Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направление: 01.03.01 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Решение задачи линейного сопряжения для двумероного вектора с матрицей-функцией мероморфно продолжимой в одной из областей.

Работа завершена:

«____»______________2015 г. ______________Е.И. Имангулова

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры дифференциальных уравнений

«____»______________2015 г. ______________С.Н. Киясов

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
доктор физико-математических наук, профессор

«____»______________2015 г. ______________А. М. Елизаров

Казань — 2015 г.

Оглавление

Введение

1.1. Постановка задачи.

Пусть Г- простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и $D^-(0 \in D^+, \infty \in D^-)$

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

которая H непрерывная и неособенная на Г матрица-функция второго порядка $(\triangle(t) = \det G(t) \neq 0, t \in \Gamma$, $g(t) = (g^1(t), g^2(t))$.

Однородная задача линейного сопряжения для двумерного вектора будет состоять в отыскании кусочно-аналитичной вектор-функции

$$w(z) = (w^1(z), w^2(z)) \tag{2}$$

с H- непрерывными на Г предельными значениями $w^{\pm}(t)$, связанными условием

$$w^+(t) = G(t)w^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma \tag{3}$$

Если вектор-функция $g(t) \equiv 0$ на Г, получим однородную задачу линейного сопряжения

$$w^+(t) = G(t)\omega^-(t), \qquad t \in \Gamma \tag{4}$$

Запишем эту задачу для двумерного вектора с матрицей-функцией (1) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}w^{1-}(t) + g_{12}w^{2-}(t) \\ w^{2+}(t) &= g_{21}w^{1-}(t) + g_{22}w^{2-}(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задачи (1):

$$w_{1,\varkappa_1}(z), w_{2,\varkappa_2}(z), \tag{6}$$

имеющие на бесконечности порядки $-\varkappa_1, -\varkappa_2$ (положительный порядок означает порядок полюса), называется канонической системой решений этой задачи [2], если будут выполняться следующие условия:

1) Определитель матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} w^1_{1,\varkappa_1}(z) & w^1_{2,\varkappa_2}(z) \\ w^2_{1,\varkappa_1}(z) & w^2_{2,\varkappa_2}(z) \end{pmatrix} \tag{7}$$

не обращается в нуль на конечном расстоянии.

2) Определитель $\triangle^0(z) = \det \|z^{\varkappa_j} w^i_{j,\varkappa_j}(z)\|$, $i, j = \overline{1,n}$ принимает на ∞ конечное значение отличное от нуля. Матрица (7) называется канонической матрицей задачи (4), следовательно выполняется тождество $X^+(t) = G(t)X^-(t)$, в силу которого приходим к представлению

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}], \triangle(t) = \frac{\triangle^+(t)}{\triangle^-(t)}, t \in \Gamma \tag{8}$$

где $\triangle^+(z)$ – определитель $X^+(z)$, $\triangle^-(z)$ – определитель $X^-(z)$.

Целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2$ в (6) определяются однозначно и называются частными индексами, $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 = ind \det G(t)$- суммарный индекс матрицы-функции (1)(индекс Коши $\det G(t)$). Предположим, что выполняется неравенство

$$\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \tag{9}$$

Тогда любая другая каноническая матрица $\widetilde{X}(z)$ получается из канонической матрицы (7) по формуле

$$\widetilde{X}(z) = X(z)P(z)$$

где $P(z)$ полиномиальная матрица определяется как

$$P(z) = \begin{pmatrix} p^1_0 & p^1_{\varkappa_1-\varkappa_2}(z) \\ p^2_0 & p^3_0 \end{pmatrix}$$

где $p^i_m, i = \overline{1,3}$- произвольные полиномы степени $m \geq 0$. Если $w_{1,k_1}(z), w_{2,k_2}(z)$- решение задачи (4), имеющие на бесконечности порядки $-k_1, -k_2$ соответственно, выполняется первое свойство канонической системы решений,то эти решения образуют нормальную систему решений, а $X(z)$ называется нормальной матрицей однородной задачи линейного сопряжения (4). Имеет место [1]

Предложение 1. *Если построена нормальная система решений однородной задачи линейного сопряжения, то каноническую систему решений можно построить эффективно.*

При этом каноническая матрица $\widetilde{X}(z)$ будет иметь следующий вид $\widetilde{X}(z) = X(z)P(z)$, а $P(z)$– некоторая полиномиальная матрица с постоянным определителем, "понижающая"порядки столбцов нормальной матрицы $X(z)$ суммарно на $k_1 + k_2 - \varkappa$ единиц.

Каноническая система решений (6) позволит записать кусочно-аналитическое решение задачи (4) по формуле (k-порядок на ∞)

$$w(z) = p_{1,\varkappa_1+k}(z)w_{1,\varkappa_1}(z) + p_{2,\varkappa_1+k}(z)w_{1,\varkappa_1}(z) \tag{10}$$

где $p_{i,\varkappa_i+k}(z)$- полиномы степени не выше $\varkappa_i + k$, $i = 1, 2$, если $\varkappa_i + k < 0$, то $p_{i,\varkappa_i+k}(z) = 0$.

При $k = -1$, то формула (10) определит все решения однородной задачи линейного сопряжения, исчезающего на бесконечности.

1.2. Союзная задача.

Однородная задача линейного сопряжения

$$v^+(t) = F(t)v^-(t), t \in \Gamma \tag{11}$$

с матрицей-функцией

$$F(t) = G'^{-1}, t \in \Gamma \tag{12}$$

(обратная к транспонированной)называется союзной задачей с задачей (4).

$X'^{-1}(z)$ каноническая матрица задачи (12) с частными индексами $-\varkappa_1, -\varkappa_2$ и суммарным индексом $-\varkappa$.

