ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

010101.65 : МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)

УРАВНЕНИЯ СВЁРТОК В ОДНОЙ СВЁРТОЧНОЙ АЛГЕБРЕ

Работа завершена:
«____»_______________2015 г. ________________Нуртдинов И.Р.

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
Кандидат физ.-мат. наук,доцент,
«____»_______________2015 г. ________________ Салехов Л.Г.

Заведующий кафедрой:,
Доктор физ.-мат. наук, профессор
«____»_______________2015 г. ________________ Елизаров А.М.

КАЗАНЬ – 2015 г.

Содержание

1 Введение

Известно, что уравнения сверток в пространствах обобщенных функций имеют многочисленные реализации в различных областях естествознания. Поэтому теория уравнений сверток является важным математическим аппаратом при исследовании конкретных задач математической физики.

Целью работы было: овладеть теорией уравнений сверток в пространствах обобщенных функций и показать практические приложения этой теории в различных разделах математической физики.

2 Определение сверточной алгебры обобщенных функций. Рассмотрены некоторые из них

Определение сверточной алгебры.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$—пространство обобщенных функций, бесконечно дифференцируемых и финитных(с компактным носителем).

Векторное пространство $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабженное свёрткой называется **свёрточной алгеброй**, если выполнены следующие свойства.

1) $\forall S, T \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists S * T \in \mathcal{A}$ — внутренний закон композиции
2) $S * T = T * S, \forall S, T \in \mathcal{A}$ — комутативность
3) $(S * T) * H = S * (T * H)$ — ассоциативность

закон ассоциативности выполнен не зря, рассмотрим например случай:
$n = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$

$$(Y(t) * \delta') * 1 = \frac{dY(t)}{dt} * 1 = \delta * 1 = 1$$
$$Y(t) * (\delta' * 1) = Y(t) * \frac{d1}{dt} = Y(t) * 0 = 0$$

Рассмотрим несколько свёрточных алгебр:

1) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$—обобщенные функции с компактным носителем.
Если это векторное пространство снабдить операцией свётрка, то получим свёрточную алгебру $\{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), "*"\} = \mathcal{A}_c$

Свёрточная алгебра называется с единицей, если она обладает мерой Дирака—δ
$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \quad <\delta, \varphi> := \varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp} \delta = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
Получается сверточная алгебра $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является сверточной алгеброй с единицей.

2) $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$—пространство обобщенных функций заданных на $\mathbb{R}$, носители которых лежат на $\mathbb{R}_+$, т.е. supp$\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ : [0, +\infty]$

Сверточная алгебра $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ тоже является сверточной алгеброй с единицей.
$\delta \in \mathcal{D}'_+$ т.к. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$ лежит на $\mathbb{R}_+$

3) $\int'_+(\mathbb{R})$—пространство обобщенных функций медленного роста заданных на $\mathbb{R}$, носители которых лежат на $\mathbb{R}_+$. $\{\int'_+(\mathbb{R}), "*"\} = \mathcal{A}_c$—сверточная алгебра

Лемма.
Пусть $f(x), g(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, тогда $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (известно, что если пространство L^1 снабжено сверткой $\{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n), *\} = \mathcal{A}_c$, то оно называется свёрточной алгеброй)

Запишем в интегральной форме

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\varphi(x)dydx = \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(y)g(z)\varphi(y+z)dydz$$

Получается это равенство путем векторно матричной замены
$x-y=z$ (или $x_i-y_i=z_i,\ \ i=\overline{1,n}$)
$dx=dz$
$dx=dx_1...dx_n$
$x=y+z$
эта замена линейна, биективна(взаимно-однозначное отображение)

Получившееся равенство интегралов можно записать через скобки дуальности, т.е.

$$< f*g,\varphi >=< f\otimes g,\varphi^{\triangle} >,\ \ \varphi^{\triangle}(x,y):=\varphi(x+y)$$

где в левой части равенства скобки дуальности означают внешний интеграл по x, а свертка—внутренний интеграл, тогда как в правой части сразу получается двойной интеграл.

