ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2024 г.

---

1. Доказать, что кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекается с прямой $y = 2x - 1$ и найти кратчайшее расстояние между их точками.

2. Пусть $\lceil \cdot \rceil$ — операция округления вещественного числа вверх до ближайшего целого. Необходимо найти точное значение суммы $s = \lceil\sqrt{1}\rceil + \lceil\sqrt{2}\rceil + \lceil\sqrt{3}\rceil + \ldots + \lceil\sqrt{2024}\rceil$.

3. Даны 2024 различных натуральных числа a_k, меньших n и расположенных в порядке возрастания. При каком наибольшем n можно гарантировать, что по крайней мере для одной пары i и j выполняется соотношение $a_1 + a_i = a_j$?

4. Последовательность $\{a_n\}$ образована по правилу $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$, причём $a_1 = 0$.
а) Найдите предел A этой последовательности (2 балла).
б) Исследуйте асимптотику $\{a_n\}$, т.е. найдите такие числа B и $C > 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(A - a_n)B^n = C$ (5 баллов).

5. Найти все непрерывные функции $y(x)$, заданные на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие уравнению $\displaystyle\int\limits_{-x}^{x} ty(t)dt = y(x) + xe^{x^2} - x^2$.

6. Нео обнаружил, что матрицы $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ при нахождении произведения AB дают неожиданный результат: $\begin{pmatrix} \mathbf{24} & \mathbf{30} & \mathbf{12} \\ \mathbf{55} & \mathbf{69} & \mathbf{50} \\ \mathbf{81} & \mathbf{93} & \mathbf{48} \end{pmatrix}$. Более того, оказалось, что эта же матрица получается, если перемножить матрицы A и B в обратном порядке. Доказать, что это не случайно, т.е. если квадратные матрицы A и B обладают свойством $AB = kA + mB$ (для ненулевых чисел k и m), то они всегда коммутируют друг с другом.

7. “Латинские подквадраты”. Латинским квадратом порядка n называется матрица $n \times n$, заполненная n символами так, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы каждый символ встречается в точности один раз. Пусть A – некоторая матрица, а $k(A)$ – максимальный порядок всех подматриц этой матрицы, являющихся латинскими квадратами. Чему может быть равно $k(A)$, если A – латинский квадрат порядка $n = 5$?
Замечание: Подматрицу порядка k образуют элементы, стоящие на пересечение каких-нибудь k строк и k столбцов.

8. Саша и Коля играют в следующую игру. Имеется известный обоим игрокам список слов длины 5 в алфавите, состоящем из трёх букв A, B, C. На первом ходу Саша называет одну из букв алфавита, а Коля пишет на доске отличную от названной букву этого же алфавита. В следующие ходы данная операция повторяется: Саша называет какую-либо букву, а Коля дописывает справа от уже написанных букв букву, отличную от названной. Игра продолжается до тех пор, пока Коля не составит на доске слово из 5 букв. Коля выигрывает, если это слово окажется в упомянутом выше списке, в противном случае выигрывает Саша. Каково наибольшее количество слов в списке, если известно, что Саша имеет выигрышную стратегию?

9. “Семеро одного не ждут”. Восемь приятелей решили совершить совместную прогулку и договорились встретиться у входа в парк. Время прихода каждого равномерно распределено между 12 и 13 часами. Как только набирается группа из 7 человек, она отправляется на прогулку, последнему пришедшему придется догонять. Найти математическое ожидание времени начала прогулки.

10. В пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ рассматривается многогранник P, являющийся выпуклой оболочкой десяти точек с координатами $(\pm1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, \pm1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, \pm1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, \pm1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, \pm1)$. Каких граней у многогранника P больше, двумерных или трёхмерных?

11. Эллиптическую плоскость Римана $\mathcal{S}_2$ можно определить как факторпространство сферы $\mathbb{S}^2$, представляющее собой множество пар $\{M, M'\}$ диаметрально противоположных точек сферы. Расстоянием между точками $\{A, A'\}$ и $\{B, B'\}$ на $\mathcal{S}_2$ является наименьшее из сферических расстояний AB и AB'. Прямой линией на $\mathcal{S}_2$ называется множество пар диаметрально противоположных точек сферы $\mathbb{S}^2$, принадлежащих большой окружности. Окружностью на $\mathcal{S}_2$ называется множество пар точек, равноудалённых от некоторой фиксированной точки, называемой центром.
Сколько различных окружностей в эллиптической плоскости можно провести через три её точки, не лежащие на одной прямой?