eta]$ функция $g(t)$ интегрируема в собственном смысле слова; написанный интеграл по абсолютной величине также станет $< \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно большом p . Этим завершается доказательство. Если вспомнить формулы (1), выражающие коэффициенты Фурье, то в качестве первого непосредственного следствия отсюда получается утверждение: *Коэффициенты Фурье a_m, b_m абсолютно интегрируемой функции при $m \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю.*

II.3 Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье

Возвращаемся к прерванному исследованию поведения частичной суммы $s_n(x_0)$ ряда Фурье, для которой мы получили интегральное выражение (4). Отметим, что упомянутое равенство имеет место для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям. Если, в частности, взять $f(x) \equiv 1$, то и $s_n(x) \equiv 1$, и из (4) получим, что

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

²Иначе можно было бы разложить промежуток на конечное число частей, содержащих лишь по одной особой точке, и применить рассуждение к каждой части в отдельности.

Умножая обе части этого равенства на постоянное число S_0 - предполагаемую сумму нашего ряда, точное значение которой мы установим ниже, и вычитая результат из (4), найдем:

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt, \quad (\text{II.7})$$

где для краткости положено

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0. \quad (\text{II.8})$$

Если мы хотим установить, что S_0 действительно является суммой ряда, то для этого нужно доказать, что интеграл (7) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Обратимся к выбору самого числа S_0 . Практически важны те случаи, когда (а) функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, либо (б) $f(x)$ имеет в этой точке с обеих сторон разве лишь разрывы первого рода (или скачки), так что оба предела $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ существуют. Этими случаями мы впредь ограничимся и раз навсегда полагаем :

в случае (а): $S_0 = F(x_0)$,

в случае (б): $S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

В различении случаев (а) и (б) нет надобности, если в точке x_0 , где налицо разрыв первого рода, выполняется равенство

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Точки, где условие соблюдено, иногда называют *регулярными*. Отметим, что так как

$$() \lim_{p \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0) \quad () \lim_{p \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0 \pm 0),$$

смотря по случаю, по при указанном выборе числа S_0 всегда будет

$$\lim_{p \rightarrow +0} \varphi(t) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Имея это в виду, сформулируем теперь

Признак Дини. Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0 , если при некотором $h > 0$ интеграл

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

существует. Действительно, при этом предположении существует и интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt.$$

Если переписать выражение (7) в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

то непосредственно по основной лемме ясно, что оно при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, так как функция $\frac{\varphi(t)}{t}$, а с нею и $\frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$ абсолютно интегрируема. Этим и завершается доказательство. В развернутом виде интеграл Дини может быть написан так:

II.3. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье

в случае (а) :

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)|}{t} dt,$$

в случае (б) :

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}{t} dt.$$

Очевидно, достаточно предположить существование порознь интегралов (смотря по случаю)

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0)|}{t}, \int_0^h \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}{t} dt \quad (\text{II.10})$$

или

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} dt, \int_0^h \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} dt$$

Отсюда можно получить ряд частных признаков, используя различные известные признаки существования интегралов. Например, ограничиваясь случаем (а), укажем

Признак Липшица Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 , где она непрерывна, к сумме $f(x_0)$, если для достаточно малых t выполняется неравенство

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha,$$

где L и α - положительные постоянные ($\alpha \leq 1$). В случае $\alpha = 1$ имеем попросту

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq L,$$

так что интегралы (10) существуют как собственные. Если же $\alpha < 1$, то

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

и так как справа стоит интегрируемая функция, то интегралы (10) все же существуют, хотя бы как несобственные.

В частности, условие Липшица при $\alpha = 1$ заведомо будет выполнено, если для функции $f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$ или, по крайней мере, конечные односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t},$$

хотя бы и различные между собой ("угловая точка"). Таким образом, в точке x_0 , где функция $f(x)$ дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причем сумма его равна $f(x_0)$. Легко перефразировать признак Липшица и для случая (б). Как частное следствие отсюда, укажем и здесь, что в точке x_0 разрыва первого рода для сходимости ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t},$$

причем на этот раз суммой ряда будет

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Упомянутые пределы в некотором смысле уподобляются односторонним производным, лишь значение $f(x_0)$ функции в точке x_0 заменяется, соответственно, ее предельными значениями справа или слева от этой точки.

Наиболее часто на практике приходится иметь дело с функциями $f(x)$, имеющими период 2π и дифференцируемыми или же кусочно-дифференцируемыми.³ Как видим, для таких функций ряд Фурье всегда сходится к самой функции $f(x)$, за исключением "точек стыка" различных функций, где суммой ряда будет

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

II.4 Вторая основная лемма

Для построения дальнейших признаков мы будем нуждаться еще в одном вспомогательном утверждении, впервые установленном Дирихле:

Если функция $g(t)$ монотонно возрастает, оставаясь ограниченной, в промежутке $[0, h]$, где $h > 0$, то

$$\lim_{p \rightarrow +0} \int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(+0). \quad (\text{II.11})$$

Доказательство. Прежде всего, рассматриваемый интеграл может быть представлен в виде суммы двух интегралов:

$$g(+0) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt + \int_0^h [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt. \quad (\text{II.12})$$

Если первый из них с помощью подстановки $pt = z$ преобразовать к виду

$$g(+0) \int_0^{ph} \frac{\sin z}{z} dz,$$

то сразу ясно, что при $p \rightarrow +\infty$ он стремится к $\frac{\pi}{2} \cdot g(+0)$, ибо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

³Функция $f(x)$ называется *кусочно-дифференцируемой* в промежутке $[a, b]$, если этот промежуток разлагается на конечное число частичных промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах не только имеет предельные значения, но и односторонние производные, при условии замены на этих концах значений функций упомянутыми предельными значениями. Можно представить себе кусочно-дифференцируемую функцию как бы "склеенной" из нескольких функций, дифференцируемых (а следовательно, и непрерывных) в замкнутых частичных промежутках с тем лишь, что в "точках стыка" (равно и как на концах a и b основного промежутка) ее значения устанавливаются особо.

II.5. Признак Дирихле - Жордана

Таким образом, весь вопрос сводится к доказательству того, что второй интеграл (12) стремится к нулю.

По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (можно считать $\delta < h$), что $0 \leq g(t) - g(+0) < \varepsilon$ для $0 < t \leq \delta$. Разобьем теперь упомянутый только что интеграл на два:

$$\left(\int_0^\delta + \int_\delta^h \right) [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt = I_1 + I_2.$$

К интегралу I_1 применим формулу Бонне, мы получим, что

$$I_1 = [g(\delta) - g(+0)] \int_\eta^\delta \frac{\sin pt}{t} dt = [g(\delta) - g(+0)] \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Но первый множитель $< \varepsilon$, а второй равномерно ограничен при всех значениях p . Действительно, из сходимости несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$ следует, что непрерывная (при $z \geq 0$) функция от z

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz,$$

имеющая при $z \rightarrow +\infty$ конечный предел, будет ограничена при всех значениях z :

$$\left| \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz \right| \leq L. (L = \text{const}),$$

так что

$$\left| \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz \right| = \left| \int_0^{p\delta} - \int_0^{p\eta} \right| \leq 2L.$$

Итак, для интеграла I_1 имеем независимо от p оценку

$$|I_1| < 2L\varepsilon. \quad (\text{II.13})$$

Что же касается интеграла I_2 то при $p \rightarrow \infty$ (и фиксированном δ) он стремится к нулю по первой основной лемме, так как множитель при $\sin pt$ есть интегрируемая в собственном смысле функция (ведь $t \geq \delta$!). Этим и завершается доказательство.

