Известия вузов. Математика
2008, № 10, с. 70–74

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Д.В. ВАЛОВИК, Ю.Г. СМИРНОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ТМ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

Аннотация. Рассматривается распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном диэлектрическом слое, расположенном между двумя линейными средами. Нелинейность в слое выражается законом Керра. Проблема сводится к нелинейной краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено дисперсионное уравнение и первое приближение для собственных значений задачи. Выполнено сравнение со случаем линейной среды в слое.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, краевая задача, нелинейность Керра.

УДК: 517.958

Abstract. We consider the propagation of TM-polarized electromagnetic waves in a nonlinear dielectric layer located between two linear media. The nonlinearity in the layer is described by the Kerr law. We reduce the problem to a nonlinear boundary eigenvalues problem for a system of ordinary differential equations. We obtain a dispersion relation and a first approximation for eigenvalues of the problem. We compare the results with those obtained for the case of a linear medium in the layer.

Keywords: dispersion relation, boundary value problem, Kerr nonlinearity.

Введение

Задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных средах интенсивно изучают в течение нескольких десятилетий [1]–[5]. Математические модели для таких явлений приводят к краевым задачам на собственные значения для систем дифференциальных уравнений, в которые спектральный параметр входит нелинейным образом. Изучение таких задач представляет большие трудности, так как не удается применить известные методы исследования спектральных задач. Несмотря на большое число публикаций, полного аналитического решения задачи распространения ТМ-поляризованных волн в нелинейном диэлектрическом слое получено не было.

Поступила 25.12.2007; краткое сообщение 19.05.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-07-89063а.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой с нелинейностью типа Керра, расположенный между двумя полубесконечными средами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Среды заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем всюду $\mu = \mu_0$ — магнитная проницаемость вакуума.

Электрическое поле гармонически зависит от времени $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_+(x,y,z)\cos\omega t + \mathbf{E}_-(x,y,z)\sin\omega t$ и удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_+(x,y,z) + i\mathbf{E}_-(x,y,z)$ и $\mathbf{H}(x,y,z)$ — комплексные амплитуды. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра $\varepsilon = \varepsilon_2 + a\,|E|^2$, где $a > 0$ и $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ — константы. Временной множитель везде ниже опущен. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (1.1), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред в точках $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает при $|x| \to \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Рассмотрим TM-поляризованные волны $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$, $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$. Предполагаем, что компоненты поля гармонически зависят от z. Введем обозначение $k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ и выполним нормировку в соответствии с формулами $\widetilde{x} = kx$, $d/dx = kd/d\widetilde{x}$, $\widetilde{\gamma} = \gamma/k$, $\widetilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j/\varepsilon_0$ $(j = 1,2,3)$, $\widetilde{a} = a/\varepsilon_0$. Переобозначаем $E_z \equiv Z(\widetilde{x})$, $iE_x \equiv X(\widetilde{x})$ и, опуская значок тильды, получим систему в нормализованной форме

$$-\frac{d^2Z}{dx^2} + \gamma\frac{dX}{dx} = \varepsilon Z, \quad -\frac{dZ}{dx} + \gamma X = \frac{\varepsilon}{\gamma}X, \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + a\left(X^2 + Z^2\right), & 0 < x < h; \\ \varepsilon_3, & x > h, \end{cases}$$

а $\gamma > 0$ — неизвестный спектральный параметр — постоянная распространения электромагнитной волны, удовлетворяющая неравенству $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$. Будем искать действительные решения $X(x)$, $Z(x)$ для системы (1.2).

Также будем полагать, что функции $X(x)$, $Z(x)$ дифференцируемы, причем $X(x) \in C(-\infty;0] \cap C[0;h] \cap C[h;+\infty) \cap C^1(-\infty;0) \cap C^1(0;h) \cap C^1(h;+\infty)$ и $Z(x) \in C(-\infty;+\infty) \cap C^2(-\infty;0) \cap C^2(0;h) \cap C^2(h;+\infty)$.

2. Решение системы дифференциальных уравнений

Для полупространства $x < 0$ $\varepsilon = \varepsilon_1$ и получаем общее решение

$$X(x) = A\exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right), \quad Z(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\gamma}A\exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right). \tag{2.1}$$

Для полупространства $x > h$ $\varepsilon = \varepsilon_3$ и имеем

$$X(x) = B\exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right), \quad Z(x) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\gamma}B\exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right). \tag{2.2}$$

В формулах (2.1) и (2.2) принято во внимание условие на бесконечности, константы A и B определяются начальными и граничными условиями.

