

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010301 «Математика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

«ФУНКЦИЯ ВЫСОТЫ»

Работа завершена: "___" _____ 2015г.

Студент группы 05-103 Ильчук Анжела Владимировна _____

Работа допущена к защите: "___" _____ 2015г.

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич _____

Заведующий кафедрой:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич _____

Рецензент:

Дата, время защиты: _____ Оценка защиты: _____

Казань 2015

Содержание

Введение	2
1 Параметризованные кривые	3
2 Функция высоты	8
3 Примеры нахождения точек перегиба на кривых	11
4 Педальные кривые	15
5 Функция высоты на пространственной кривой	21
Список литературы	23
6 Приложения	24

Введение

При изучении строения кривых на плоскости и в пространстве можно использовать различные функции, ассоциированные с этими кривыми. Наиболее важными такими функциями являются функции кривизны и кручения и их производные по натуральному параметру.

Целью работы является изучение функций высоты, определенных на плоских и пространственных кривых, и применение этих функций при изучении геометрии кривых.

Первый параграф работы посвящен изложению некоторых сведений из теории кривых. В нем также вводится понятие k -точечного касания параметризованной кривой и множества $F^{-1}(0)$, где F — гладкая функция, определенная на плоскости или в пространстве.

В §2 вводится функция высоты на кривой, устанавливается связь наличия точек перегиба с обращением в нуль производных функции высоты и с обращением в нуль кривизны и ее производной.

В §3 построены примеры нахождения точек перегиба для различных кривых. Для улиток Паскаля установлены простые и вырожденные точки перегиба.

В §4 рассматривается функция высоты относительно переменного вектора, совпадающего с единичным вектором нормали. С этой функцией естественно связывается педальная кривая, представляющая собой множество оснований перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки на касательные к кривой. Доказано, что педаль является регулярной кривой всюду, кроме точек, соответствующих точкам перегиба исходной кривой. Результаты иллюстрируются примерами, построенными с использованием пакета программ Mathematica.

В заключительном §5 рассмотрена функция высоты для пространственной кривой, установлены условия, при которых кривая имеет не

менее чем четырех-точечное касание с соприкасающейся плоскостью.

1 Параметризованные кривые

Параметризованной кривой в вещественном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n называется отображение

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где I — некоторый открытый интервал в \mathbb{R} ,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

где функции γ_i имеют производные всех порядков для всех $t \in I$. Такие функции γ_i называются *гладкими* или класса C^∞ .

Переменная t называется *параметром*. Точка $\gamma(t)$ отвечает значению параметра t .

Вектор

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) \quad (1)$$

называется *вектором скорости* кривой γ в точке t_0 или касательным вектором в этой точке. Будем также говорить об этом векторе как касательном векторе в точке $\gamma(t_0)$. Для касательного вектора кривой будем также использовать обозначение $\frac{d\gamma}{dt}$.

Кривая γ называется *регулярной*, если ее касательный вектор (1) не обращается в нуль на области определения.

Как правило, предполагается, что рассматриваемые параметризованные кривые являются регулярными.

Множество всех точек $\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ называется образом параметризованной кривой γ . *Кривой* в \mathbb{R}^n называют множество точек $C \subset \mathbb{R}^n$, которое локально можно представить как взаимно однозначный образ регулярной параметризованной кривой.

Вектор

$$T(t) = \gamma'(t) / (\|\gamma'(t)\|)$$

называется *касательным ортом* (или *единичным касательным вектором*) к кривой γ в точке t . Длина $\|\gamma'(t)\|$ называется *скоростью* кривой γ в точке t . Будем говорить, что γ — *кривая единичной скорости*, если $\|\gamma'(t)\| = 1$ для всех t . Такой параметр называется также длиной дуги или натуральным параметром [3]

Касательная к кривой γ в точке t — это прямая, проходящая через точку $\gamma(t)$ в направлении вектора $T(t)$.

Для параметризованной кривой из равенства $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ не обязательно следует равенство $\gamma'(t_1) = \gamma'(t_2)$. В качестве примера можно указать кривую $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, $t_1 = -1$, $t_2 = 1$

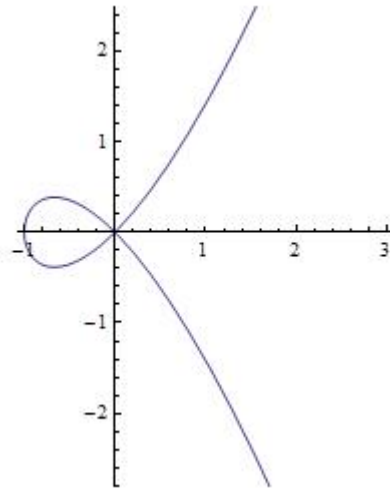


Рис. 1. Петля.

