4. Новая Система Счисления (100 баллов)

Легендарный изобретатель Вася Пупкин придумал новую систему счисления. Вместо разряда единиц, десятков, сотен и т.д. он использует числа 1, 2, 3, … , а вместо цифр 0, 1, 2, … , 9 — только цифры 1 и 2. Например, число 16 в его системе счисления изображается четырехзначным числом 2121, так как $16 = 2 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{1}$. «Глубокие» размышления привели Васю Пупкина к неутешительному выводу: в новой системе числа представляются несколькими способами. Например, то же число 16 можно записать в виде пятизначного числа 11112, так как $16 = 1 \cdot \mathbf{5} + 1 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{3} + 1 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{1}$.

Ваша задача — составить программу, которая для заданного числа N определяет количество его всевозможных представлений в новой системе счисления.

Идея решения. Запись числа N в новой системе счисления (1, 2, 3, … , m) состоит из m цифр, каждая из которых равна 1 или 2, т.е. $111 \ldots 1 \le N \le 222 \ldots 2$. Это означает: $(1 + 2 + \ldots + m) \le N \le 2(1 + 2 + \ldots + m)$, т.е.

$$m(m + 1) \le 2N \le 2m(m + 1).$$

Из этих неравенств мы находим интервал $[m_0; m_1]$ значений для числа m.

Приступим к подсчету количества всевозможных представлений числа N в системе счисления (1, 2, 3, … , m). Поскольку для записи N каждое число от 1 до m используется *по крайней мере один* раз, то N можно представить в виде суммы чисел M и P, где $M = 1 + 2 + \ldots + m = m(m + 1)/2$, а в записи числа P каждое слагаемое от 1 до m участвует уже *не более одного* раза.

Таким образом, осталось подсчитать количество представлений числа $P = N - M$ в виде суммы *различных* натуральных чисел, *не превосходящих* m. Обозначим это количество через $T(P;m)$. Все разложения числа P на такие слагаемые можно разбить на *две* группы: разбиения, в которых участвует слагаемое m, и разбиения, в которых нет числа m. В первой группе разложений оставшиеся слагаемые не превосходят числа $m - 1$ и в сумме составляют число $P - m$, поэтому число представлений первой группы равно $T(P - m;m - 1)$. Во второй группе разложений слагаемые не превосходят $m - 1$, поэтому число представлений в этой группе равно $T(P;m - 1)$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$T(P;m) = T(P - m;m - 1) + T(P;m - 1),$$

которое используется для динамического вычисления $T(P;m)$. Общее число требуемых представлений числа N получается после суммирования всех представлений $T(P;m)$ при изменении m (в цикле) от $[m_0; m_1]$.