Внутри слоя $0 < x < h$ система (1.2) принимает вид

$$-\frac{d^2Z}{dx^2} + \gamma\frac{dX}{dx} = \left(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)\right)Z, \quad -\frac{dZ}{dx} + \gamma X = \frac{1}{\gamma}\left(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)\right)X. \tag{2.3}$$

Введем новые переменные $\tau\left(x\right) = \frac{\varepsilon_2 + a((X(x))^2 + (Z(x))^2)}{\gamma^2}$, $\eta\left(x\right) = \gamma\frac{X(x)}{Z(x)}\tau\left(x\right)$, обозначим $\tau_0 = \varepsilon_2/\gamma^2$. Тогда $X^2 = \frac{\gamma^2}{a}\frac{\eta^2(\tau-\tau_0)}{\eta^2+\gamma^2\tau^2}$, $Z^2 = \frac{\gamma^4}{a}\frac{\tau^2(\tau-\tau_0)}{\eta^2+\gamma^2\tau^2}$, систему (2.3) в новых переменных можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 2\gamma^2\frac{\tau^2\eta(\tau-\tau_0)(2-\tau)}{\tau(\eta^2+\gamma^2\tau^2)+2\eta^2(\tau-\tau_0)}, \\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{\gamma^2\tau^2+\eta^2(\tau-1)}{\tau}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Система (2.4) имеет первый интеграл

$$\eta^2\left(C_1 + 3\tau^2 - 2\tau^3 - 2\tau\left(2-\tau\right)\tau_0\right) = \gamma^2\tau^2\left(\tau^2 - C_1\right). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) есть алгебраическое уравнение 4-й степени относительно τ. Его решение $\tau = \tau\left(\eta\right)$ может быть выписано явно по формулам Кардано–Феррари [6].

3. Граничные условия и дисперсионное уравнение

Используя условия непрерывности касательных составляющих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, найдем $X\left(h\right)$, $\tau\left(h\right)$ и C_1; $E_z^{(h)}$ — заданная константа, $H_y^{(h)}{=}-E_z^{(h)}\varepsilon_3/\sqrt{\gamma^2{-}\varepsilon_3}$, $H_y^{(0)}{=}E_z^{(0)}\varepsilon_1/\sqrt{\gamma^2{-}\varepsilon_1}$. Для $X\left(h\right)$ имеем $aX^3\left(h\right) + \left(\varepsilon_2 + a(E_z^{(h)})^2\right)X\left(h\right) - \gamma H_y^{(h)} = 0$. Величина $\varepsilon_2 + a(E_z^{(h)})^2$ неотрицательна и, следовательно, уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Имеем $C_1 = \tau^2\left(h\right) - \frac{2\varepsilon_3^2\tau(h)(2-\tau(h))(\tau(h)-\tau_0)}{\varepsilon_3^2+\gamma^2(\gamma^2-\varepsilon_3)\tau^2(h)}$, где $\tau\left(h\right) = \frac{H_y^{(h)}}{\gamma X(h)}$. Легко показать, что $C_1 > 0$, в этом случае уравнение (2.5), рассматриваемое как уравнение относительно $\tau\left(x\right)$, будет иметь положительный корень.

Известно, что $\varepsilon X\left(x\right)$ и $Z\left(x\right)$ непрерывны на границах раздела сред в точках $x = 0$ и $x = h$. Тогда функция $\eta\left(x\right)$ также непрерывна в этих точках. Используя (2.1) и (2.2), получаем

$$\eta\left(0\right) = \varepsilon_1/\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} > 0, \quad \eta\left(h\right) = -\varepsilon_3/\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} < 0. \tag{3.1}$$

Из системы (2.4) ясно, что функция $\eta\left(x\right)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,\ h]$. Учитывая знаки выражений (3.1), получаем, что $\eta\left(x\right)$ имеет точку разрыва. В общем случае $\eta\left(x\right)$ на отрезке $[0,\ h]$ имеет несколько точек разрыва $x_0, x_1, \ldots, x_N$, причем $\eta\left(x_0 - 0\right) = \eta\left(x_1 - 0\right) = \cdots = \eta\left(x_N - 0\right) = +\infty$ и $\eta\left(x_0 + 0\right) = \eta\left(x_1 + 0\right) = \cdots = \eta\left(x_N + 0\right) = -\infty$.

Обозначим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\,d\eta = T$, где $f \equiv f\left(\eta\right) = \frac{\tau}{\gamma^2\tau^2+\eta^2(\tau-1)}$, а $\tau = \tau\left(\eta\right)$ выражается из уравнения (2.5). Можно показать, что $x_{i+1} - x_i = T > 0$, где $i = \overline{0,\ N-1}$. Отсюда следует, что число точек разрыва функции $\eta\left(x\right)$ конечно на отрезке $[0, h]$.

Получаем дисперсионное уравнение в окончательной форме

$$-\int_{\eta(h)}^{\eta(0)} f\,d\eta + (N+1)\,T = h, \quad \text{где } N \geq 0 \text{ — целое число.} \tag{3.2}$$

Когда $N \neq 0$, возникает несколько уравнений при различных значениях N. Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Все полученные γ будут составлять множество постоянных распространения, на которых (и только на них) будут распространяться волны в слое при данном h. Действительно, N будет принимать все целые значения от 0 до $[h/T]$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Легко показать, что все необходимые интегралы сходятся.