У этой записи есть недостаток, f и g обычные функции, а нам нужны обобщенные. Тогда запишем так

$$< F*G,\varphi >=< F\otimes G,\varphi^{\triangle} >,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

φ—бесконечно дифференцируемая функция определенная на $\mathbb{R}^n$ и финитная(с компактным носителем), т.е. $\operatorname{supp}\varphi=\{\overline{x\in\mathbb{R}^n|\varphi(x)\neq 0}\}$

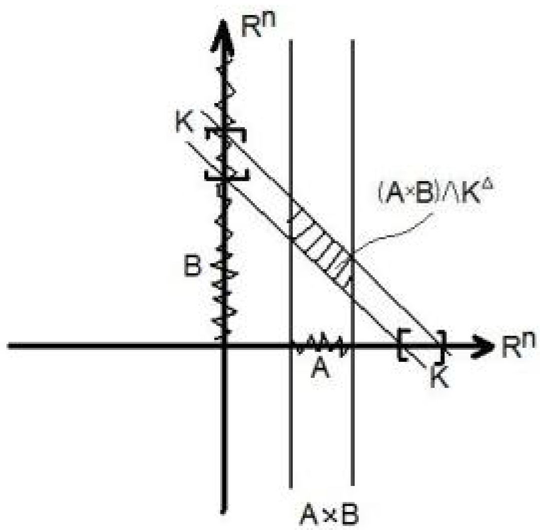
Пусть $\operatorname{supp}\varphi = K$—компакт, тогда $\operatorname{supp}\varphi^{\triangle} = K^{\triangle}$, где $K^{\triangle} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}|(x+y)\in K\}$

3 Определение пары допускающей свертку. Примеры

Для корректности вводим новое понятие—**пара допускающая свертку**(или **сверточные носители**)

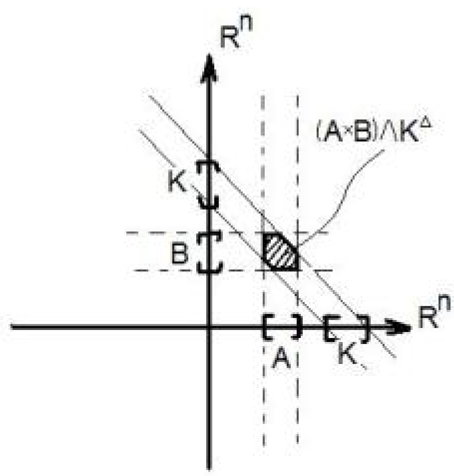
1) Пусть A,B—замкнутые множества на $\mathbb{R}^n$, A—компакт. Если $\{(A\times B)\cap K^{\triangle}\}$—компакт, то множества образуют пару допускающую свертку.

Строим компакт A и замкнутое множество B.
Затем строим декартово произведение $A\times B$.
Строим компакт K и $K^{\triangle}$
Из рисунка видно, что множество $\{(A\times B)\cap K^{\triangle}\}$—компакт



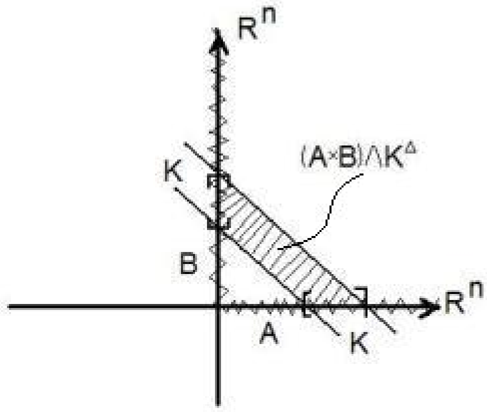
т.е. множества A и B—пара допускающая свертку.

2) Пусть A,B—компакты. Аналогично строим рисунок



получили что множество $\{(A \times B) \cap K^{\triangle}\}$—компакт, т.е. если A,B—компакты, то они пара допускающая свертку.

3) Пусть A,B—замкнутые множества. Аналогично строим рисунок



получили что множество $\{(A \times B) \cap K^{\triangle}\}$—компакт, т.е. если A,B—замкнутые множества, то они тоже пара допускающая свертку.

4) $\Gamma_0 := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$
$\Gamma_c := \{x \in \Gamma_0 | x_n^2 \geq c^2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2\}$
Любое замкнутое множество лежащее в сдвиге Γ_0, называется параболическим.
Любое замкнутое множество лежащее в сдвиге Γ_c, называется гиперболическим.