Скалярным произведением векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ в \mathbb{R}^n называется число

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (2)$$

При этом

$$xy = yx = \|x\| \|y\| \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами x и y . В частности, $xx = \|x\|^2$ и $xy = 0$ тогда и только тогда, когда векторы x и y *перпендикулярны* (нулевой вектор считается перпендикулярным любому вектору).

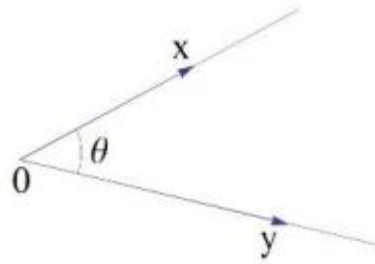


Рис. 2. Скалярное произведение.

Если все координаты x_i и y_i векторов x и y являются гладкими функциями от t , то из (2) получаем

$$(xy)' = \frac{d}{dt}(xy) = xy' + x'y, \quad (3)$$

где $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$. Кроме того, $\|x\|' = \frac{xx'}{\|x\|}$

Если x — переменный вектор, имеющий постоянный модуль, то есть $xx = c = \text{const}$ и все x_i — дифференцируемые функции от t , то из (3) следует, что $xx' = 0$ для всех t , так что для всякого t векторы x и x' перпендикулярны. В частности, если x — орт, то $x' \perp x$.

В качестве частного случая рассмотренных выше свойств производных переменных векторов получаем, что касательный орт T к кривой γ удовлетворяет условию

$$TT' = 0,$$

и вектор T' (он может быть и нулевым) перпендикулярен вектору T . Поскольку $\|T\| = 1$, то вектор T' измеряет скорость, с которой поворачивается касательный вектор.

Кривые на плоскости можно задавать как множества $F^{-1}(0)$, где $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, а 0 — ее регулярное значение [1], [2]. Если $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, то прообраз регулярного значения $F^{-1}(0)$ этой функции представляет собой гладкую поверхность в \mathbb{R}^3 [2].

Регулярным значением отображения f называется всякая точка $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию: для всех x таких, что $f(x) = c$, точка x является регулярной.

Точка x называется *регулярной* для функции $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, если вектор

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\} \neq 0.$$

Пусть, например, u и p — точки множества \mathbb{R}^3 , а $F_1(x) = 0$ и $F_2(x) = 0$ — множества, определяемые функциями

$$F_1(x) = \|x - u\|^2 - \|u - p\|^2 \quad \text{и} \quad F_2(x) = (x - p)u$$

соответственно задают окружность и прямую.

В дальнейшем, используя $F^{-1}(0)$, всегда будем считать, что 0 является регулярным значением для F .

Пусть дана регулярная кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Степень ее касания с множеством $F^{-1}(0)$ определяется следующим образом.

Определение. Кривая γ и множество $F^{-1}(0)$ имеют *k-точечное* (или *k-кратное*) при $t = t_0$ (или в точке $p = \gamma(t_0)$), если функция g , определённая равенством

$$g(t) = F(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = F(\gamma(t))$$

удовлетворяет условиям

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0, \quad g^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

В этом случае *порядок касания* равен k .

Если же последнее условие $g^{(k)}(t_0) \neq 0$ отбрасывается, то имеем *не менее чем k-точечное касание* (или $\geq k$ -точечное касание) или что порядок касания $\geq k$. Он может быть и "бесконечным".

Сформулированное выше условие на функцию g означает, что t_0 представляет собой k -кратный корень уравнения $g(t) = 0$. Из этого следует, что $g(t) = (t - t_0)^k g_1(t)$ для некоторой гладкой функции g_1 , причем $g_1(t_0) \neq 0$, если $g^{(k)}(t_0) \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим плоские кривые ($n = 2$) и прямые, проходящие через точку $\gamma(t_0)$. Прямая, перпендикулярная орту u , имеет уравнение $(x - \gamma(t_0))u = 0$, и её касание с кривой γ в точке $t = t_0$

определяется данной функцией $g(t) = (\gamma(t) - \gamma(t_0))u$. Но $g'(t_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $T(t_0)u = 0$, другими словами если вектор u перпендикулярен вектору $T(t_0)$ или если исходная прямая параллельна вектору $T(t_0)$, следовательно, она является касательной. Таким образом касательная в точке t_0 — это *единственная* прямая, имеющая с данной кривой не менее чем двухточечное касание при $t = t_0$.

