Известия вузов. Математика
2008, №10, с. 75–78

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Ф.Д. КОДЗОЕВА

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЕСОВОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРОВ РАДИАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Аннотация. Приводится характеризация функций из весового пространства Бесова на единичном круге комплексной плоскости в терминах некоторых операторов дробного дифференцирования.

Ключевые слова: преобразование Мёбиуса, гиперболическая метрика Бергмана, оператор дробного дифференцирования.

УДК: 517.547

Abstract. We characterize the functions of the weighted Besov space on the unit circle in the complex plane in terms of certain operators of fractional differentiation.

Keywords: Möbius transform, hyperbolic Bergman metric, fractional differentiation operator.

Введение

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $0 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$ определим весовое пространство Бесова $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ как множество аналитических на $\mathbb{D}$ функций, для которых

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{Np-2} |f^{(N)}(z)|^p d\mu_\lambda(z) < \infty,$$

где

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi} dx\, dy, \quad z = x + iy,$$

а N — любое фиксированное натуральное число, удовлетворяющее условию $N > \frac{1-\lambda}{p}$.

Заметим, что определение весового пространства $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ не зависит от $N > \frac{1-\lambda}{p}$. В частности, при $1 - \lambda < p < \infty$ можно взять $N = 1$ [1].

Безвесовое пространство Бесова на $\mathbb{D}$ ($B_p(\mathbb{D}) = B_p^0(\mathbb{D})$) введено и описано в работе [2]. Результаты из [2] были перенесены на случай ограниченной симметричной области в [3],

Поступила 11.01.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00297-а).

[4]. В этих работах характеризация функций из пространств $B_p(\mathbb{D})$ приводится в различных терминах, включая осцилляцию функции в метрике Бергмана и проектор Бергмана. В работах [3], [4] используется весовой проектор Бергмана и также некоторые аналоги оператора дробного дифференцирования. В этой связи упомянем монографии [5]–[7] (см. также имеющуюся там литературу).

В работах [1] и [8] приводится характеризация функций из весового пространства Бесова $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ в терминах весового проектора Бергмана и средней осцилляции функции f в метрике Бергмана.

В данной работе продолжено исследование весовых аналитических пространств Бесова $B_p^\lambda(\mathbb{D})$: приводится описание в терминах некоторых операторов дробного дифференцирования. Основной результат содержится в теореме 2.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Н. Карапетянцу за постановку задачи и постоянную помощь в ее решении.

1. Вспомогательные сведения

Пусть dm — дифференциал меры Лебега на $\mathbb{D}$. Пространство $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{dm})$ состоит из измеримых на $\mathbb{D}$ функций f, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{dm}(z) < \infty$. Пусть $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ обозначает весовое пространство Бергмана на $\mathbb{D}$, состоящее из аналитических на $\mathbb{D}$ функций, принадлежащих весовому пространству $L^2(\mathbb{D}, d\mu_\lambda)$, $-1 < \lambda < \infty$.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$d\nu(z) = \frac{d\mu(z)}{(1-|z|^2)^2}, \quad d\nu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\nu(z).$$

Пусть $H(\mathbb{D})$ — пространство аналитических функций на $\mathbb{D}$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть $-1 < \alpha < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ и $1+\alpha$, $1+\alpha+t$ не являются целыми отрицательными числами. Тогда, как показано в теореме 5.1 из [6], существует единственный линейный оператор $R^{\alpha,t}$ на $H(\mathbb{D})$, удовлетворяющий равенству

$$R_z^{\alpha,t}\left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\right) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha+t}}, \tag{1}$$

где нижний индекс z указывает на действие этого оператора по переменной z. Заметим также, что для оператора $R^{\alpha,t}$ при $-1 < \alpha < \infty$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$R^{\alpha,t}(z^n) = \int_{\mathbb{D}} \frac{w^n}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha+t}} d\mu_\alpha(w), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Оператор $R^{\alpha,t}$ естественно называть (весовым) оператором дробного дифференцирования порядка t. При $-1 < \alpha < \infty$, $t > 0$ существует обратный к $R^{\alpha,t}$ (весовой) оператор $R_{\alpha,t}$ дробного интегрирования порядка t ([6], теорема 5.2).

2. Характеризация весовых аналитических пространств Бесова $B_p^\lambda(\mathbb{D})$

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$. *Тогда пространство* $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ *полно с нормой, определяемой равенством*

$$\|f\|_p^p = \sum_{m=0}^{N-1} |f^{(m)}(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{Np-2} |f^{(N)}(z)|^p d\mu_\lambda(z),$$

где N *— любое натуральное число такое, что* $N > \frac{1-\lambda}{p}$. *Кроме того, множество многочленов* z^n $(n = 0, 1, \ldots)$ *плотно в* $B_p^\lambda(\mathbb{D})$.