Получили, что если A-параболическое множество, B-гиперболическое множество, то пара A,B допускает свертку

4 Определение свертки в пространстве обобщенных функций

Пусть две обобщенные функции $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, такие что их носители $(\operatorname{supp} S, \operatorname{supp} T)$ образуют пару допускающую свертку, то $< S * T, \varphi > := < S \otimes T, \varphi^{\triangle} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

5 Метод факторизации в обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях и его приложения при отыскании элементарных решений принадлежащих сверточным алгебрам

Пусть дан дифференциальный полином с постоянными коэффициентами

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \tag{1.1}$$

где $D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}$ — в смысле обобщенных функций, $a_k \in \mathbb{C}, a_0 = 1$

При исследовании дифференциальных уравнений

$$P(D)U = W \tag{1.2}$$

в различных примерах обобщенных функций, методом **теории уравнений сверток**, важную роль играет элементарные решения оператора $P(D)$.

Рассмотрим метод отыскания элементарного решения отличный от известного метода.

По определению элементарного решения E оператора $P(D)$ есть

$$P(D)E = \delta \tag{1.3}$$

где δ—мера Дирака

Применим преобразование Фурье для отыскания элементарного решения. Предполагаем, что существует элементарное решение, т.е $E \in \int'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста, основанное на формуле

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi}\varphi(x)dx$$

где $\forall\varphi \in \int(\mathbb{R})$—пространство быстро убывающих функций

к последнему уравнению имеем

$$P(\xi)\hat{E}(\xi) = 1 \qquad \forall\xi \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

где $\qquad P(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\xi^k, \qquad \hat{E}(\xi) = \mathcal{F}(E)(\xi)$

Рассмотрим один из наиболее общих случаев, когда ξ_k—нули полинома $P(\xi)$ кратности q_k, $k=\overline{1,p}$. Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\prod_{k=1}^{p}(\xi-\xi_k)^{q_k}\hat{E}(\xi)=1 \tag{1.5}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{p} q_k = n$

который при переходе к обратному преобразованию Фурье дает факторизацию дифференциального уравнения (1.3)

Покажем счет :

$$\mathcal{F}\{\bigotimes_{k=1}^{p}\left(-\frac{\delta'}{2\pi i}-\xi_k\delta\right)^{q_k}\}*\mathcal{F}(E)(\xi)=\mathcal{F}(\delta)$$

теперь преобразование Фурье переводит свертку в мультипликативное произведение

$$\mathcal{F}\{\bigotimes_{k=1}^{p}\left(-\frac{\delta'}{2\pi i}-\xi_k\delta\right)^{q_k}E\}=\mathcal{F}(\delta)$$

поскольку образы равны, переписываем оригиналы

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{d}{dt}+2\pi i\xi_k\right)^{q_k}E(t)=(-2\pi i)^n\delta(t) \tag{1.6}$$

Эта факторизация полезна тем, что нам известна структура элементарного решения E_k для оператора $(\frac{d}{dt}+2\pi i\xi_k)^{q_k}$. она имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt}+2\pi i\xi_k\right)^{q_k}E_k=\delta(t)$$

$$E_k=\mathcal{Y}(t)e^{-2\pi i\xi_k t}\frac{t^{q_k-1}}{(q_k-1)!}$$

Отметим, что это элементарное решение E_k принадлежит сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$ с носителями в $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty]$

Поэтому элементарное решение E оператора $P(D)$ в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ имеет вид

$$E(t)=\bigotimes_{k=1}^{p}E_k(t)*(-2\pi i)^n\delta(t)$$

или

$$E(t) = (-2\pi i)^n \bigotimes_{k=1}^{p} \mathcal{Y}(t) e^{-2\pi i \xi_k t} \frac{t^{q_k - 1}}{(q_k - 1)!} \tag{1.7}$$

Поскольку $E(t) \in \mathcal{D}'_+$(в силу того, что любые два элемента из сверточной алгебры дают элемент из той же сверточной алгебры), то $\exists!$ решение уравнения (1.2), если его рассматривать в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$

Из курса УЧП известно: если мы рассмотрели уравнение сверток и оно существует в этой сверточной алгебре, значит оно сушествует и единственно.