В дальнейшем будут рассматриваться только кривые на плоскости \mathbb{R}^2 и в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 .

Касательная к кривой γ на плоскости \mathbb{R}^2 в точке t задаётся уравнением

$$(x_1 - \gamma_1(t))\gamma_2'(t) - (x_2 - \gamma_2(t))\gamma_1'(t) = 0.$$

Касательная к кривой может иметь и более высокий порядок касания. Например, $n = 2$, $\gamma(t) = (t, t^k)$, $t_0 = 0$, $F(x_1, x_2) = x_2$, так что $F = 0$ — ось x_1 в \mathbb{R}^2 . Тогда $F(\gamma(t)) = t^k$, эта кривая имеет k -точечное касание с осью x_1 в начале координат.

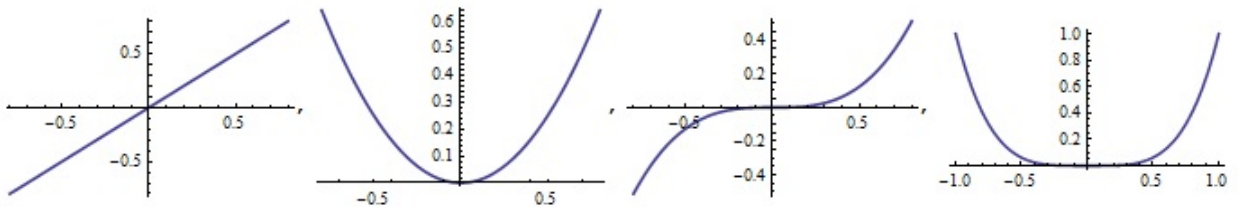


Рис. 3. k -точечное касание при $k = 1, 2, 3, 4$.

При $k = 1$ кривая (прямая) не касается оси x_1 (одноточечное касание — это пересечение без касания), а с ростом k кривая γ начинает спрямляться в начале координат.

Простая (высшая, вырожденная) вершина плоской кривой γ — это точка $p = \gamma(t_0)$, отвечающая значению параметра t_0 , для которого существует окружность, имеющая четырех-точечное касание с кривой при $t = t_0$. При этом говорят, что кривая имеет вершину в точке t_0 или в точке p .

Точка *простого перегиба* (соответственно *высшего, вырожденного*) перегиба плоской кривой γ — это точка $p = \gamma(t_0)$, отвечающая значению параметра t_0 , для которого касательная прямая в точке t_0 имеет трех- (соответственно не менее четырех-)точечное касание с кривой при $t = t_0$. При этом говорят, что кривая имеет перегиб в точке t_0 или в точке p .

Пусть параметр t на кривой $\gamma(t)$ является натуральным, то есть $\gamma'(t) = T(t)$ — единичный вектор при $t \in I$. В этом случае вторая производная $\gamma''(t) = T'(t)$ ортогональна вектору $T(t)$. Поэтому эту производную можно представить в виде

$$\gamma''(t) = T'(t) = \varkappa(t)N(t),$$

где $\varkappa(t)$ — функция, называемая *кривизной* кривой $\gamma(t)$, а вектор $N(t)$ ортогонален $T(t)$ и имеет единичную длину. Он называется вектором нормали кривой $\gamma(t)$. Имеют место следующие формулы, называемые формулами Серре-Френе [1], [3]:

$$T' = \varkappa N, \quad N' = -\varkappa T. \quad (4)$$

2 ФУНКЦИЯ ВЫСОТЫ

Пусть $u \in \mathbb{R}^n$. Если u — орт, то функция высоты на γ с направляющим вектором u — это функция $f_h : I \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством:

$$f_h(t) = \gamma(t)u. \quad (5)$$

Функция $\gamma(t)u$ представляет собой расстояние от точек кривой $\gamma(t)$ до прямой (или плоскости), проходящей через точку 0 перпендикулярно вектору u .

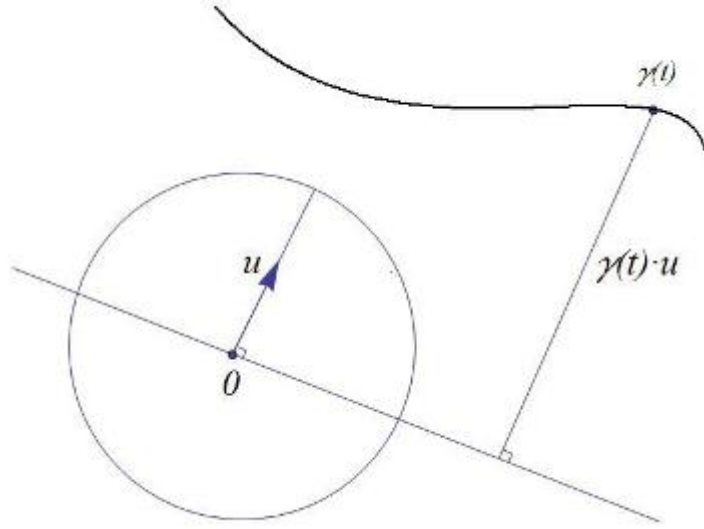


Рис. 4. Функция высоты.