Основным результатом исследования является

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$, $1 + \alpha$ *не является отрицательным целым числом и функция* f *аналитична на* $\mathbb{D}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$;
2) *функция* $(1 - |z|^2)^t R^{\alpha,t} f(z)$ *принадлежит пространству* $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ *для некоторого положительного* $t > \frac{1-\lambda}{p}$, *где* $1+\alpha+t$ *не является целым отрицательным числом*;
3) *функции* $(1 - |z|^2)^t R^{\alpha,t} f(z)$ *принадлежат пространству* $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ *для всех положительных* $t > \frac{1-\lambda}{p}$, *где* $1 + \alpha + t$ *не является целым отрицательным числом.*

Приведем схему доказательства этого результата. То, что третье условие влечет первое, вытекает из свойств оператора дифференцирования $R^{\alpha,N}$ целого порядка. Принимая во внимание ограниченность оператора $R^{\alpha,N}$ в пространстве $\mathcal{A}^p_{pN-2+\lambda}(\mathbb{D})$, достаточно показать, что

$$\|f^{(N)}\|_{\mathcal{A}^p_{pN-2+\lambda}(\mathbb{D})} \leqslant C\|R^{\alpha,N} f\|_{\mathcal{A}^p_{pN-2+\lambda}(\mathbb{D})}.$$

Для этого следует воспользоваться равенством (1) и его обобщением на случай, когда индекс α дифференциального оператора $R^{\alpha,t}$ не совпадает с параметром веса ядра Бергмана ([3], [4]).

То, что из первого условия следует второе, доказывается непосредственными оценками.

Из второго условия следует третье, так как нормы функций $(1 - |z|^2)^t R^{\alpha,t} f$ и $(1 - |z|^2)^s R^{\alpha,s} f$ в пространстве $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ эквивалентны для всех $f \in H(\mathbb{D})$, где s, t — две положительные фиксированные постоянные. Это доказывается непосредственными вычислениями с использованием неравенств

$$C_1 \int_{\mathbb{D}} |R^{\alpha,t} f(z)|^p d\mu_{pt-2+\lambda}(z) \leqslant \int_{\mathbb{D}} |(1 - |z|^2)^\sigma R^{\alpha+t,\sigma} R^{\alpha,t} f(z)|^p d\mu_{pt-2+\lambda}(z) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \int_{\mathbb{D}} |R^{\alpha,t} f(z)|^p d\mu_{pt-2+\lambda}(z),$$

приведенных в теореме 2.19 из [6]. Здесь также следует воспользоваться свойством $R^{\alpha+t,\sigma} R^{\alpha,t} = R^{\alpha,s}$, $s = t + \sigma$, $\sigma > 0$, которое вытекает из самого определения оператора $R^{\alpha,t}$.

В качестве приложения сформулируем

Следствие. Пусть $0 < p < \infty$, t — положительное число такое, что $t > \frac{1-\lambda}{p}$, и $2 + \alpha$ не является целым отрицательным числом. Тогда $R^{\alpha,t}$ есть ограниченный обратимый оператор, действующий из $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}^p_{pt-2+\lambda}(\mathbb{D})$.

Литература

[1] Karapetyants A.N., Kodzoeva F.D. *Analytic weighted Besov spaces on the unit ball* // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2005. – V. 139. – P. 121–135.

[2] Zhu K. *Analytic Besov spaces* // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – V. 157. – P. 318–336.

[3] Zhu K. *Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains* // Quarterly J. Math. Oxford (2). – 1995. – V. 46. – P. 239–256.

[4] Zhu K. *Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains, II* // Indiana Univ. Math. J. – 1995. – V. 44. – № 4. – P. 1017–1031.

[5] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces.* – New York: Springer-Verlag, 2000. – 299 p.

[6] Zhu K. *Spaces of holomorphic functions in the unit ball.* – Graduate texts in Math. – Springer, 2004. – 301 p.

[7] Zhu K. *Operator theory in function spaces.* – Mathematical Surveys and Monographs, 138. Providence, RI: American Mathematical Society, xvi, 348 p.

[8] Карапетянц А.Н., Кодзоева Ф.Д. *Характеризация функций из весового аналитического пространства Бесова на единичном диске* // В сб.: Комплексный анализ. Теория операторов. Матем. моделир. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН. – 2006. – С. 48–62.

Ф.Д. Кодзоева

аспирант, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Южный федеральный университет,
344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 105,

e-mail: ferdos@mail.ru

F.D. Kodzoeva

Postgraduate, Chair of Differential and Integral Equations,
Southern Federal University,
105 Bol'shaya Sadovaya str., Rostov-on-Don, 344006 Russia,

e-mail: ferdos@mail.ru