Итак, доказано утверждение:
В сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ у уравнения (1.2) $\forall W \in \mathcal{D}'_+$ $\exists!$ решение, которое примет вид:

$$U = E(t) * W \tag{1.8}$$

В частности, если все нули ξ_k полинома $P(\xi)$ лежат в полуплоскости $Im\ z \leq 0$, то элементарное решение E оператора $P(D)$ принадлежит сверточной алгебре $\int'_+$ обобщенных функций медленного роста с носителями в $\mathbb{R}_+$. Тогда $\forall W \in \int'_+$ $\exists!$ решение уравнения (1.2) принадлежащее $\int'_+$, которое по-прежнему определяется формулой (1.8).

Пояснение:
Пусть $\xi_k = \alpha_k + i\beta_k$, тогда $e^{-2\pi i \xi t} = e^{-2\pi i(\alpha_k + i\beta_k)t} = e^{-2\pi i \alpha_k t} e^{2\pi \beta_k t}$. Если $\mathrm{Im}\,\xi \leq 0$, то $e^{2\pi\beta_k t} \to 0$ при $k \to 0$, тк β_k-отрицательно. То это есть обобщенная функция медленного роста, поэтому $E \in \int'_+ \subset \mathcal{D}'_+$

Заметим, что имея элементарное решение E, определяемое формулой (1.7), иногда удается, в силу не единственности элементарного решения, ибо оно определяется с точностью до общего решения соответствующего однородного уравнения, находить элементарные решения, принадлежащие иным свёрточным алгебрам обобщенных функций на оси $\mathbb{R}$. Например, алгебре $\Theta^n_c(\mathbb{R})$— обобщенных функций быстрого убывания.

Сверточным модулем является пр-во $\int'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста. В этом случае $\forall W \in \int'(\mathbb{R})$ $\exists!$ решение уравнения (1.2), определяемой той же формулой (1.8).

6 Решение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, метод теории уравнений сверток

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t) & t > 0,\ p, q - const, f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+)\ (2.1) \\ u(0) = a \qquad u'(0) = b \qquad (2.2) \end{cases}$$

Метод уравнения сверток в $\mathcal{D}'_+$

Если бы была классическая задача, то $f(t) \in \mathrm{C}$, а у нас $f \in \mathrm{L}^1_{loc}$ поэтому вводим регулярные обобщенные функции

$$U = Y(t)u(t)$$

$$F = Y(t)f(t) \tag{2.3}$$

Пусть $u(t)$—решение задачи (2.1)-(2.2). Тогда дифференцируем U в смысле обобщенных функций

$$\frac{dU}{dt} = Y(t)u'(t) + a\delta(t)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = Y(t)u''(t) + b\delta(t) + a\delta'(t)$$

Составим оператор входящий в левую часть нашего уравнения,

$$\frac{d^2U}{dt^2} + p\frac{dU}{dt} + qU = Y(t)\{u'' + pu' + qu\} + (b + pa)\delta(t) + a\delta'(t)$$

или в силу предположения, что $U(t)$ есть решение задачи (2.1)-(2.2), имеем

$$\frac{d^2U}{dt^2} + p\frac{dU}{dt} + qU = F(t) + (b + pa)\delta(t) + a\delta'(t) \tag{2.4}$$

(2.4)—уравнение сверток в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$

для удобства запишем в таком виде

$$LU = G(t)$$

$$LU * \delta = G(t)$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{dt^2} + p\frac{d\delta}{dt} + q\delta\right) * U = G(t) \tag{2.5}$$

$G(t) = F(t) + (b + pa)\delta(t) + a\delta'(t) \qquad (2.6)$
$\operatorname{supp}\delta = \{0\} \in \mathcal{D}'_+$
$\operatorname{supp} F = \{\mathbb{R}_+\} \in \mathcal{D}'_+$
и операция дифференцирования не увеличивает носитель, сумма тоже не выводит из $\mathcal{D}'_+$, т.е. уравнение (2.5) уравнение сверток в пространстве обобщенных функций, где U -неизвестная, остальные все известны.