Предложение 1. Кривая γ имеет при $t = t_0$ k -точечное касание с касательной прямой, тогда и только тогда, когда функция f_h высоты на γ в направлении u , перпендикуляром вектору $T(t_0)$, удовлетворяет условиям:

$$f_h^{(i)}(t_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k - 1, \quad f_h^{(k)}(t_0) \neq 0$$

При этом, кривая γ имеет точку простого (высшего) перегиба при $t = t_0$, если эти условия выполняются для $k = 3$ (если они выполнены для некоторого $k \geq 4$ или же $f_h^{(i)}(t_0) = 0$ при всех i).

Доказательство.

Действительно, в данном случае имеем функцию

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = (x - \gamma(t_0))N(t_0),$$

где $N(t_0)$ — единичный вектор нормали к кривой $\gamma(t)$ в точке (t_0) . Подставляя в эту функцию уравнение кривой $\gamma(t)$, получим функцию

$$g(t) = F(\gamma(t)) = (\gamma(t) - \gamma(t_0))N(t_0).$$

С другой стороны, функция высоты в направлении вектора N имеет вид

$$f_h(t) = \gamma(t)N(t_0).$$

Поскольку

$$g(t) - f_h(t) = -\gamma(t_0)N(t_0)$$

— это константа, то производные у функций $g(t)$ и $f_h(t)$ всех порядков совпадают. В частности, они одновременно обращаются в нуль. \square

Предложение 2. *Предположим, что кривая $\gamma(t)$ в окрестности рассматриваемой точки $t_0 = 0$ задана уравнением*

$$\gamma(t) = (t, Y(t)) \quad \text{и} \quad Y(0) = Y'(0) = 0.$$

Тогда точка 0 является точкой перегиба тогда и только тогда, когда $Y''(0) = 0$.

Доказательство.

Найдем функцию высоты. Имеем в точке $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ следующие данные: вектор $u = (0; 1)$, $\gamma(t) = (t, Y(t))$. Поэтому функция высоты имеет вид

$$f_h(t) = Y(t).$$

Теперь утверждение предложения следует из Предложения 1. \square

Предложение 3. *Предположим, что функция кривая $Y(t)$ из предложения 2 является нечетной. Тогда точка $t_0 = 0$ является точкой перегиба кривой $\gamma(t)$.*

Доказательство.

Функция $F(t)$ называется нечетной, если: $F(-t) = -F(t)$. Продифференцировав это соотношение, получим $F'(-t)(-1) = -F'(t)$, что эквивалентно соотношению $F'(-t) = F'(t)$. Продифференцировав последнее соотношение, аналогично предыдущему, получим: $F''(-t) = -F''(t)$.

Таким образом, если функция $Y(t)$ нечетная, она удовлетворяет соотношению $Y''(-t) = -Y''(t)$. В частности, при $t = 0$ имеем $Y''(0) = -Y''(0)$, откуда следует, что $Y''(0) = 0$. Теперь утверждение следует из Предложения 2. \square

Предложение 4. *Пусть $f_h(t) = \gamma(t)u$ — функция высоты на плоской кривой, где t — натуральный параметр. Тогда имеют место сле-*

дующие формулы для производных f'_h , f''_h , f'''_h :

$$\begin{aligned} f'_h(t) &= T(t)u, \\ f''_h(t) &= -\varkappa(t)N(t)u, \\ f'''_h(t) &= -\varkappa'(t)N(t)u + \varkappa^2(t)T(t)u. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство.

Формулы (2) получаются непосредственным дифференцированием функции $\gamma(t)u$ и применением формул Серре-Френе (4).

Как непосредственное следствие этого предложения получаем следующее утверждение.

Предложение 5. *Кривая $\gamma(t)$ имеет в точке t_0 простой перегиб тогда и только тогда, когда $\varkappa(t_0) = 0$.*

Кривая $\gamma(t)$ имеет в точке t_0 высший перегиб тогда и только тогда, когда $\varkappa(t_0) = 0$ и $\varkappa'(t_0) = 0$.