В современной литературе задача построения канонической матрицы H-непрерывной и обратимой на Γ матрица-функция $G(t)$ формулируется в виде следующей эквивалентной факторизационной задачи: требуется получит на Γ представление

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), t \in \Gamma \tag{13}$$

где $G^{\pm}(t)$ - H- непрерывные и обратимые матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе с $[G^{\pm}(t)]^{-1}$ в области $D^{\pm}$ соответственно, а $\Lambda(t) = diag\{t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}\}$, где λ_1, λ_2- левые факторизационные индексы матрицы-функции $G(t)$, множители $G^{\pm}(t)$ и $\Lambda(t)$ соответственно крайними и средними факторизационными множителями, а само представление (13) левой факторизацией Винера-Хопфа. левые фактоизационные индексы называют также левыми частными индексами матрицы-функции $G(t)$.

Так же определим правую факторизыцию Винера-Хопфа $G(t)$:

$$G(t) = G_1^-(t)\Lambda_1(t)G_1^+(t), t \in \Gamma,$$

где $\Lambda_1(t) = diag\{t^{\mu_1}, t^{\mu_2}\}$, а целые числа μ_1, μ_2 правые факторизационные индексы (правые частные индексы матрицы-функции $G(t)$).

Левая факторизация Винера-Хапф матрицы-функции $G(t)$ переходит для матриц-функций $G'(t)$ и $G^{-1}(t)$ в соответствующую правую факторизацию и обратно. При этом

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = \varkappa$$

В дальнейшем под факторизацией матрицы-функции $G(t)$ будем понимать левую факторизацию Винера-Хопфа, а ее левые левые частные индексы называть частными индексами $G(t)$.

Так же нам будет удобно под факторизацией $G(t)$ понимать ее представление в виде

$$G(t) = G^+(t)G^-(t), t \in \Gamma, \tag{14}$$

где $G^{\pm}(t)$ предельные значение из соответствующих областей некоторой матрицы-функции $G(z)$, элементы которой кусочно-аналитические и могут иметь на бесконечности полярную особенность, $\det G(z) \neq 0$ в конечной части плоскости, а на бесконечности порядок $\det G^-(z)$ равен сумме порядков $\varkappa_1, \varkappa_2$ строк матрицы-функции $G^-(z)$ частных индексов $G(t)$. Это определение факторизации по орме отличается от определения факторизации Винера Хопфа тем, что здесь не определяется средний диагональный множитель $diag\{t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}\}$ и по содержанию ближе к понятию канонической матрицы (7):

$$X(z) = \{G^+(z), z \in D^+; [G^-(z)]^{-1}, z \in D^-\}.$$

Если на бесконечности сумма порядков строк $\det G^-(z)$ больше порядка на бесконечности самого определителя, то будем называть такое представление матрицы-функции $G(t)$ нормальным представлением, в силу того, что соответствующая матрица $X(z)$ будет нормальной матрицей однородной задачи линейного сопряжения (4). Переход от нормального представления (14) к факторизации сводится к $G(z) = G^+(z)P^{-1}(z)P(z)G^-(z)$, где $P(z)$ полиномиальная матрица с постоянным определителем такая, что суммарный порядок строк на бесконечности матрицы-функции $P(z)G^-(z)$ равен $\varkappa$.

1.3. Метод отщепления нулей. Если в некоторой конечной точки $z_0^+ \in D^+$ в (14) $\det G^+(z_0^+) = 0$, то для нормального представления следует применить метод отщепления нулей, состоящий в домножении матрицы-функции $G^+(z)$ справа на матрицу $U(z)$, а матрицы-функции $G^-(z)$- слева на $U^{-1}(z)$

$$G(z) = G^+(z)U(z)U^{-1}(z)G^-(z),$$

где

$$U(z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1}{z-z_0^+} \\ 0 & \frac{c_2}{z-z_0^+} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Постоянные c_1, c_2 в силу линейной зависимости столбцов определителя $\det G^+(z_0^+)$ подбираются так, чтобы элементы матрицы-функции $G_1^+(z) = G^+(z)U(z)$ были аналитическими в точке $z = z_0^+$ (аналитичность элементов матрицы-функции).

Действительно, пусть

$$\det G^+(z_0^+) = \begin{vmatrix} g_{11}^+ & g_{12}^+ \\ g_{21}^+ & g_{22}^+ \end{vmatrix} = g_{11}^+g_{22}^+ - g_{21}^+g_{12}^+ = 0,$$

Рассмотрим матрицу- функцию

$$G_1^+(z) = \begin{pmatrix} g_{11}^+(z) & g_{12}^+(z) \\ g_{21}^+(z) & g_{22}^+(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1}{z-z_0^+} \\ 0 & \frac{c_2}{z-z_0^+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^+(z) & \frac{c_1g_{11}^+(z)+c_2g_{12}^+(z)}{z-z_0^+} \\ g_{21}^+(z) & \frac{c_1g_{21}^+(z)+c_2g_{22}^+(z)}{z-z_0^+} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \det G_1^+(z) &= \frac{1}{z-z_0^+}(g_{11}^+(c_1g_{21}^+ + c_2g_{22}^+) - g_{21}^+(c_1g_{11}^+ + c_2g_{12}^+)) = \\ &= \frac{c_2}{z-z_0^+}(g_{11}^+g_{22}^+ - g_{21}^+g_{12}^+) = \frac{c_2}{z-z_0^+}\det G^+(z_0^+) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Кратность нуля определителя $\det G_1^+(z)$ в точке z_0^+ становится ниже на единицу. Применяя эту процедуру конечное число раз, придем к нормальному представлению.