II.5 Признак Дирихле - Жордана

Обратимся теперь к выводу, нового признака сходимости рядов Фурье, основанного на другой идее.

Признак Дирихле - Жордана. Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0 , если в некотором промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ с центром в этой точке функция имеет ограниченное изменение.

Поведение частичной суммы $s_n(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$ определяется поведением интеграла $\rho_n(\delta)$, где за δ , в частности, можно взять и то число h , о котором была речь выше. Перепишем интеграл $\rho_n(\delta)$ в виде

$$\rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt.$$

Сумма в квадратных скобках, по предположению, есть функция с ограниченным изменением; частное же $\frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$ представляет собой возрастающую функцию. Таким образом, и произведение их имеет ограниченное изменение и, следовательно, представляется в виде разности двух монотонно возрастающих функций. Поскольку предыдущая лемма приложима к каждой из них отдельно, она приложима и к их разности, и мы сразу получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Этим все доказано, ибо в точке непрерывности полученное выражение само собою обращается в $f(x_0)$. Нужно сказать, что первоначально сформулированные самим Дирихле условия разложимости функции в ряд Фурье носили более частный характер. Именно, он установил следующее предложение:

Признак Дирихле. Если функция $f(x)$ периода 2π кусочно-монотонна в промежутке $[-\pi, \pi]^4$ и имеет в нем не более, чем конечное число точек разрыва, то ее рядом Фурье сходится к сумме $f(x_0)$ в каждой точке непрерывности и к сумме $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ в каждой точке разрыва.

Так как функция, удовлетворяющая этим условиям, очевидно, имеет ограниченное изменение в любом конечном промежутке, то этот признак формально перекрывается предыдущим признаком.

Изложенных признаков достаточно для удовлетворения практических потребности анализа и его приложений. Другие предложенные признаки представляют, главным образом, теоретический интерес.

Коснемся вопроса о взаимоотношении признаков Дини и Дирихле - Жордана. Можно сказать, что они несравнимы между собой, то есть не вытекают один из другого. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, которая в промежутке $[-\pi, \pi]$ определяется так⁵:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln \frac{|x|}{2} 2\pi}, x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и кусочно-монотонна и, значит, удовлетворяет условию Дирихле. В то же время интеграл Дини, относящийся к точке $x = 0$:

$$\int_0^h \frac{|f(t) + f(-t) - 2f(0)|}{t} dt = 2 \int_0^h \frac{dt}{t \ln \frac{t}{2\pi}}$$

⁴Под этим разумеется возможность разложить промежуток $[-\pi, \pi]$ на конечное число частичных промежутков, внутри которых по отдельности функция монотонна.

⁵На остальную часть числовой оси функции распространяется по закону периодичности: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

II.6. Разложение только по косинусам или только по синусам

явно расходится при любом $h > 0$. С другой стороны, если в промежутке $[-\pi, \pi]$ определить функцию равенствами:

$$\begin{cases} f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}; x \neq 0, \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

то в точке $x = 0$ заведомо выполняется условие Липшица:

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|,$$

а следовательно и условие Дини. Однако на этот раз функция $f(x)$ ни в какой окрестности точки $x = 0$ не имеет ограниченного изменения.

II.6 Разложение только по косинусам или только по синусам

Начнем со следующего замечания: если заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$ интегрируемая (в собственном или несобственном смысле) функция $f(x)$ будет *нечетной*, то для нее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

В этом легко убедиться, представив интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}$ в виде суммы интегралов: $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ и заменив во втором из них x на $-x$. Таким же путем устанавливается, что в случае *четной* функции $f(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ будет абсолютно интегрируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$ четная функция. Тогда произведение $f(x) \sin nx$ окажется нечетной функцией, и по сказанному

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

$(n = 1, 2, \dots)$

Таким образом, *ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (\text{II.14})$$

Так как $f(x) \cos nx$ в этом случае тоже будет четной функцией то, можем, коэффициент a_n разложения написать в виде

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (\text{II.15})$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Если же функция $f(x)$ будет *нечетной*, то нечетной будет и функция $f(x) \cos nx$, так что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0.$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Мы приходим к заключению, что *ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы* :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (\text{II.16})$$

При этом ввиду четности произведения $f(x) \sin nx$ можно писать:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (\text{II.17})$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Отметим попутно, что каждая функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих функции:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Очевидно, что в ряд Фурье функции $f(x)$ как раз и составится из разложения по косинусам функции $f_1(x)$ и разложение по синусам функции $f_2(x)$. Предположим далее, что функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, \pi]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье (2), мы дополним определение нашей функции для значений x в промежутке $[-\pi, 0)$ по произволу. Подчеркнутый выше произвол в определении функции дает возможность получить таким путем различные тригонометрические ряды. Если в какой-нибудь точке x_0 между 0 и π наша функция удовлетворяет одному из признаков. Можно использовать произвол в определении функции в промежутке $[-\pi, 0)$ так, чтобы получить для функции $f(x)$ разложение по синусам или только по косинусам. Действительно, представим себе, что для $0 < x \leq \pi$ мы полагаем

$$f(-x) = f(x), \quad (\text{II.18})$$

так что в результате получится четная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$ (рис.2), к тому же имеющая даже период 2π . Ее разложение как мы видели, будет содержать одни только косинусы. Коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (15), куда входят лишь значения первоначально заданной функции $f(x)$.

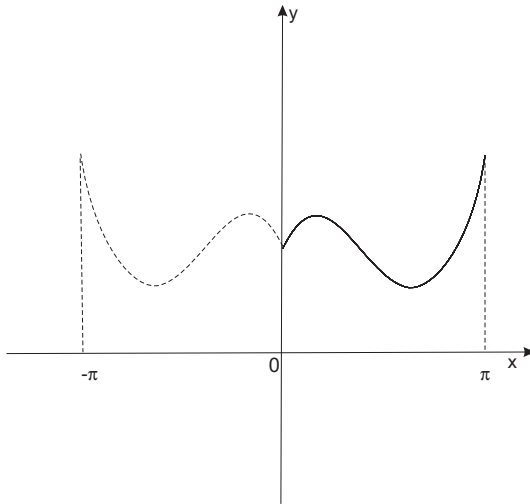


Рис. 2. четная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$

Аналогично, если дополнить определение функции $f(x)$ условием $(0 < x \leq \pi)$

$$f(-x) = -f(x), \quad (\text{II.19})$$

так чтобы она оказалась нечетной (рис.3), то в ее разложении будут участвовать только члены с синусами. Коэффициенты его определяются по формулам (17).