Найдем элементарное решение уравнения сверток (2.5). По определению имеем

$$\frac{d^2E}{dt^2} + p\frac{dE}{dt} + qE = \delta$$

Тогда элементарное решение $E = Y(t)\mathbf{e}(t)$, где $\mathbf{e}(t)$-есть классическое решение задачи Коши

"$\mathbf{e}$": $\begin{cases} \mathbf{e}'' + p\mathbf{e}' + q\mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{e}(0) = 0 \\ \mathbf{e}'(0) = 1 \end{cases}$

решаем задачу "$\mathbf{e}$" , составляем характеристическое уравнение

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Рассмотрим один из случаев, остальные решаются аналогично
Пусть $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} > 0$ и $\omega^2 = \frac{p^2}{4} - q$

Тогда $\mathbf{e}(t) = e^{-\frac{p}{2}t}\{A \operatorname{ch}\omega t + B \operatorname{sh}\omega t\}$, как нам известно из ОДУ

$\mathbf{e}(0) = A = 0$, т.е.

$\mathbf{e}(t) = Be^{-\frac{p}{2}t} \operatorname{sh}\omega t$

$\mathbf{e}'(t) = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t}B \operatorname{sh}\omega t + B\omega \operatorname{ch}\omega t$

$\mathbf{e}'(0) = B\omega, \qquad B = \frac{1}{\omega}$

$$\mathbf{e}(t) = \frac{1}{\omega}e^{-\frac{p}{2}t} \operatorname{sh}\omega t$$

$$E = Y(t)\mathbf{e}(t) = Y(t)\frac{1}{\omega}e^{-\frac{p}{2}t} \operatorname{sh}\omega t \qquad (2.7)$$

Очевидно $E \in \mathcal{D}'_+$ (т.к. $Y(t)$ отрезает отрицательные части, значит $\operatorname{supp} E \in \mathbb{R}_+$),а тогда ∃! решение уравнения сверток (2.5), которое имеет вид

$$U = E(t) * G(t) \tag{2.8}$$

причем свертка сушествует, т.к. $G(t) \in \mathcal{D}'_+$

Тогда перейдем к интегральному представлению полученного решения

$$U = Y(t)\mathbf{e}(t) * \{Y(t)f(t) + (b+pa)\delta(t) + a\delta'(t)\}$$

имеем

1) $Y(t)\mathbf{e}(t) * Y(t)f(t) = \int\limits_0^{+\infty} Y(t-\tau)\mathbf{e}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \odot$

функция Y отсекает отрицательные значения, поэтому если $t-\tau < 0$, то $Y(t-\tau) = 0$, а если $t-\tau > 0$, то $0 < \tau < t$

$\odot = Y(t)\int\limits_0^t \mathbf{e}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \frac{Y(t)}{\omega}\int\limits_0^t e^{-\frac{p}{2}(t-\tau)} \operatorname{sh}\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau$

2) $Y(t)\mathbf{e}(t) * (b+pa)\delta(t) = (b+pa)Y(t)e^{-\frac{p}{2}t}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega}$

т.к. δ—нейтральный элемент по операции $*$

3) $Y(t)\mathbf{e}(t) * a\delta'(t) = a\frac{d}{dt}\{Y(t)\mathbf{e}(t)\} = a\{\delta\mathbf{e} + Y(t)\mathbf{e}'(t)\} = a\{\delta e^{-\frac{p}{2}t}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} + Y(t)\mathbf{e}'(t)\} =$
$= a\{Y(t)\mathbf{e}'(t)\} = aY(t)e^{-\frac{p}{2}t}\{-\frac{p}{2\omega}\operatorname{sh}\omega t + \operatorname{ch}\omega t\}$

т.к. $T * \delta' = \frac{d}{dt}T$ и если $f(t) \in \mathrm{C}$ $<\delta f(t), \varphi> = <\delta, f(t)\varphi> = f(0)\varphi(0) = f(0) <\delta, \varphi>$ $\Rightarrow$ $\delta f(t) = f(0)\delta$