Если $\det G^-(z_0^-) = 0$ в точке $z_0^- \in D^-$, то

$$G(z) = G^+(z)V^{-1}(z)V(z)G^-(z)$$

Подбираем матрицу

$$V(z) = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{z-z_0^-} & \frac{c_2}{z-z_0^-} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

так, чтобы элементы матрицы-функции $G_1^-(z) = V(z)G^-(z)$ были аналитическими в точке z_0^-. Так как определитель $\det G_1^-(z)$, после конечного числа шагов придем нормальному представлению матрицы функции $G(t)$.

Метод отщепления нулей может служить эффективным методом факторизации аналитических, мероморфных, рациональных матриц-функций, для которых известны нули $\det G^+(z)(\det G^-(z))$ в соответствующих областях.

Предварительные сведения.

Пусть $w(z) = (w^1(z), w^2(z))$ кусочно-аналитическое в конечной плоскости решение задачи (5)

В работе [2] дано следующее определение

Определение 1. *Будем называть решение $w(z)$ задачи линейного сопряжения (5) решением с парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, если на Γ*

$$\begin{aligned} \frac{w^{1+}(t)}{w^{1-}(t)} &= \lambda_1(t) \\ \frac{w^{2+}(t)}{w^{2-}(t)} &= \lambda_2(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Множество всех кусочно-мероморфных решений задачи (5) представляет собой двумерное векторное пространство над полем рациональных функций, базисом которого является любая каноническая система решений

$$\begin{aligned} w_{1,\varkappa_1}(z) &= (w^1_{1,\varkappa_1}(z), w^2_{1,\varkappa_1}(z)), \\ w_{2,\varkappa_2}(z) &= (w^1_{2,\varkappa_2}(z), w^2_{2,\varkappa_2}(z)), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\varkappa_1 \geq \varkappa_2, \varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$$

($\varkappa$-суммарный индекс матрицы функции (1)).

Пусть $w_1(z), w_2(z)$- два кусочно-мероморфных решения задачи (5). тогда

$$\lambda_k(t) = \frac{w_1^{k+}(t)}{w_1^{k-}(t)} = \frac{w_2^{k+}(t)}{w_2^{k-}(t)}, k = 1, 2,$$

то $w_2^k(z) = r_k(z) w_1^k(z)$, где $r_k(z), k = 1, 2$-рациональные функции.

Предложение 2. *Кусочно-мероморфные решения задачи линейного сопряжения (5) $w_1(z)$ и $w_2(z)$, матрица-функция которой не является диагональной, будут решениями с одной и той же невырожденной парой (18) тогда и только тогда, если*

$$r_{11}(z) r_{22}(z) \equiv r_{21}(z) r_{12}(z), \tag{20}$$

где $r_{ij}, i, j = 1, 2$- коэффициенты разложения этих решений по канонической системе решений (19).

В работе [2] было показано, что множество всех нетривиальных кусочно-мероморфных решений может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств $V_k, k = 1, 2$, образованных решениями задачи с одной и той же парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$. Но пространство V_0 содержит тривиальное решение $w(z) \equiv 0$ с тройкой $(0, 0, 0)$, принадлежащее всем подпространствам V_k. В данном подпространстве выбираем кусочно-аналитическое решение в конечной части плоскости, имеющий самый низший порядок на бесконечности.

Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ не обращаются в нуль и бесконечность на Γ. В качестве представителя подпространства будем рассматривать решение $w(z)$ задачи (5)без конечных полюсов, имеющее наинизший возможный порядок на бесконечности. Всегда можно считать, что компоненты $w^1(z), w^2(z)$ такого решения не обращаются в нуль одновременно ни в одной конечной точке плоскости. В самом деле, если при $z = z_0$, не лежащей на Γ, $w^1(z_0), w^2(z_0) = 0$, то из представления

$$w(z) = p(z)w_{1,\varkappa_1}(z) + q(z)w_{2,\varkappa_2}(z) \tag{21}$$

в котором $p(z), q(z)$- полиномы, учитывая, что определитель канонической системы решений отличен от нуля, получим $p(z_0) = q(z_0) = 0$ и $w_1(z) = w(z)/(z - z_0)$ будет решением, компоненты которого не имеют общих нулей.

Рассмотрим Γ отношения

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{w^{2+}(t)}{w^{1+}(t)}, \\ \Phi^-(t) &= \frac{w^{2-}(t)}{w^{1-}(t)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из краевого условия(5) следует, что $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ являются предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}\Phi^+ - g_{22}\Phi^- + g_{12}\Phi^+\Phi^- = g_{21}.$$

Так как числитель и знаменатель отношений $w^{2\pm}/w^{1\pm}$ не обращаются одновременно в нуль, обозначим через $T_n(z)$ и $T_p(z)$ полиномы,определенные с точностью до мультипликативных постоянных, нулями которых являются все конечные нули и полюсы этих отношений, согласно сделанному предположению, не лежащие на Г. Тогда из (18) получаем

$$
\begin{aligned}
w^{1+}(t)/\lambda_1^+(t) = w^{1-}(t)/\lambda_1^-(t) = T_p(t), \\
w^{2+}(t)/\lambda_2^+(t) = w^{2-}(t)/\lambda_2^-(t) = T_n(t),
\end{aligned} \tag{23}
$$

где $\lambda_1^+(t), 1/\lambda_1^+(t)$ и $\lambda_2^+(t), 1/\lambda_2^+(t)$ факторизационные множители на Г отношений (5). Подставляя вид искомого решения в любое из условий (5), получим соотношение между этими мультипликативными постоянными. Таким образом, в качестве представителя подпространства решений задачи (5) с парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ берем решение

$$
w(z) = (\lambda_1(z)T_p(z), \lambda_2(z)T_n(z)) \tag{24}
$$

где $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ - кусочно-аналитические в конечной части плоскости функции без нулей на контуре с H- недельными значениями $(\lambda_1^\pm(t), \lambda_2^\pm(t))$ соответственно,имеющие на бесконечности порядки $-\varkappa_{\lambda_1}$ и $-\varkappa_{\lambda_2}$.Здесь через $\varkappa_{\lambda_1}$ и $\varkappa_{\lambda_2}$ обозначены индексы Коши отношений (5).