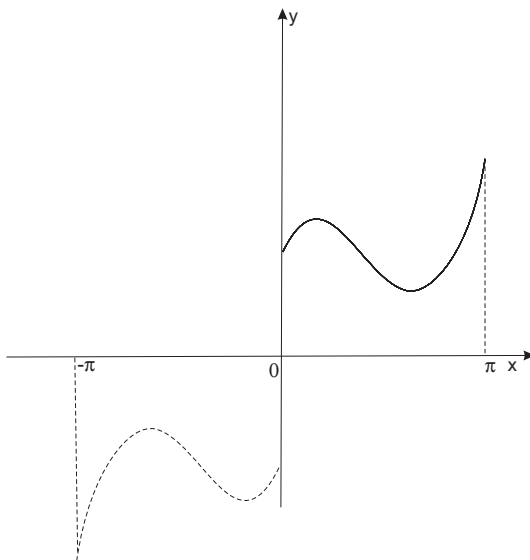


Рис. 3. нечетная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$

Таким образом, заданную в промежутке $[0, \pi]$ функцию при соблюдении известных условий оказывается возможным разлагать как в ряд по косинусам, так и в ряд по синусам!

Особого исследования требуют, впрочем, точки $x = 0$ и $x = \pi$. Здесь оба разложения ведут себя по-разному. Предположим, для простоты, что заданная функция $f(x)$ непрерывна при $x = 0$ и $x = \pi$, рассмотрим сначала разложение по косинусам. Условие (18) прежде всего сохраняет непрерывность при $x = 0$, так что при соблюдении надлежащих условий ряд (14) при $x = 0$ будет сходиться именно к $f(0)$. Так как, далее

$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi),$$

то и при $x = \pi$ имеет место аналогичное обстоятельство.

Иначе обстоит дело с разложением по синусам. Не вдаваясь в соображения относительно нарушения непрерывности условием (19), мы просто заметим, что в точках

$x = 0$ и $x = \pi$ сумма ряда (16) явно будет нулем. Поэтому она может дать нам значения $f(0)$ и $f(\pi)$, очевидно лишь в том случае, если и эти значения равны нулю.

Глава III

Теория рядов Фурье в пакете Maple

III.1 Создание собственных процедур. Разложение функции в ряд Фурье

В Maple имеется возможность создавать собственные процедуры. Процедура начинается с заголовка. Заголовок состоит из имени процедуры (его пользователь определяет сам), далее следует обязательный оператор присваивания `:=` и служебное слово **proc**, после которого в круглых скобках через запятую указываются формальные параметры процедуры.

Во избежание неполадок работы процедуры, рекомендуется в строке заголовка процедуры описывать переменные, которые будут использоваться только внутри тела процедуры (они называются локальными переменными). Для этого используется служебное слово **local**, после которого через запятую перечисляются локальные переменные.

После заголовка следует основное тело процедуры, состоящее из составленных пользователем команд, причем последняя команда будет выводить окончательный результат выполнения процедуры. Процедура обязательна должна оканчиваться служебным словом **end**.

В Maple нет команды, позволяющей производить разложение функции в тригонометрический ряд Фурье. Однако можно создать собственную процедуру разложения в ряд Фурье.

Пусть требуется разложить на интервале $[x_1, x_2]$ - периодическую функцию $f(x)$. Тогда ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{l}, a_k = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx}{l}, b_k = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx}{l}.$$

Получить первые n членов ряда Фурье можно с помощью следующей процедуры:

`fourierseries(f,x,x1,x2,n)`, где f - имя функции, разложение которой требуется найти, где x - имя независимой переменной, где x_1, x_2 - интервал разложения, где n - число членов ряда.

```
>fourierseries:=proc(f,x,x1,x2,n) local k, l,a, b,X,F,xx;  
F:=(X)->subs(x=X,f):
```

```

l:=(x2-x1)/2;
a[0]:=int(F(xx),xx=x1..x2)/l;
a[k]:=int(F(xx)*cos(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
b[k]:=int(F(xx)*sin(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*Pi*x/l)+
b[k]*sin(k*Pi*x/l), k=1..n);
end:

```

Пример1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x/2$ с периодом 2π на интервале $[0;2\pi]$, удерживая 6 и 24 членов ряда. Построить на одном рисунке графики функции и ее n -частичной суммы ряда Фурье. Сначала полностью наберем процедуру `fourierseries`, предложенную выше в теоретической части.

*Разложение функции $y=1/2*x$ в ряд Фурье в зависимости от числа n удерживаемых членов ряда:
жирная линия- функция $f(x)$; сплошная линия - $n=6$; пунктирная линия - $n=24$*

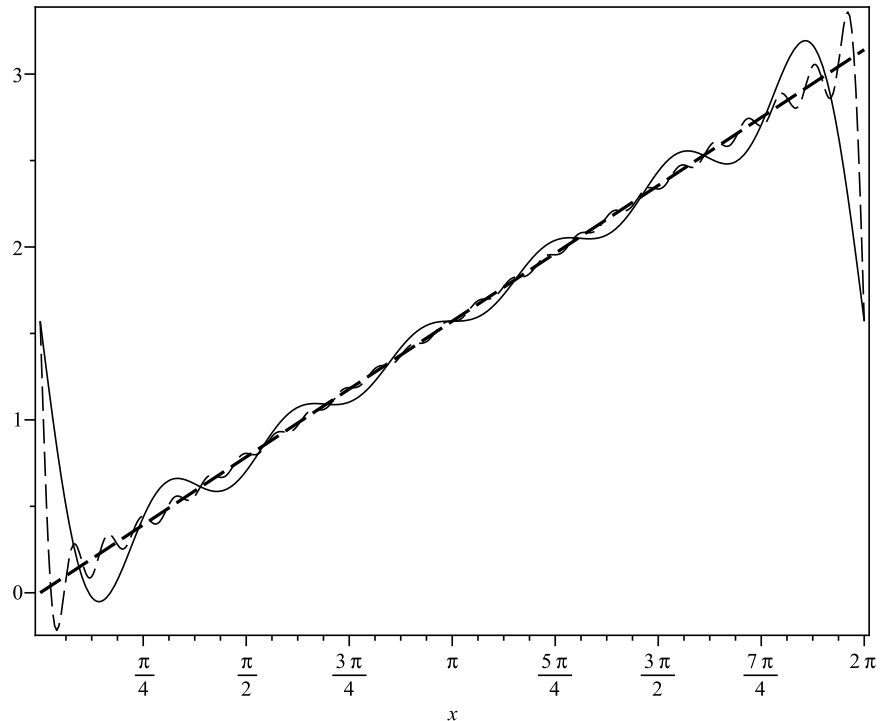


Рис. 4.

```

>fourierseries:=proc(f,x,x1,x2,n) local k, l,
a,b,X,F,xx;
F:=(X)->subs(x=X,f):
l:=(x2-x1)/2;
a[0]:=int(F(xx),xx=x1..x2)/l;
a[k]:=int(F(xx)*cos(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
b[k]:=int(F(xx)*sin(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*Pi*x/l)+
b[k]*sin(k*Pi*x/l), k=1..n);
end:
ff6:=(x)->fourierseries(x/2,x,0,2*Pi,6):