тогда 1) + 2) + 3)

$$U(t) = Y(t)\{\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t e^{-\frac{p}{2}(t-\tau)}\operatorname{sh}\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau + \frac{b+pa}{\omega}e^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{sh}\omega t - e^{-\frac{p}{2}t}\frac{pa}{2\omega}\operatorname{sh}\omega t + ae^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{ch}\omega t\}$$

или

$$U(t) = Y(t)\{\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t e^{-\frac{p}{2}(t-\tau)}\operatorname{sh}\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{\omega}(b+\frac{pa}{2})e^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{sh}\omega t + ae^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{ch}\omega t\}$$

и тогда интергальное представление функции примет вид

$$u(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t e^{-\frac{p}{2}(t-\tau)}\operatorname{sh}\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{\omega}(b+\frac{pa}{2})e^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{sh}\omega t + ae^{-\frac{p}{2}t}\operatorname{ch}\omega t \tag{2.9}$$

Формула (2.9) дает решение задачи (2.1)-(2.2), хотя наша функция u обычная, но $u \notin \mathrm{C}^2$, что необходимо для классического решения, поэтому решение ищется в обобщенных функциях. Если $f(t) \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, то решение тоже обобщенное, т.е. $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+)$

7 Примеры систем уравнений в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$

Рассмотрим в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ данную систему

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + u_2 = Y(t) \\ u_1 + \frac{du_2}{dt} = Y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta' * u_1 + \delta * u_2 = Y(t) \\ \delta * u_1 + \delta' * u_2 = Y(t) \end{cases}$$

$$[A] * \vec{u} = \vec{w} \qquad [A] = \begin{pmatrix} \delta' & \delta \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$$

$$\triangle_c = \delta' * \delta' - \delta * \delta = \delta'' * \delta - \delta = \delta'' - \delta \quad \in \mathcal{D}'_+$$

$$\triangle_c * \triangle_c^{-1} = \delta$$

$$(\delta'' - \delta) * \triangle_c^{-1} = \delta$$

$$\frac{d^2 \triangle_c^{-1}}{dt^2} - \triangle_c^{-1} = \delta$$

$$E = \triangle_c^{-1} \qquad \frac{d^2 E}{dt^2} - E = \delta$$

$$"\mathbf{e}" \begin{cases} \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} - \mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{e}(0) = 0 \\ \mathbf{e}'(0) = 1 \end{cases}$$

составляем характеристическое уравнение
$\lambda^2 - 1 = 0$
$\lambda = \pm 1$

$$\mathbf{e}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = |\ \text{т.к. } \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}| = A \operatorname{ch} t + B \operatorname{sh} t$$

$$\mathbf{e}(0) = A = 0 \qquad \mathbf{e}'(0) = B = 1 \qquad \mathbf{e}(t) = \operatorname{sh} t$$

$$E = \triangle_c^{-1} = Y(t)\mathbf{e} = Y(t) \operatorname{sh} t$$

Проверим, что E—элементарное решение

$$\frac{d^2}{dt^2}(Y(t) \operatorname{sh} t) - Y(t) \operatorname{sh} t = \delta$$

$$\frac{d}{dt}(\delta(t) \operatorname{sh} t + Y(t) \operatorname{ch} t) - Y(t) \operatorname{sh} t = \delta \operatorname{ch} t + Y(t) \operatorname{sh} t - Y(t) \operatorname{sh} t = \delta$$

т.к. $< \delta(t) \operatorname{ch} t, \varphi >=< \delta, \operatorname{ch} t \varphi >= \operatorname{ch}(0)\varphi(0) = \varphi(0) =< \delta, \varphi > \Rightarrow \delta \operatorname{ch} t = \delta$

Получили верно!