Обозначим через k_1 и k_2 порядки компонент (24) на бесконечности так, что

$$
k = \max(k_1, k_2) = \max(p - \varkappa_{\lambda_1}, n - \varkappa_{\lambda_2}) \tag{25}
$$

- порядок решения $w(z)$ на бесконечности.

Построение канонической системы решений.

Пусть $w(z) = (w^1(z), w^(2)(z))$ - кусочно-аналитическое в конечной плоскости решение задачи (5) с парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ вида (24), соответствующие компоненты которого не обращаются в нуль на контуре. Тогда его разложение по функциям искомой канонической системы решений (19) этой задачи имеет вид (21), где $p(z), q(z)$- некоторые полиномы. Обозначим через $\triangle^{\pm}(z)$ определители канонической матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} w^1_{1,\varkappa_1}(z) & w^1_{2,\varkappa_2}(z) \\ w^2_{1,\varkappa_1}(z) & w^2_{2,\varkappa_2}(z) \end{pmatrix} \tag{26}$$

$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}, \triangle(t) = \frac{\triangle^+(t)}{\triangle^-(t)}, t \in \Gamma$(порядок $\triangle^-$ на бесконечности равен $-\varkappa$)

Рассматривая предельные значения из областей D^+ и D^- разложения (21) как линейные алгебраические системы для определения полиномов $p(z)$ и $q(z)$, придем на Γ к равенствам

$$p = (w^{1+}w^{2+}_{2,\varkappa_2} - w^{2+}w^{1+}_{2,\varkappa_2})/\triangle^+ = (w^{1-}w^{2-}_{2,\varkappa_2} - w^{2-}w^{1-}_{2,\varkappa_2})/\triangle^-, \tag{27}$$

$$p = (\omega^{2+}\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1+}\omega^{2+}_{1,\varkappa_1})/\triangle^+ = (\omega^{2-}\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1-}\omega^{2-}_{1,\varkappa_1})/\triangle^-, \tag{28}$$

Выражая $\omega^{2-}_{1,\varkappa_1}(t)$ из второго равенства (28) и подставляя его в первое из этих равенств, в котором $\omega^{2+}_{1,\varkappa_1}(t)$ записано согласно второму краевому условию (5), получим

$$q\triangle^+ = w^{2+}w^{1+}_{1,\varkappa_1} - \frac{w^{1+}}{w^{1-}}(g_{21}w^{1-} + g_{22}w^{2-})w^{1-}_{1,\varkappa_1} + g_{22}\frac{w^{1+}}{w^{1-}}q\triangle^- \tag{29}$$

Учитывая, что компоненты решения $w(z)$ на Γ связаны тем же равенством (5), придем к равенству

$$w^{1+}_{1,\varkappa_1}(t) = \frac{w^{1+}(t)}{w^{1-}(t)}w^{1-}_{1,\varkappa_1}(t) + q(t)\frac{\triangle^+(t)w^{1-}(t) - g_{22}(t)\triangle^-(t)w^{1+}(t)}{w^{2+}(t)w^{1-}(t)}.$$

Если из второго равенства (28) выразить $w^{1-}_{1,\varkappa_1}(t)$ и подставить его в первое равенство, в котором $w^{1+}_{1,\varkappa_1}(t)$ записано согласно первому краевому условию (5) и учитывая это условия для решения $w(z)$, придем к равенству, связывающему предельные значения $w^2_{1,\varkappa_1}(t)$:

$$w^{2+}_{1,\varkappa_1}(t) = \frac{w^{2+}(t)}{w^{2-}(t)} w^{2-}_{1,\varkappa_1}(t) - q(t)\frac{\triangle^+(t)w^{2-}(t) - g_{11}(t)\triangle^-(t)w^{2+}(t)}{w^{1+}(t)w^{2-}(t)}.$$

Преобразуем выражения $(\triangle^+ w^{1-} - g_{22}\triangle^- w^{1+})/w^{2+}w^{1-}$ и $(\triangle^+ w^{2-} - g_{11}\triangle^- w^{2+})/w^{1+}w^{2-}$. Вынося за скобки $\triangle^-$ и учитывая представление для $\triangle$ в (26), воспользуемся сначала в преобразуемых выражениях соответственно первым и вторым краевыми условиями (5), а затем, вторым и первым

$$(\triangle^+ w^{1-} - g_{22}\triangle^- w^{1+})/w^{2+}w^{1-} = \triangle^-(\triangle w^{1-} - g_{22}(g_{11}w^{1-} + g_{12}w^{2-}))/w^{2+}w^{1-} =$$
$$= -\triangle^- g_{12}(g_{21}w^{1-} + g_{22}w^{2-})/w^{2+}w^{1-} = -g_{12}\triangle^-/w^{1-},$$

$$(\triangle^+ w^{2-} - g_{11}\triangle^- w^{2+})/w^{1+}w^{2-} = \triangle^-(\triangle w^{2-} - g_{11}(g_{21}w^{1-} + g_{22}w^{2-}))/w^{1+}w^{2-} =$$
$$= -\triangle^- g_{21}(g_{11}w^{1-} + g_{12}w^{2-})/w^{1+}w^{2-} = -g_{21}\triangle^-/w^{2-}.$$