```

III.2. Процедура разложение функции в ряд Фурье

```
ff24:=(x)->fourierseries(x/2,x,0,2*Pi,24):
fr:=(x)->x/2:
plot({fr(x),ff6(x),ff24(x)}, x=0..2*Pi, color=black,thickness=[2,1,1],
linestyle=[3,1,3],
>title='Разложение функции y=1/2*x в ряд Фурье в зависимости
от числа n удерживаемых членов ряда:
жирная линия- функция fr(x); сплошная линия - n=6;
пунктирная линия - n=24',axes=BOXED,titlefont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

III.2 Процедура разложения функции в ряд Фурье

В Maple нет команды, позволяющей производить разложение функции в тригонометрический ряд Фурье. Однако можно создать собственную процедуру разложения в ряд Фурье.

```
restart:
AnimFourier:=table():
AnimFourier[Fourie] := proc (f, x, x1, x2, N) local k, l, a, b, s;
l := (1/2)*x2-(1/2)*x1;
a[0] := (int(f, x = x1 .. x2))/l;
a[k] := (int(f*cos(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2))/l;
b[k] := (int(f*sin(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2))/l;
s := (1/2)*a[0]+sum(a[k]*\cos(k*Pi*x/l)+b[k]*sin(k*Pi*x/l), k = 1 .. N)
end proc:
```

Пример1. Разложить функцию $1 + x^2$ в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} & \frac{2500 \cos(\frac{1}{25}\pi x)}{\pi^2} + \frac{2503}{\pi} - \frac{2500 \sin(\frac{1}{25}\pi x)}{\pi^2} + \frac{625 \cos(\frac{2}{25}\pi x)}{\pi^2} - \frac{1250 \sin(\frac{2}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{2500 \cos(\frac{3}{25}\pi x)}{9} - \frac{2500 \sin(\frac{3}{25}\pi x)}{\pi} + \\ & \frac{625 \cos(\frac{4}{25}\pi x)}{4} - \frac{625 \sin(\frac{4}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{100 \cos(\frac{5}{25}\pi x)}{\pi^2} - \frac{500 \sin(\frac{5}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{625 \cos(\frac{6}{25}\pi x)}{9} - \frac{1250 \sin(\frac{6}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{2500 \cos(\frac{7}{25}\pi x)}{49} - \frac{2500 \sin(\frac{7}{25}\pi x)}{\pi} + \\ & \frac{2500 \sin(\frac{7}{25}\pi x)}{7} + \frac{625 \cos(\frac{8}{25}\pi x)}{16} - \frac{625 \sin(\frac{8}{25}\pi x)}{\pi^2} + \frac{2500 \cos(\frac{9}{25}\pi x)}{81} - \frac{2500 \sin(\frac{9}{25}\pi x)}{9} + \frac{25 \cos(\frac{10}{25}\pi x)}{\pi} - \frac{250 \sin(\frac{10}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{2500 \cos(\frac{11}{25}\pi x)}{121} - \frac{2500 \sin(\frac{11}{25}\pi x)}{11} + \frac{625 \cos(\frac{12}{25}\pi x)}{36} - \frac{625 \sin(\frac{12}{25}\pi x)}{3} + \frac{2500 \cos(\frac{13}{25}\pi x)}{169} - \frac{2500 \sin(\frac{13}{25}\pi x)}{13} + \frac{625 \cos(\frac{14}{25}\pi x)}{49} - \frac{2500 \sin(\frac{14}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{1250 \sin(\frac{14}{25}\pi x)}{7} + \frac{100 \cos(\frac{15}{25}\pi x)}{9} - \frac{500 \sin(\frac{15}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{625 \cos(\frac{16}{25}\pi x)}{64} - \frac{625 \sin(\frac{16}{25}\pi x)}{4} + \frac{2500 \cos(\frac{17}{25}\pi x)}{289} - \frac{2500 \sin(\frac{17}{25}\pi x)}{17} + \\ & \frac{625 \cos(\frac{18}{25}\pi x)}{81} - \frac{1250 \sin(\frac{18}{25}\pi x)}{9} + \frac{2500 \cos(\frac{19}{25}\pi x)}{361} - \frac{2500 \sin(\frac{19}{25}\pi x)}{19} + \frac{25 \cos(\frac{20}{25}\pi x)}{4} - \frac{125 \sin(\frac{20}{25}\pi x)}{\pi} + \frac{2500 \cos(\frac{21}{25}\pi x)}{441} - \frac{2500 \sin(\frac{21}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{2500 \sin(\frac{21}{25}\pi x)}{21} + \frac{625 \cos(\frac{22}{25}\pi x)}{121} - \frac{1250 \sin(\frac{22}{25}\pi x)}{11} + \frac{2500 \cos(\frac{23}{25}\pi x)}{529} - \frac{2500 \sin(\frac{23}{25}\pi x)}{23} + \frac{625 \cos(\frac{24}{25}\pi x)}{144} - \frac{625 \sin(\frac{24}{25}\pi x)}{6} + \\ & \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{100 \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{625 \cos(\frac{26}{25}\pi x)}{169} - \frac{1250 \sin(\frac{26}{25}\pi x)}{13} + \frac{2500 \cos(\frac{27}{25}\pi x)}{729} - \frac{2500 \sin(\frac{27}{25}\pi x)}{27} + \frac{625 \cos(\frac{28}{25}\pi x)}{196} - \frac{2500 \sin(\frac{28}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{625 \sin(\frac{28}{25}\pi x)}{7} + \frac{2500 \cos(\frac{29}{25}\pi x)}{841} - \frac{2500 \sin(\frac{29}{25}\pi x)}{29} + \frac{25 \cos(\frac{30}{25}\pi x)}{9} - \frac{250 \sin(\frac{30}{25}\pi x)}{3} + \frac{2500 \cos(\frac{31}{25}\pi x)}{961} - \frac{2500 \sin(\frac{31}{25}\pi x)}{31} + \\ & \frac{625 \cos(\frac{32}{25}\pi x)}{256} - \frac{625 \sin(\frac{32}{25}\pi x)}{8} + \frac{2500 \cos(\frac{33}{25}\pi x)}{1089} - \frac{2500 \sin(\frac{33}{25}\pi x)}{33} + \frac{625 \cos(\frac{34}{25}\pi x)}{289} - \frac{1250 \sin(\frac{34}{25}\pi x)}{17} + \frac{100 \cos(\frac{35}{25}\pi x)}{49} - \frac{2500 \sin(\frac{35}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{500 \sin(\frac{35}{25}\pi x)}{7} + \frac{625 \cos(\frac{36}{25}\pi x)}{324} - \frac{625 \sin(\frac{36}{25}\pi x)}{9} + \frac{2500 \cos(\frac{37}{25}\pi x)}{1369} - \frac{2500 \sin(\frac{37}{25}\pi x)}{37} + \frac{625 \cos(\frac{38}{25}\pi x)}{361} - \frac{1250 \sin(\frac{38}{25}\pi x)}{19} + \\ & \frac{2500 \cos(\frac{39}{25}\pi x)}{1521} - \frac{2500 \sin(\frac{39}{25}\pi x)}{39} + \frac{25 \cos(\frac{40}{25}\pi x)}{16} - \frac{125 \sin(\frac{40}{25}\pi x)}{2} + \frac{2500 \cos(\frac{41}{25}\pi x)}{1681} - \frac{2500 \sin(\frac{41}{25}\pi x)}{41} + \frac{625 \cos(\frac{42}{25}\pi x)}{441} - \frac{2500 \sin(\frac{42}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{1250 \sin(\frac{42}{25}\pi x)}{21} + \frac{2500 \cos(\frac{43}{25}\pi x)}{1849} - \frac{2500 \sin(\frac{43}{25}\pi x)}{43} + \frac{625 \cos(\frac{44}{25}\pi x)}{484} - \frac{625 \sin(\frac{44}{25}\pi x)}{11} + \frac{100 \cos(\frac{45}{25}\pi x)}{81} - \frac{500 \sin(\frac{45}{25}\pi x)}{9} + \\ & \frac{625 \cos(\frac{46}{25}\pi x)}{529} - \frac{1250 \sin(\frac{46}{25}\pi x)}{23} + \frac{2500 \cos(\frac{47}{25}\pi x)}{2209} - \frac{2500 \sin(\frac{47}{25}\pi x)}{47} + \frac{625 \cos(\frac{48}{25}\pi x)}{576} - \frac{625 \sin(\frac{48}{25}\pi x)}{12} + \frac{2500 \cos(\frac{49}{25}\pi x)}{2401} - \frac{2500 \sin(\frac{49}{25}\pi x)}{\pi^2} + \\ & \frac{2500 \sin(\frac{49}{25}\pi x)}{49} + \frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} - \frac{50 \sin(2\pi x)}{\pi} \end{aligned}$$

Пример2. Построить график функции $1 + x^2$, принадлежащий промежутку $[0,100]$.

