Научный дайджест: Теория чисел Касселса-Шмидта по Л.Н. Пушкину.

Подготовил: А.В. Казанцев Отчетный период: ноябрь 2019 г.

Число $x \in [0,1)$ называется r-числом Касселса-Шмидта ($x \in \mathrm{CS}_r$), если x, не будучи даже слабо нормальным по основанию r, нормально по всем целым основаниям $g \geq 2$ с иррациональными $\ln r/\ln g$. Теорема Касселса-Шмидта утверждает, что при любом целом $r \geq 2$ множество CS_r имеет мощность континуума.

Пусть $P = (p_0,\ldots, p_{r-1}) \neq (r-1,\ldots, r-1)$ – невырожденный вероятностный вектор, π – мера на $[0,1)$, относительно которой r-ичные цифры чисел интервала $[0,1)$ независимы и P-распределены; $g \geqslant 2$ – целое, такое, что отношение $\ln r/\ln g$ иррационально. Теорема Л.Н. Пушкина (метрический вариант теоремы Касселса–Шмидта) устанавливает нормальность по основанию g π-почти всех чисел интервала $[0,1)$.

Многие уточнения теоремы Касселса-Шмидта являются простыми следствиями теоремы Л.Н. Пушкина. Кроме того, последняя устойчива относительно нарушения условий:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайная последовательность r-ичных цифр, $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, связанных в эргодическую цепь Маркова. Пусть $\beta > 1$ есть такое алгебраическое число, что отношение $\ln\beta/\ln r$ иррационально. Тогда с вероятностью 1 число $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j r^{-j}$ нормально по основанию β. Доказательство основано на оценке Гельфонда-Бейкера для модуля линейной формы от логарифмов алгебраических чисел.

Более продвинутым уточнением теоремы Касселса-Шмидта является следующее обобщение результата Колбрука и Кемпермана. Оказывается, записанное в r-ичной системе счисления произвольное вещественное число под действием случайных поцифровых затухающих возмущений, еще не меняющих спектра предельных частот r-ичных цифр, становится почти наверное нормальным по всем мультипликативно независимым с r основаниям.