Таким образом, придем к краевым условиям

$$w^{1+}_{1,\varkappa_1}(t) = \frac{w^{1+}(t)}{w^{1-}(t)} w^{1-}_{1,\varkappa_1}(t) - q(t)\frac{g_{12}(t)\triangle^-(t)}{w^{1-}(t)}, \tag{30}$$

$$w^{2+}_{1,\varkappa_1}(t) = \frac{w^{2+}(t)}{w^{2-}(t)} w^{2-}_{1,\varkappa_1}(t) - q(t)\frac{g_{21}(t)\triangle^-(t)}{w^{2-}(t)}, \tag{31}$$

Считая в (30), (31) полином $q(t)$ известным решения этих скалярных задач линейного сопряжения запишем на Γ соответственно по формулам:

$$\begin{gathered} w^{1+}_{1,\varkappa_1}(t) = w^{1+}(t)\left(-P\left[q\frac{g_{12}\triangle^-}{w^{1+}w^{1-}}\right](t) + \frac{P_m(t)}{T_p(t)}\right), \\ w^{1-}_{1,\varkappa_1}(t) = w^{1-}(t)\left(Q\left[q\frac{g_{12}\triangle^-}{w^{1+}w^{1-}}\right](t) + \frac{P_m(t)}{T_p(t)}\right); \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} w^{2+}_{1,\varkappa_1}(t) = w^{2+}(t)\left(P\left[q\frac{g_{21}\triangle^-}{w^{2+}w^{2-}}\right](t) + \frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right), \\ w^{2-}_{1,\varkappa_1}(t) = w^{2-}(t)\left(-Q\left[q\frac{g_{21}\triangle^-}{w^{2+}w^{2-}}\right](t) + \frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right); \end{gathered} \tag{33}$$

В формулах (32), (33),$P_m(z)$, $P_l(z)$- произвольные полиномы, степени которых m, l будут определены ниже, а $T_p(z)$ и $T_n(z)$- полиномы, входящие в формулу

(24).

Подставляя формулы (32), (33) в первое краевое условие (5), получаем

$$\left(\frac{g_{11}}{w^{1+}}+\frac{1}{w^{1-}}-\frac{g_{21}}{w^{2+}}\right)g_{12}\triangle^{-}q+(w^{1+}-g_{11}w^{1-})S\left[q\frac{g_{12}\triangle^{-}}{w^{1+}w^{1-}}\right]+g_{12}w^{2-}S\left[q\frac{g_{21}\triangle^{-}}{w^{2+}w^{2-}}\right]=$$
$$=2(w^{1+}-g_{11}w^{1-})\frac{P_m}{T_p}-2g_{12}w^{1+}-g_{11}w^{2-}\frac{P_l}{T_n}$$

Учитывая, что $w(z)$ удовлетворяет условиям (5), после очевидных преобразований, придем к сингулярному интегральному уравнению с одним ядром для определения полинома $q(t)$:

$$\left(\frac{g_{11}(t)}{w^{1+}(t)w^{2-}(t)}+\frac{g_{22}(t)}{w^{2+}(t)w^{1-}(t)}\right)\triangle^{-}(t)q(t)+S\left[\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\triangle^{-}q\right]=$$
$$=2\left(\frac{P_m(t)}{T_p(t)}-\frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right).$$

Подстановка (32), (33) во второе краевое условие (5) приводит также к этому уравнению. Полагая

$$\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)}+\frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)\triangle^{-}(t)q(t)=\omega(t), \tag{34}$$

придем к характеристическому сингулярному интегральному уравнению

$$\left(\frac{g_{11}(t)}{w^{1+}(t)w^{2-}(t)}+\frac{g_{22}(t)}{w^{2+}(t)w^{1-}(t)}\right)\omega(t)+\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)}+\frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)S[\omega](t)=$$
$$=2\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)}+\frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)\left(\frac{P_m(t)}{T_p(t)}-\frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right), \tag{35}$$

решение которого будем искать в виде

$$\omega(t)=\omega^{+}(t)-\omega^{-}(t), t\in\Gamma, \omega^{-}(\infty)=0. \tag{36}$$

Тогда для предельных значений кусочно-аналитической и исчезающей на бесконечности функций $\omega(z)$, после несложных преобразований, придем на Γ к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\frac{1}{w^{1-}w^{2-}}\omega^{+}=\frac{\triangle}{w^{1+}w^{2+}}\omega^{-}+\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right)$$

или к задаче

$$\omega^+ = \frac{\triangle^+ w^{1-} w^{2-}}{\triangle^- w^{1+} w^{2+}}\omega^- + \left(g_{12}\frac{w^{2-}}{w^{1+}} + g_{21}\frac{w^{1-}}{w^{2+}} \right) \left(\frac{P_m}{T_p} - \frac{P_l}{T_n} \right), \tag{37}$$

индекс которой равен $\kappa = \varkappa - \varkappa_{\lambda_1} - \varkappa_{\lambda_2}$ ($\varkappa_{\lambda_1}$ и $\varkappa_{\lambda_2}$- индексы Коши отношений (18)). Так как, согласно (5), (18) имеет место равенство

$$\left(g_{12}\frac{w^{2-}}{w^{1+}} + g_{21}\frac{w^{1-}}{w^{2+}} \right) = 2 - \frac{g_{11}}{\lambda_1} - \frac{g_{22}}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1\lambda_2 - \triangle}{\lambda_1\lambda_2},$$