```
>plot(AnimFourier[Fourie](1+x^2, x, 0, 100, 100), x = 0 .. 100, color = [blue],
thickness = 3, linestyle = [3]);
```

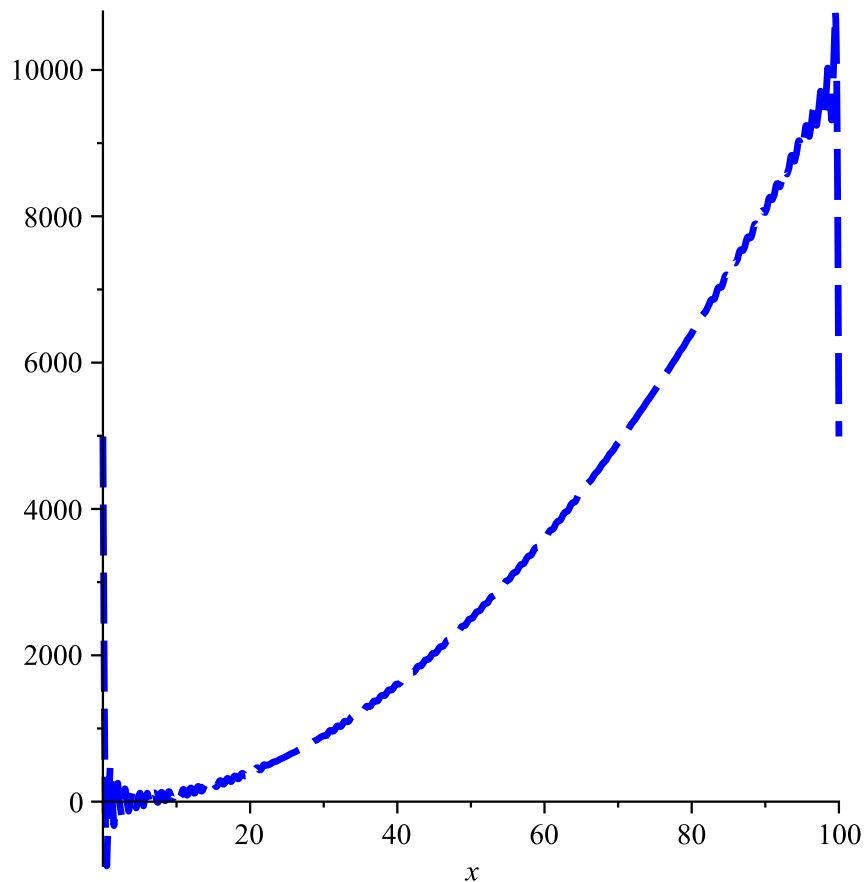


Рис. 5. График функции $1 + x^2$

III.3 Создание анимационной процедуры для рядов Фурье

Создадим анимационную процедуру с помощью процедуры Anim :

```
>Fourie(1+x^2,x,0,2*Pi,1);
```

```
>AnimFourier[Anim]:=proc(f, x, x1, x2, K) local X,F,k,ff,GRFF,GF,GGF:
F:=(X)->subs(x=X,f):
ff:=(k,x)->Fourie(F(x), x, x1, x2, k):
GF:=plot(F(x),x=x1..x2,color=blue,thickness=2):
GRFF:=(k)->plot(ff(k,x),x=x1..x2,color=red,title=convert(K=k,string)):
GGF:=(k)->plots[display](GF,GRFF(k)):
plots[display](seq(GGF(k),k=1..K),insequence=true):
end proc:
>save(AnimFourier,'library.m');
```

III.4. Примеры применения анимационных процедур

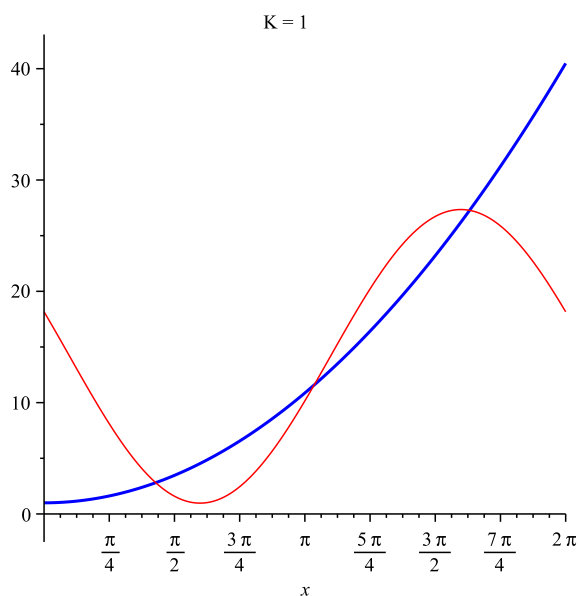


Рис. 6. Один из первых стоп-кадров анимации разложения функции в ряд Фурье

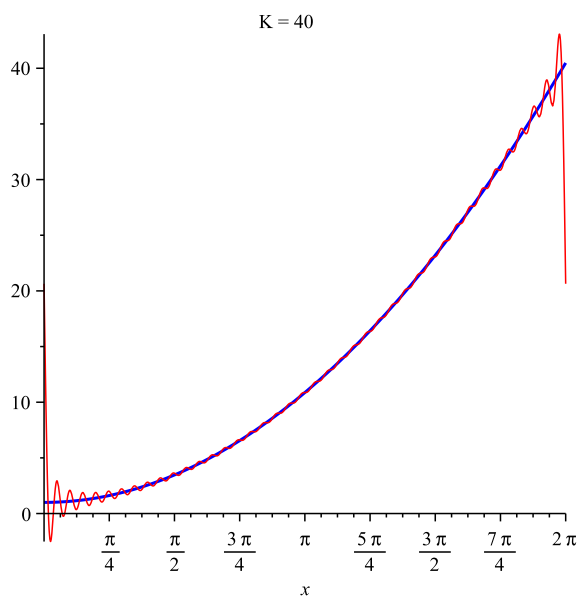


Рис. 7. Второй (завершающий) кадр анимации

Рис.7 показывает завершающий стоп-кадр анимации, когда число членов $K=40$.

III.4 Примеры применения анимационных процедур