$E_{ij} = \triangle_c^{-1} * \dot{A}_{ij}$

$\dot{A}$—алгебраическое дополнение A
$\dot{A}_{11} = \delta'$ $\quad \dot{A}_{12} = -\delta$
$\dot{A}_{21} = -\delta$ $\quad \dot{A}_{22} = \delta'$

$E_{11} = Y(t)\operatorname{sh} t * \delta'$ $\quad E_{12} = Y(t)\operatorname{sh} t * (-\delta)$
$E_{21} = Y(t)\operatorname{sh} t * (-\delta)$ $\quad E_{22} = Y(t)\operatorname{sh} t * \delta'$

$$\begin{pmatrix} E_{11} = Y(t)\operatorname{ch} t & E_{12} = -Y(t)\operatorname{sh} t \\ E_{21} = -Y(t)\operatorname{sh} t & E_{22} = Y(t)\operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{ch} t & -Y(t)\operatorname{sh} t \\ -Y(t)\operatorname{sh} t & Y(t)\operatorname{ch} t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{sh} t \\ Y(t)\operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

$u_1 = Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t) - Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t)$

$u_2 = -Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t) + Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t)$

Пусть $\vec{w} = \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{cases} 1) Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t) = Y(t) - \int\limits_0^t \operatorname{ch} \tau d\tau = Y(t)\operatorname{sh} t \\ 2) Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t) = Y(t) - \int\limits_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = Y(t)(\operatorname{ch} t - 1) \\ 3) Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t) = Y(t)(\operatorname{ch} t - 1) \\ 4) Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t) = Y(t)\operatorname{sh} t \end{cases}$$

то
$u_1 = Y(t)\operatorname{sh} t - Y(t)(\operatorname{ch} t - 1)$
$u_2 = Y(t)(\operatorname{ch} t - 1) + Y(t)\operatorname{sh} t$

т.е.

$$u_1 = Y(t)\{\operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t\} = u_2$$

Решая методом исключения

$u_2 = Y(t) - \frac{du_1}{dt}$

$u_1 + \frac{d}{dt}\{Y(t) - \frac{du_1}{dt}\} = Y(t)$

$u_1 + \delta - \frac{d^2u_1}{dt^2} = Y(t)$

$\frac{d^2u_1}{dt^2} - u_1 = \delta - Y(t)$

$$
"\mathbf{e}" \begin{cases} \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} - \mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{e}(0) = 0 \\ \mathbf{e}'(0) = 1 \end{cases}
$$

$\mathbf{e}(t) = \operatorname{sh} t$

$E(t) = Y(t) \operatorname{sh} t$

$u_1 = E * [\delta - Y(t)] = E - E * Y(t) = E - Y(t)[\operatorname{ch} t - 1]$

т.к. $E * Y(t) = Y(t) \operatorname{sh} t = Y(t) \int\limits_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = Y(t)(\operatorname{ch} t - 1)$

$u_1 = Y(t) \operatorname{sh} t - Y(t)(\operatorname{ch} t - 1)$

т.е. $u_1 = Y(t)\{\operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t\}$ - получили тот же ответ

Рассмотрим в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ следующую систему уравнений сверток

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} - u_2 = Y(t) \\ \\ \frac{du_2}{dt} - u_1 = Y(t) \end{cases} \text{или} \begin{cases} \frac{du_1}{dt} - u_2 = Y(t) \\ \\ -u_1 + \frac{du_2}{dt} = Y(t) \end{cases}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -\delta & \delta' \end{pmatrix}$$

$\triangle_c = \delta'' - \delta$

$\triangle_c^{-1} = Y(t)\operatorname{sh} t$

$[E] = [A]^{-1}$

$\dot{A}_{11} = \delta' \qquad \dot{A}_{12} = -\delta$
$\dot{A}_{21} = -\delta \qquad \dot{A}_{22} = \delta'$

$E_{11} = \triangle_c^{-1} * \dot{A}_{11} = Y(t)\operatorname{sh} t * \delta' = Y(t)\operatorname{ch} t$
$E_{12} = \triangle_c^{-1} * \delta = Y(t)\operatorname{sh} t$
$E_{21} = \triangle_c^{-1} * \dot{A}_{12} = Y(t)\operatorname{sh} t$
$E_{22} = \triangle_c^{-1} * \dot{A}_{22} = Y(t)\operatorname{ch} t$
т.е.
$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{ch} t & Y(t)\operatorname{sh} t \\ Y(t)\operatorname{sh} t & Y(t)\operatorname{ch} t \end{pmatrix}$
тогда