то при $\kappa > 0$ решение задачи (37) запишем на Γ в виде

$$\begin{aligned} \omega^+ &= \frac{\triangle^+}{\lambda_1^+\lambda_2^+}\left\{ P\left[\left(\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+}{\triangle^+} - \frac{\lambda_1^-\lambda_2^-}{\triangle^-} \right) \left(\frac{P_m}{T_p} - \frac{P_l}{T_n} \right) \right] + P_{k-1} \right\}, \\ \omega^- &= \frac{\triangle^-}{\lambda_1^-\lambda_2^-}\left\{ P\left[\left(\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+}{\triangle^+} - \frac{\lambda_1^-\lambda_2^-}{\triangle^-} \right) \left(\frac{P_m}{T_p} - \frac{P_l}{T_n} \right) \right] + P_{k-1} \right\} \end{aligned} \tag{38}$$

где $\lambda_1^\pm(t), \lambda_2^\pm(t)$ определены в (24). Если $\kappa \le 0$,то в (38) следует положить $P_{k-1}(z) \equiv 0$ и потребовать $-\kappa$ условий разрешимости

$$\int_\Gamma \left(\frac{\lambda_1^+(\tau)\lambda_2^+(\tau)}{\triangle^+(\tau)} - \frac{\lambda_1^-(\tau)\lambda_2^-(\tau)}{\triangle^-(\tau)} \right) \left(\frac{P_m(\tau)}{T_p(\tau)} - \frac{P_l(\tau)}{T_n(\tau)} \right) \tau^{j-1} d\tau = 0, j = \overline{1, -\kappa}. \tag{39}$$

Подставляя найденное из (34), (35), (36) , (37) значение полинома $q(t)$ в формулы (32), (33), получим представление для первой функци канонической системы решений $w_{1,\varkappa_1}(z)$ задачи (5).

Обозначим через k_1 и k_2 порядки компонент решения (24) на бесконечности так,что

$$k = \max(k_1, k_2) = \max(p - \varkappa_{\lambda_1}, n - \varkappa_{\lambda_2}) \tag{40}$$

-порядок решения $w(z)$ на бесконечности.

Пусть, например, $k_1 \le 0, k_2 > 0$. Тогда в формулах (32), (33), (38) возьмем

$$m = \varkappa_{\lambda_1} - 1, l = n - 1, \tag{41}$$

($P_m(z) \equiv 0$, при $\varkappa_{\lambda_1} = 0, P_l(z) \equiv 0$, при $n = 0$)

Если $\kappa > 0$, то $\varkappa - \varkappa_{\lambda_2} > \varkappa_{\lambda_1} \ge p \ge 0$ и на $n_1 = n - \varkappa_{\lambda_2} + \varkappa > 0$ неопределенных коэффициентов полиномов $P_{\varkappa_{\lambda_1}-1}(z), P_{n-1}(z)$ $P_{\varkappa-\varkappa_{\lambda_1}-\varkappa_{\lambda_2}-1}(z)$ следует, при

$\varkappa \geq 0$, наложить $n_2 = n - \varkappa_{\lambda_2}$ условий обращения выражения

$$Q\left[q\frac{g_{21}\triangle^-}{w^{2+}w^{2-}}\right] + \frac{P_{n-1}}{T_n} \tag{42}$$

на бесконечности в нуль кратности $n - \varkappa_{\lambda_2} + 1$. При $\varkappa < 0$, требуем выполнения $n_2 = n - \varkappa_{\lambda_2} + \varkappa$ условий ($n_2 = n_1$) обращения выражения (42) в нуль на бесконечности кратности $n - \varkappa_{\lambda_2} + \varkappa + 1$. Последнее означает, что компонента $w^2_{1,\varkappa_1}(z)$ первой вектор-функции $w_{1,\varkappa_1}(z)$ канонической системы решений (19) будет иметь на бесконечности понерядок не выше $-\varkappa - 1$.

Если $\kappa \leq 0$, то в (38) так же полагаем $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$. Тогда при $\varkappa \geq 0$, на $n_1 = n + \varkappa_{\lambda_1}$ неопределенных коэффициентов полиномов $P_{\varkappa_{\lambda_1}-1}(z)$, $P_{n-1}(z)$ накладываются требования выполнения $-\kappa = \varkappa_{\lambda_1} - \varkappa$. При $\varkappa < 0$, на $n + \varkappa_{\lambda_1}$ неопределенных коэффициентов накладываем $n - \varkappa_{\lambda_2} + \varkappa$ условий обращения выражения (42) на бесконечности в нуль кратности $n - \varkappa_{\lambda_2} + \varkappa + 1$, которые вместе с условиями (39) дают такое же число $n_2 = n + \varkappa_{\lambda_1}$ условий, означающих, что компонента $w^2_{1,\varkappa_1}(z)$ будет иметь на бесконечности порядок не выше $-\varkappa - 1$.

Пусть $G(t)$ мероморфна в D^+, тогда факторизация имеет вид (14), где $G^-(t)$ рациональная матрица-функция, поэтому $w^-(z)$ частное решение задачи (4) легко подбирается и $w^+(z)$ определяется из краевого условия. Если же $G(t)$ мероморфна в D^-, в силу представления (14) $G^+(t)$ будет рациональной , поэтому $w^+(z)$ легко подбирается и $w^-(z)$ определяется из краевого условия.

Примеры.

Пример 1.

Пусть матрица-функция мероморфно продолжима в область $D^+ : |z| < 1$ имеет вид

$$G(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ \frac{t}{2\sin t} & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$\triangle(t) = \frac{t}{2}$, где $\triangle^+(t) = 1$ и $\triangle^-(t) = \frac{2}{t}$.