```
read "../Diplom/Maple/library.m":  
with(AnimFourier);
```

```
[Anim, Fourie]
```

Приведем пример исполнения процедуры `Anim`:

```
>Anim(x^2,x,-Pi,Pi,30);
```

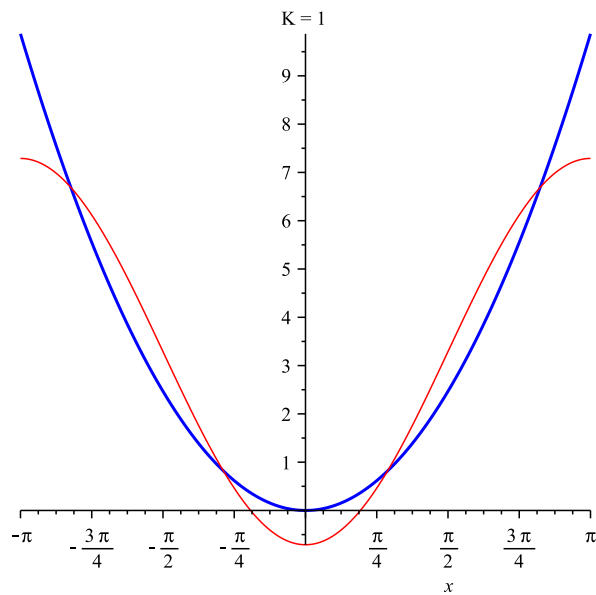


Рис. 8. разложение функции x^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$, $K=1$

```
>Anim(-x^3,x,0,2*Pi,60);
```

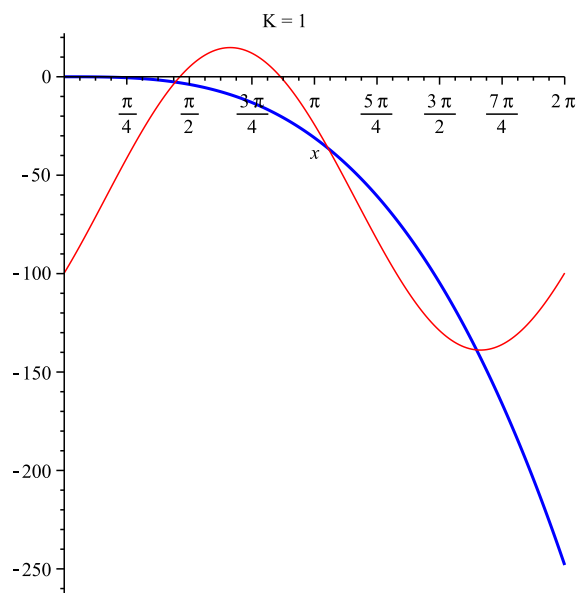


Рис. 9. разложение функции $-x^3$ на отрезке $[0, 2\pi]$, $K=60$

III.4. Примеры применения анимационных процедур

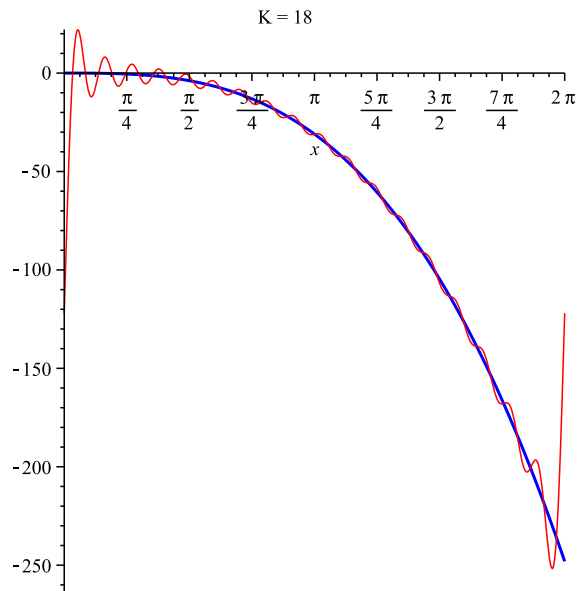


Рис. 10. Один из стоп-кадров разложения функции $-x^3$ на отрезке $[0, 2\pi]$, где $K=18$

Пример разложения функции $x^3 + x^2 + 3$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=50$

```
>Anim(x^3+x^2+3,x,-Pi,Pi,50);
```

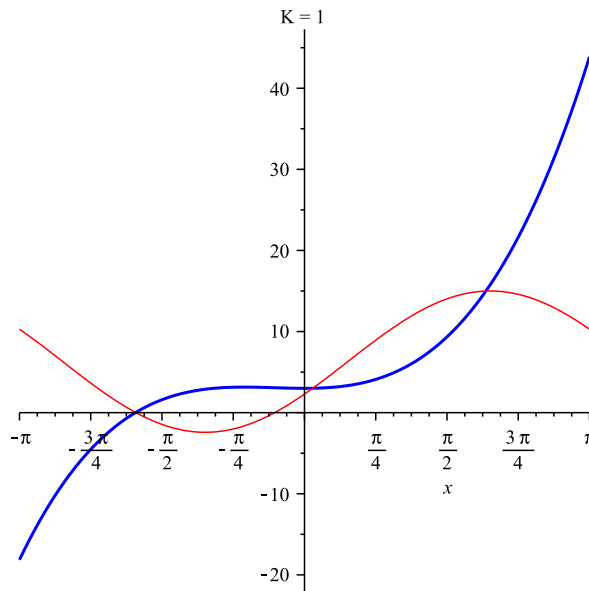


Рис. 11. разложение функции $x^3 + x^2 + 3$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=50$

Пример разложения функции $1 + x^2$ на отрезке $[0, 2\pi]$, $K=40$