4. Предельный переход к случаю линейной среды в слое

Рассмотрим предельный переход при $a \to 0$ к случаю линейной среды в слое. Дисперсионное соотношение для линейного случая выглядит следующим образом [7]:

$$\operatorname{tg}\left(h\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}\right)=\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}+\varepsilon_3\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1})}{\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_2-\gamma^2)-\varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}. \tag{4.1}$$

Результаты классического анализа позволяют перейти к пределу при $a \to 0$ под знаком интеграла в (3.2) и получить

$$h\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}=\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}+\varepsilon_3\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1})}{\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_2-\gamma^2)-\varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}+(N+1)\,\pi. \tag{4.2}$$

Взяв тангенс от выражения (4.2), получим (4.1).

5. Первое приближение для собственных значений задачи

Пусть $F\,(a,\gamma)=h$, где $F\,(a,\gamma)$ – левая часть уравнения (3.2). Тогда $F\,(a,\gamma)=h$ определяет неявную функцию $\gamma\equiv\gamma\,(a)$. Все условия, требуемые теоремой существования неявной функции и ее производной в окрестности точки $a=0$, выполняются. Тогда

$$\gamma\equiv\gamma\,(a)=\gamma\,(0)+\frac{d\gamma\,(a)}{da}\Big|_{a=0}a+O\left(a^2\right)=\gamma_0+\gamma_1 a+O\left(a^2\right),$$

где $\gamma\,(0)=\gamma_0$ является решением уравнения (4.1).

Можно показать, что

$$\gamma_1\equiv\frac{d\gamma(a)}{da}\Big|_{a=0}=\frac{(\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_3)+\varepsilon_3^2(\varepsilon_2-\gamma^2))(E_z^{(h)})^2}{8\gamma\varepsilon_2^3(\varepsilon_2-\gamma^2)(\gamma^2-\varepsilon_3)}\,\frac{P_1}{Q_1}, \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered}P_1=2\varepsilon_2^2(\varepsilon_2-2\gamma^2)\left(-\frac{\varepsilon_1\sqrt{(\gamma^2-\varepsilon_1)^3}}{(\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1^2(\varepsilon_2-\gamma^2))^2}-\frac{\varepsilon_3\sqrt{(\gamma^2-\varepsilon_3)^3}}{(\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_3)+\varepsilon_3^2(\varepsilon_2-\gamma^2))^2}\right)+\\ +(3\varepsilon_2+2\gamma^2)(\varepsilon_2-2\gamma^2)\left(-\frac{\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}{\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1^2(\varepsilon_2-\gamma^2)}-\frac{\varepsilon_3\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}{\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_3)+\varepsilon_3^2(\varepsilon_2-\gamma^2)}\right)+\\ +\frac{3\varepsilon_2^2-4\gamma^2\varepsilon_2+4\gamma^4}{\varepsilon_2}h,\end{gathered} \tag{5.2}$$

$$Q_1=\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}(\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1^2(\varepsilon_2-\gamma^2))}+\frac{\varepsilon_3(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}(\varepsilon_2^2(\gamma^2-\varepsilon_3)+\varepsilon_3^2(\varepsilon_2-\gamma^2))}+\frac{h}{\varepsilon_2}.$$

Используя (5.1) и (5.2), находим значение γ_1 в точке $\gamma=\gamma_0$, $a=0$. Величина γ_1 представляет собой поправку в первом приближении к значению γ_0.

Заключение

Данная статья посвящена изучению распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном диэлектрическом слое. Получено дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения электромагнитных волн (собственных значений). Проведено сравнение со случаем линейной среды в слое. Получено первое приближение для собственных значений задачи.

Литература

[1] Eleonskii P.N., Oganes'yants L.G., Silin V.P. *Cylindrical nonlinear waveguides* // Soviet Phys. Jetp. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.

[2] Schurmann H.W., Serov V.S., Shestopalov Yu.V. *Reflection and transmission of a plane TE-wave at a lossless nonlinear dielectric film* // Physica D. – 2001. – V. 158. – P. 197–215.

[3] Joseph R.I., Christodoulides D.N. *Exact field decomposition for TM waves in nonlinear media* // Optics Letters. – 1987. – V. 12. – № 10. – P. 826–828.

[4] Leung K. M., Lin R. L. Scattering of transverse-magnetic waves with a nonlinear film: formal field solutions in quadratures // Phys. Review B. – 1991. – V. 44. – N. 10. – P. 5007–5012.

[5] Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г. *Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра* // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 35–45.

[6] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* – М.: Наука, 1968. – 720 с.

[7] Snyder A., Love J. *Optical waveguide theory.* – London: Chapman and Hall, 1983. – 450 p.

Д.В. Валовик

аспирант, кафедра математики и математического моделирования,
Пензенский государственный университет,
440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40,

`e-mail:` dvalovik@mail.ru

Ю.Г. Смирнов

профессор, кафедра математики и математического моделирования,
Пензенский государственный университет,
440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40,

`e-mail:` smirnov@penzadom.ru

D.V. Valovik

Postgraduate, Chair of Mathematics and Mathematical Modeling,
Penza State Univeristy,
40 Krasnaya str., Penza, 440026 Russia,

`e-mail:` dvalovik@mail.ru

Ю.Г. Смирнов

Professor, Chair of Mathematics and Mathematical Modeling,
Penza State Univeristy,
40 Krasnaya str., Penza, 440026 Russia,

`e-mail:` smirnov@penzadom.ru