Положим на Γ $w^-(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, из краевых условий найдем

$$w^{1+}(t) = g_{11}w^{1-}(t) + g_{12}w^{2-}(t) = t * \frac{1}{t} + \sin t * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + 1$$

$$w^{2+}(t) = g_{21}w^{1-}(t) + g_{22}w^{2-}(t) = \frac{t}{2\sin t} * \frac{1}{t} + 1 * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\sin t} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Найдем количество нулей и полюсов

$$\Phi^+(t) = \frac{1 + \sqrt{sint}}{\sin t(\sqrt{2}\sin t + 2)}$$

$$\Phi^-(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$n = 1, p = 1.$

Факторизации отношений возьмем в виде

$$\frac{w^{1+}}{w^{1-}} = \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} = \frac{\sqrt{2}/2\sin t + 1}{1/t}, \lambda_1^+(t) = \sqrt{2}/2\sin t + 1, \lambda_1^-(t) = 1/t$$

$$\frac{w^{2+}}{w^{2-}} = \frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} = \frac{\frac{t(1+\sqrt{2}\sin t)}{2\sin t(t+\frac{\pi}{4})}}{\frac{\sqrt{2}t}{2(t+\frac{\pi}{4})}}, \lambda_2^+(t) = \frac{t(1+\sqrt{2}\sin t)}{2\sin t(t+\frac{\pi}{4})}, \lambda_2^-(t) = \frac{\sqrt{2}t}{2(t+\frac{\pi}{4})}.$$

Индексы Коши соответственно равны $\varkappa_{\lambda_1} = 1, \varkappa_{\lambda_2} = 0$

Полиномы $T_n(z)$ и $T_p(z)$ ищем в виде $T_n(z) = a(z+\frac{\pi}{4}), T_p(z) = bz$.

$$w^+(z) = ((\sqrt{2}/2\sin z + 1)z, \frac{z(1+\sqrt{2}\sin z)}{2\sin z})$$

$$w^-(z) = (1, \frac{\sqrt{2}z}{2})$$

$a = b = 1$

Порядки компонент решения на бесконечности равны $k_1 = p - \varkappa_{\lambda_1} = 0, k_2 = n - \varkappa_{\lambda_2} = 1$ и реализуется случай 3. $P_m = c, P_l = d, c, d$- постоянные. Индекс задачи $k = \varkappa - \varkappa_{\lambda_1} - \varkappa_{\lambda_2}$ и $P_{\kappa-1} = 0$. Найдем наши предельные значения $\omega^+(t), \omega^-(t)$ по формулам (38):

$$\omega^+(t) = \frac{2\sqrt{2}\sin t(t+\frac{\pi}{4})}{(\sin t+\sqrt{2})(\sqrt{2}t\sin t+1)t}(P[(\frac{(\sin t+\sqrt{2})(\sqrt{2}t\sin t+1)t}{2\sqrt{2}\sin t(t+\frac{\pi}{4})} -$$

$$-\frac{t}{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})})(\frac{c}{t} - \frac{d}{t+\frac{\pi}{4}})]\ )$$

$$\omega^-(t) = \frac{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})}{t}(-Q[(\frac{(\sin t+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin tt+1)t}{2\sqrt{2}\sin t(t+\frac{\pi}{4})} -$$

$$-\frac{t}{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})})(\frac{c}{t} - \frac{d}{t+\frac{\pi}{4}})])$$

$$P(t) = \frac{c}{t}\frac{(\sin t+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin tt+1)t}{2\sqrt{2}\sin t(t+\frac{\pi}{4})} - \frac{c\pi}{2t} - \frac{d}{t+\frac{\pi}{4}}\frac{t}{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})} + \frac{d\pi}{8\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})}$$

$$Q(t) = \frac{c\pi}{2t} - \frac{d\pi}{8\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})} + \frac{c}{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})} + \frac{dt}{2\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\omega^+(t) = (32t^2\sin^2 t(c-d) + 8c\pi t\sin^2 t + 4t^2\sin t(8c\pi + \sqrt{2}d\pi - 12\sqrt{2}d + 12\sqrt{2}c) +$$

$$+\pi t\sin t(\sqrt{2}d\pi - 16c\pi + 12\sqrt{2}c) - 2c\pi^3\sin t +$$

$$+8c\pi t + 32t^2(c-d))/16\sqrt{2}t^2(t+\frac{\pi}{4})(\sin t+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin t+1)$$

$$\omega^-(t) = (\sqrt{2}\sqrt{2}dt(\pi^2 - 16t + 4\pi t4) - 8c(t+\frac{\pi}{4})(\pi^2 - 2\sqrt{2}t + 4\pi t))/8\sqrt{2}t^2(t+\frac{\pi}{4})$$

Подставим в (36), а после в (34), получим

$$\omega(t) = \pi(-dt + 4\sqrt{2}(t+\frac{\pi}{4}) +$$

$$+(-\sqrt{2}dt+8c(t+\frac{\pi}{4}))\sin t+(-dt+4\sqrt{2}c(t+\frac{\pi}{4}))\sin^2 t)/(2t^2(2\sin^2 t+3\sqrt{2}\sin t+2))$$

$$\left(\frac{\sin t}{t(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}t\sin t(\frac{1}{2\sin t}+\frac{\sqrt{2}}{2})}\right)\frac{2}{t}q(t)=\omega(t)$$

Полином $q(t)$ имеет вид

$$q(t)=\frac{1}{16}(\frac{8}{c\pi}-\sqrt{2}d\pi)t+\frac{c}{8}$$

Поэтому формулы (32), (33) позволяют записать представление для первой функции канонической системы решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией:

$$w^{1+}_{1,\varkappa_1}=\frac{c(5t-\sin t)}{4t}+\frac{(c(5\pi-4\sqrt{2})-d\pi^2)\sin t}{4\sqrt{2}\pi}$$

$$w^{1-}_{1,\varkappa_1}=\frac{5c}{t}$$

$$w^{2+}_{1,\varkappa_1}=\frac{2c(\frac{5}{2}t-\sin t)}{4t\sin t}+\frac{(c(5\pi-4\sqrt{2})-d\pi^2)\sin t}{2\sqrt{2}\pi}$$

$$w^{2-}_{1,\varkappa_1}=-\frac{c}{4t}+\frac{(c(5\pi-4\sqrt{2})-d\pi^2)\sin t}{4\sqrt{2}\pi}$$