```
>Anim(1+x^2,x,0,2*Pi,40);
```

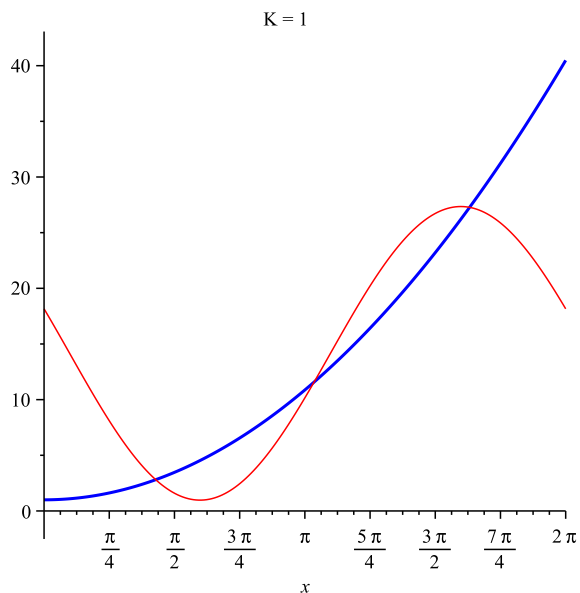


Рис. 12. разложение функции $1 + x^2$ на промежутке $[0, 2\pi]$, $K=40$

Пример разложения функции $-x^3 + 3$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

`>Anim(-x^3+3,x,-Pi,Pi,30);`

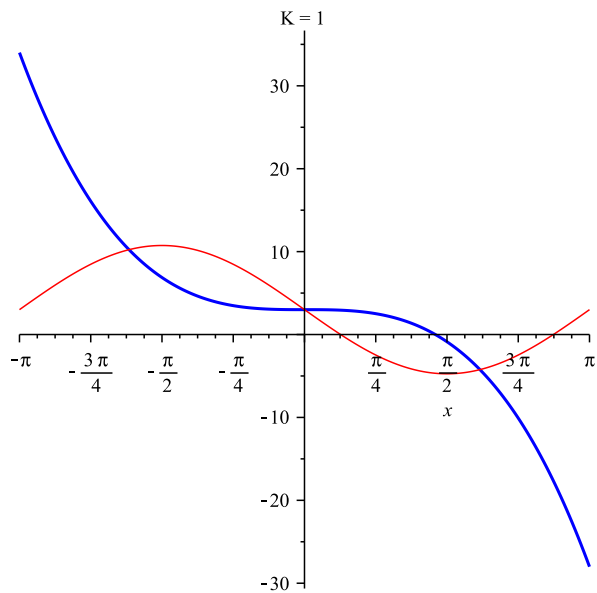


Рис. 13. разложение функции $-x^3 + 3$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

Пример разложения функции x^8 на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

`>Anim(x^8,x,-Pi,Pi,30);`

III.4. Примеры применения анимационных процедур

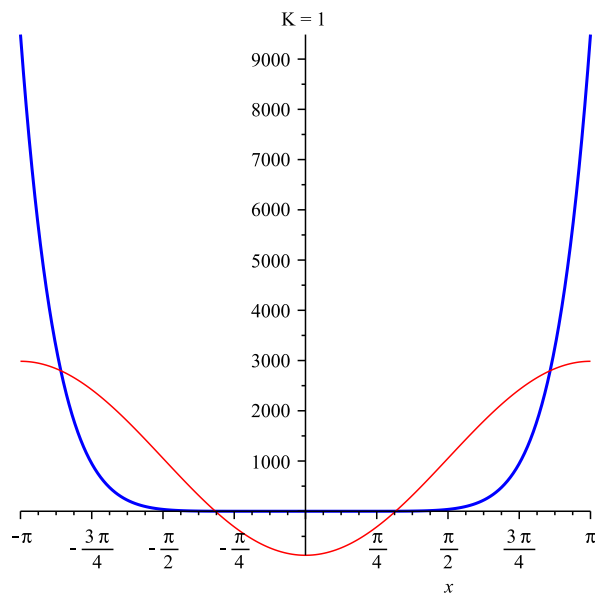


Рис. 14. разложение функции x^8 на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

На рис.15 показан один из стоп-кадров разложения функции x^8

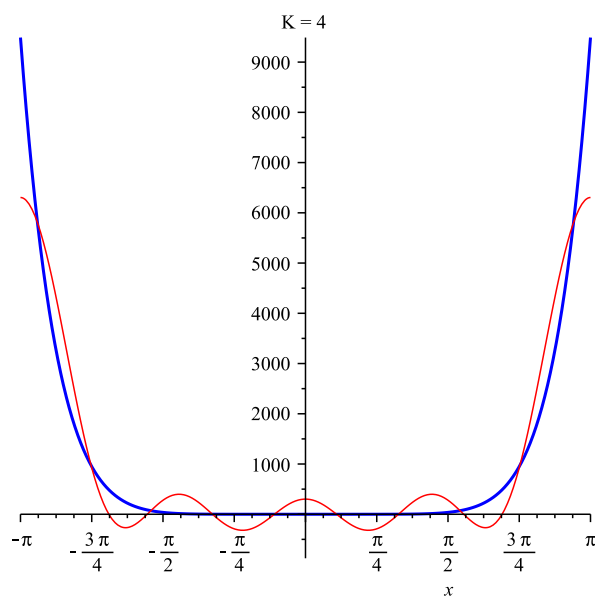


Рис. 15. разложение функции x^8 , $K=4$

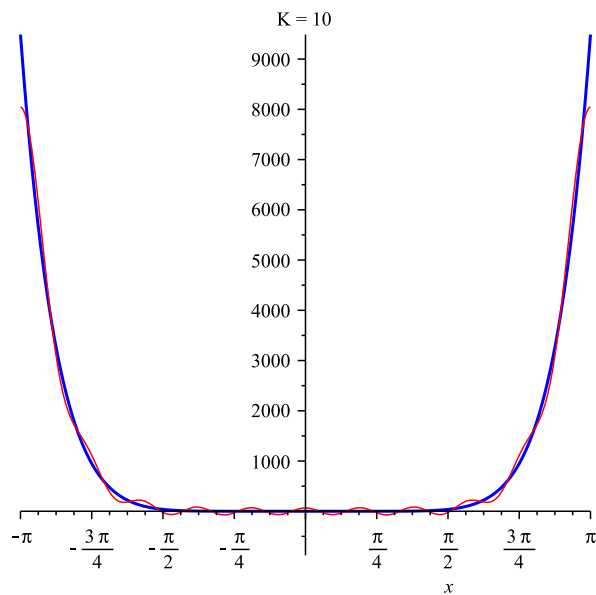


Рис. 16. разложение функции x^8 , $K=10$

Пример разложения функции $(1 + x^3)/(1 + x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