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{ch} t & Y(t)\operatorname{sh} t \\ Y(t)\operatorname{sh} t & Y(t)\operatorname{ch} t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t) & Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t) \\ Y(t)\operatorname{sh} t * Y(t) & Y(t)\operatorname{ch} t * Y(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} Y(t)\operatorname{sh} t & Y(t)(\operatorname{ch} t - 1) \\ Y(t)(\operatorname{ch} t - 1) & Y(t)\operatorname{sh} t \end{pmatrix}$$

т.е

$$u_1 = u_2 = Y(t)\{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t - 1\}$$

8 Метод Коши отыскания элементарного решения обыкновенного линейного дифференциального оператора. Пример

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k D^{m-k}$$

где $a_k - const,\ a_0 = 1$

Метод Коши
по-определению:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) E = \delta \tag{3.1}$$

Применяем преобразование Фурье в $\mathcal{E}'$ основанное на формуле

$$\mathcal{FL}(\varphi)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \varphi(\xi) d\xi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{3.2}$$

Известно, что $\mathcal{FL}(\varphi)(\xi)$ есть целая аналитическая функция по ξ. Пусть $\hat{E}(\xi) = \mathcal{FL}(\hat{E})(\xi)$. Применим $\mathcal{FL}$ к уравнению (3.2) имеем:

$$P(2\pi i\xi)\hat{E}(\xi) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathrm{C}$$

Тогда

$$\mathcal{K}(x) = \oint\limits_{\mathbb{R}, |\xi| = R} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{P(2\pi i \xi)} d\xi$$

где R—окружность $|\xi| = R$, содержит все нули полинома $P(2\pi i\xi)$

Далее совершая замену переменной

$2\pi i \xi = z$
$d\xi = \frac{dz}{2\pi i}$

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = \frac{R}{2\pi i}} \frac{e^{zx}}{P(z)} dz = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{res}_{z=\alpha_k} \frac{e^{zx}}{P(z)}$$

где α_k - нули полинома $P(z)$

Тогда

$$E(x) = Y(x)\mathcal{K}(x)$$

Пример:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^{(2)} + \beta^2$$

где α и β — const

Имеем

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{e^{zx}}{(z+\alpha)^2 + \beta^2} dz = \mathrm{res}_{z_1} \frac{e^{zx}}{(z+\alpha)^2 + \beta^2} + \mathrm{res}_{z_2} \frac{e^{zx}}{(z+\alpha)^2 + \beta^2}$$

Но

$$\mathrm{res}_{z_i} \frac{e^{zx}}{(z+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{e^{z_i x}}{2(z_i + \alpha)}$$

где $i = 1, 2, \;\; z_i = -\alpha \pm i\beta$

Тогда

$$\mathcal{K}(x) = \frac{e^{(-\alpha + i\beta)x}}{2i\beta} - \frac{e^{(-\alpha - i\beta)x}}{2i\beta} = \frac{e^{-\alpha x}}{\beta} \sin \beta x$$

Следствие

$$E(x) = Y(x)\mathcal{K}(x) = Y(x) e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{\beta}$$

$\in \mathcal{D}'_+$ или $\int'_+$ в зависимости от значения α

т.к. $E(x) \in \mathcal{D}'_+$(или $\int'_+$), то $\exists!$ решение уравнения $P(\frac{d}{dx})U = T$ в $\mathcal{D}'{}_+$(или $\int'_+$) которое примет вид

$$U = E * T \quad (*)$$

Вывод

Если $E \in \int'_+$, то $\forall T \in \int'_+$ $\exists!$ решение уравнения $P(\frac{d}{dx})U = T$ определенное по формуле (*)

Если $E \in \mathcal{D}'_+$, то $\forall T \in \int'_+$ (или $\mathcal{D}'_+$) $\exists!$ решение в $\mathcal{D}'_+$ определенное так же по формуле (*)

9 Список литературы

Список литературы

[1] Владимиров В.С., *Уравнения математической физики*, М.Наука, 1988г., 512с..

[2] Шубин М.А. *Лекции об уравнениях метематической физики*, М.:МЦНМО., 2003г., 303с..

[3] Салехов Л.Г. *Лекции по уравнениям в частных производных*, 2012г.

[4] Салехов Л.Г. *Лекции по технике ядер*, 2013г.

[5] Салехов Л.Г. *Лекции по интегральным преобразованиям в пространстве обобщенных функций*, 2014г.