Требуя от наших функций наинизшего порядка на бесконечности, приходим к равенству

$$d=c(5\pi-4\sqrt{2})/\pi^2,$$

что позволит записать формулы в виде:

$$w^{1+}_{1,\varkappa_1}=\frac{c(5t-\sin t)}{4t}$$

$$w^{1-}_{1,\varkappa_1}=\frac{5c}{t}$$

$$w^{2+}_{1,\varkappa_1}=\frac{2c(\frac{5}{2}t-\sin t)}{4t\sin t}$$

$$w^{2-}_{1,\varkappa_1}=-\frac{c}{4t}$$

Пример 2.

Пусть матрица-функция мероморфно продолжима в область $D^-:|z|<1$

имеет вид

$$G(t)=\begin{pmatrix} t & \sin\frac{1}{t} \\ \frac{t}{2\sin\frac{1}{t}} & 2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$\triangle(t)=t$, где $\triangle^{+}(t)=1$ и $\triangle^{-}(t)=\frac{1}{t}$, $t\in\Gamma:|t|=1$ Заметим, что в данном случае фактически можно говорить об аналитической продолжимости указанной матрицы-функции в область $|z|>1$. Полагая $w^{+}(t)=(1/t,1)$ из краевых условиях (5) найдем $w^{-}(t)=(1+\sin 1/t,(1+2\sin 1/t)/\sin 1/t)$. Отношения (22)мероморфно продолжимы в соответствующие области и имеют на конечной части плоскости по одному нулю и полюсу $n=1,p=1$.

Факторизации отношений возьмем в виде

$$\frac{w^{1+}}{w^{1-}}=\frac{\lambda_1^{+}}{\lambda_1^{-}},\lambda_1^{+}(t)=1/t,\lambda_1^{-}(t)=1+\sin 1/t$$

$$\frac{w^{2+}}{w^{2-}}=\frac{\lambda_2^{+}}{\lambda_2^{-}},\lambda_2^{+}(t)=\frac{1/t}{(t+\frac{6}{\pi})},\lambda_2^{-}(t)=\frac{1/t(1+2\sin 1/t)}{\sin 1/t(t+\frac{6}{\pi})}.$$

Индексы Коши соответственно равны $\varkappa_{\lambda_1}=1,\varkappa_{\lambda_2}=0$

Полиномы $T_n(z)$ и $T_p(z)$ ищем в виде $T_n(z)=a(z+\frac{\pi}{6}),T_p(z)=bz(a,b$-постоянные).Подставляя решение вида(24) в краевые условия (5), найдем $a=b=1$,

$$\omega^{+}(z)=(1,1/z)$$

$$\omega^{-}(z)=(t(1+\sin 1/z),1/t(1+2\sin 1/z)/\sin 1/z$$

Порядки компонент решения на бесконечности равны $k_1=p-\varkappa_{\lambda_1}=0,k_2=n-\varkappa_{\lambda_2}=1$ и реализуется случай 3. $P_m=c,P_l=d,c,d$- постоянные. Индекс задачи $k=\varkappa-\varkappa_{\lambda_1}-\varkappa_{\lambda_2}$ и $P_{\kappa-1}=0$. Найдем наши предельные значения $\omega^{+}(t),\omega^{-}(t)$ по формулам (38):

$$\omega^{+}(t)=\{6c(t+6/\pi)^2/\pi-6dt/\pi-t(t+6/\pi)(c-d+6\sqrt{3}d/\pi)\}/t^2(t+6/\pi);$$

$$\omega^{-}(t)=\{t[(c-d)t+6c/\pi](1+2\sin 1/t)-6c\sin 1/t(t+6/\pi)^2-$$

$$-t\sin 1/t[2c(1+\sin 1/t)(t+6/\pi)-2dt(1+\sin 1/t)-6d/\pi-$$

$$-(c-d+6\sqrt{3}d/\pi)(t+6/\pi)]\}/t^2(t+6/\pi)(1+\sin /t)(1+2\sin 1/t).$$

Подставляя (36) в (34) получим полином $q(z)$ имеет вид

$$q(z) = (c\pi/6 - 6\sqrt{3}d/\pi)z + c$$

Поэтому формулы (32), (33) позволяют записать представление для первой функции канонической системы решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией:

$$w_{1,\varkappa_1}^{1+} = \frac{c(2t - \sin 1/t)}{t} + \frac{[12c(1/\pi - 3) + \sqrt{3}d/\pi^2] \sin 1/t}{6\pi}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{1-} = \frac{2c}{t}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{2c(t - \sin 1/t)}{t \sin 1/t} + \frac{[12c(1/\pi - 3) + \sqrt{3}d/\pi^2] \sin 1/t}{3\pi}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{2-} = -\frac{c}{t} + \frac{[12c(1/\pi - 3) + \sqrt{3}d/\pi^2]}{6\pi}$$

Требуя от функций наинизшего порядка на бесконечности приходим к равенству

$$d = 4\sqrt{3}\pi^2 c(1/\pi - 3)$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{1+} = \frac{c(2t - \sin 1/t)}{t}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{1-} = \frac{2c}{t}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{2c(t - \sin 1/t)}{t \sin 1/t}$$

$$w_{1,\varkappa_1}^{2-} = -\frac{c}{t}$$

Литература

[1] Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* /Н.П. Векуа - М.:Наука - 1970. - 379с.

[2] Киясов С.Н. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме.* /С.Н. Киясов - Изв.Вузов.Матем.,№1- 2013. - 3-20с.