```
>Anim( (1+x^3)/(x+1),x,-Pi,Pi,30);
```

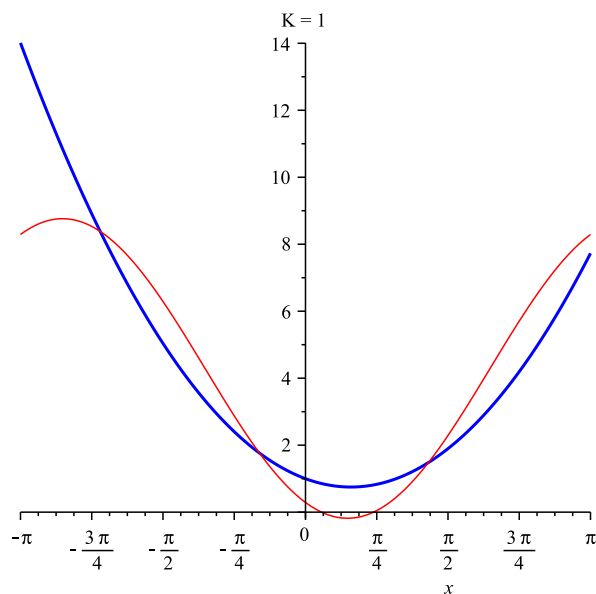


Рис. 17. разложение функции $(1 + x^3)/(1 + x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, $K=30$

III.4. Примеры применения анимационных процедур

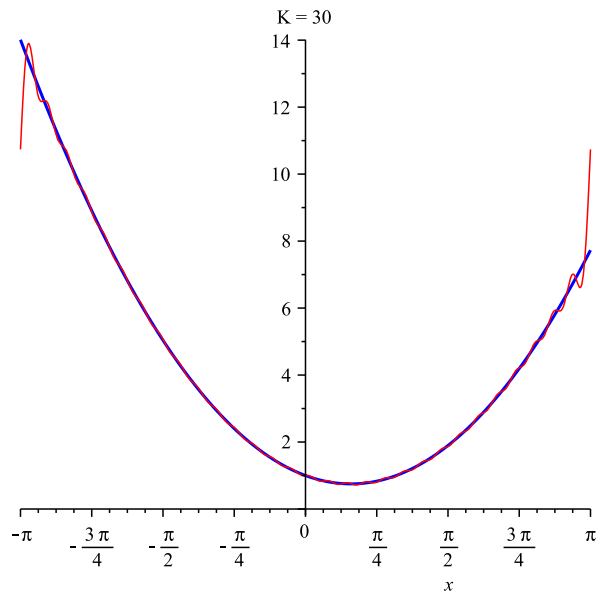


Рис. 18. завершающий кадр разложения функции $(1 + x^3)/(1 + x)$ на промежутке $[-\pi, \pi], K=30$

Пример разложение функции $x^2/(x - 1)$ на промежутке $[-\pi, \pi], K=60$

`>Anim(x^2/(x-1), x, -Pi, Pi, 60);`

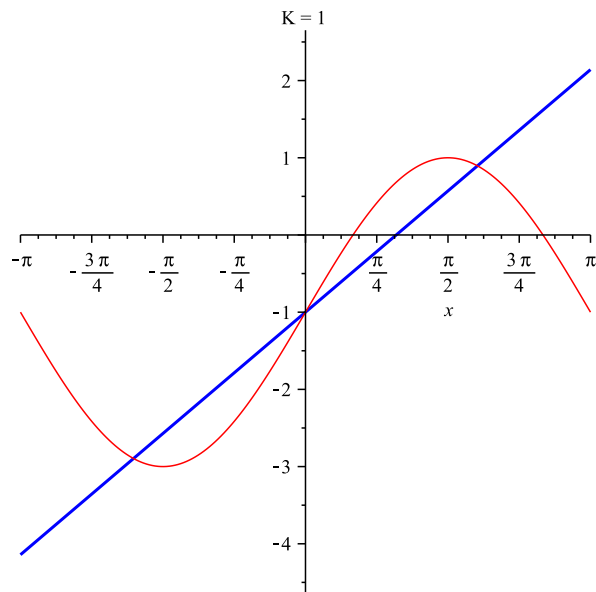


Рис. 19. разложение функции $x^2/(x - 1)$ на промежутке $[-\pi, \pi], K=60$

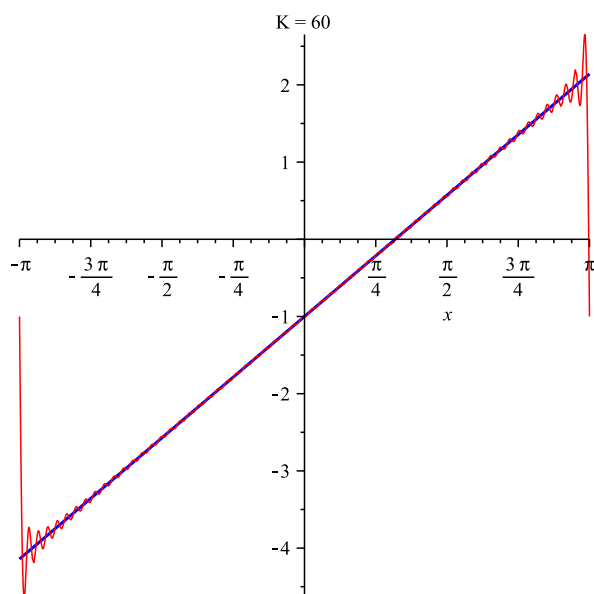


Рис. 20. завершающий кадр разложения функции $x^2/(x - 1)$ на промежутке $[-\pi, \pi], K=60$

Заключение

Таким образом, в данной работе решены следующие задачи:

1. Составлен обзор теории рядов Фурье.
2. Созданы программные процедуры анимации процесса вычисления рядов Фурье и построения графиков в пакете компьютерной математики Maple XVII.

Литература

- [1] Г.М.Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том 3 // Москва: Наука. - 1966. - 662 с.
- [2] Н.С.Пискунов. *Дифференциальное и интегральное исчисления*, том 2 // Москва: Наука. - 1985. - 346с.
- [3] С.Е.Савотченко, Т.Г.Кузьмичева. *Методы решения математических задач в Maple* // Белгород: - 2001. - 115 с.
- [4] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин. *Введение в Maple. Математический пакет для всех* // Москва: Мир.- 1997. - 213с.
- [5] В.П.Дьяконов. *Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании* // Москва: СОЛОН-Пресс. - 2006. - 720 с.
- [6] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов. *Издательская система LaTeX* Казань: - 1994.
- [7] С. Львовский. *TEX* // Москва: - 1996.- 448с.



Заключительный лист

Подпись автора работы _____

Дата _____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защищена в ГАК с оценкой
" _____ "

Дата _____

Секретарь ГАК _____