3 Примеры нахождения точек перегиба на кривых

Как было выяснено в § 2, для нахождения точек перегиба кривой $\gamma(t)$ надо найти решения системы уравнений

$$\frac{\partial f_h(t, u)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_h(t, u)}{\partial t^2} = 0.$$

В координатах эта система принимает вид

$$\frac{d\gamma_1}{dt}u_1 + \frac{d\gamma_2}{dt}u_2 = 0, \quad \frac{d^2\gamma_1}{dt^2}u_1 + \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}u_2 = 0. \tag{7}$$

Система (7) относительно u_1 и u_2 является однородной системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Она имеет ненулевое решение

(вектор u) тогда и только тогда, когда существует такое t , при котором ее определитель равен нулю. Каждому ее решению (при условии, что $\gamma'(t)$ не обращается в нуль) соответствует точка перегиба.

Пример 1. Найдем точки перегиба для кривой

$$x = \gamma_1(t) = t^2, \quad y = \gamma_2(t) = 2t^4 + t^5. \quad (8)$$

Система уравнений (7) в этом случае принимает вид

$$2tu_1 + (8t^3 + 5t^4)u_2 = 0, \quad 2u_1 + (24t^2 + 20t^3)u_2 = 0.$$

Приравнивая нулю ее определитель, получаем уравнение

$$2t(24t^2 + 20t^3) - 2(8t^3 + 5t^4) = 0 \iff 2t^3(16 + 15t) = 0.$$

Решениями этого уравнения являются точки кривой $t_1 = 0$ и $t_2 = -\frac{16}{15}$. Первая из них является особой точкой (кривая нерегулярна в этой точке), а вторая — точкой перегиба.

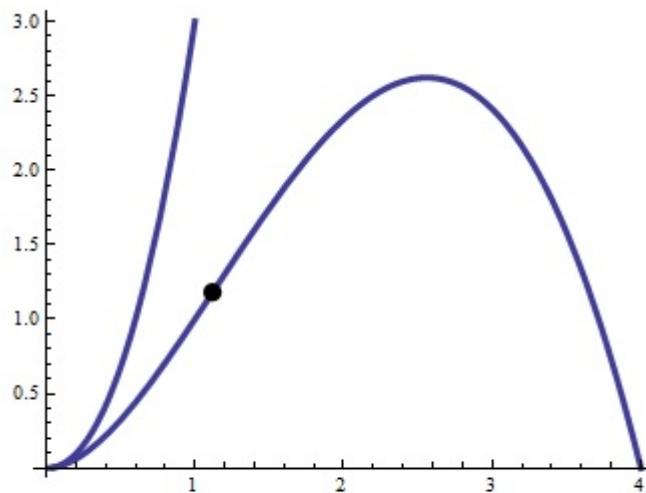


Рис. 5. Кривая (8) и ее точка перегиба.

Пример 2. Улитка Паскаля задается следующим уравнением в полярной системе координат

$$\rho = 2 \cos \varphi + a.$$

В прямоугольной системе координат это уравнение приводит к системе (заменяем параметр φ на t)

$$x(t) = a \cos t + \cos 2t + 1, \quad y(t) = a \sin t + \sin 2t. \quad (9)$$

Система уравнений (7) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} (-a \sin t - 2 \sin 2t)u_1 + (a \cos t + 2 \cos 2t)u_2 &= 0, \\ (-a \cos t - 4 \cos 2t)u_1 + (-a \sin t - 4 \sin 2t)u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю ее определитель, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} -a \sin t - 2 \sin 2t & a \cos t + 2 \cos 2t \\ -a \cos t - 4 \cos 2t & -a \sin t - 4 \sin 2t \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

что эквивалентно

$$a^2 + 8 + 6a \cos t = 0.$$

Это уравнение имеет решения

$$\cos t = -(a^2 + 8)/6a \quad (11)$$

при

$$a^2 + 8 \leq 6a \iff (a - 3)^2 \leq 1 \iff 2 \leq a \leq 4.$$

При $a = 4$ имеем: $\cos t = -1$, $t = \pi$ в (11) и решением системы (10) является вектор $(u_1 = 1, u_2 = 0)$. При этом

$$\frac{\partial^3 f_h(t, u)}{\partial t^3} = (4 \sin t + 8 \sin 2t)u_1 + (-4 \cos t - 8 \cos 2t)u_2 = 0$$

при $t = \pi$ и $(u_1 = 1, u_2 = 0)$. Это означает, что улитка Паскаля при $a = 4$ имеет при $t = \pi$ высшую точку перегиба.

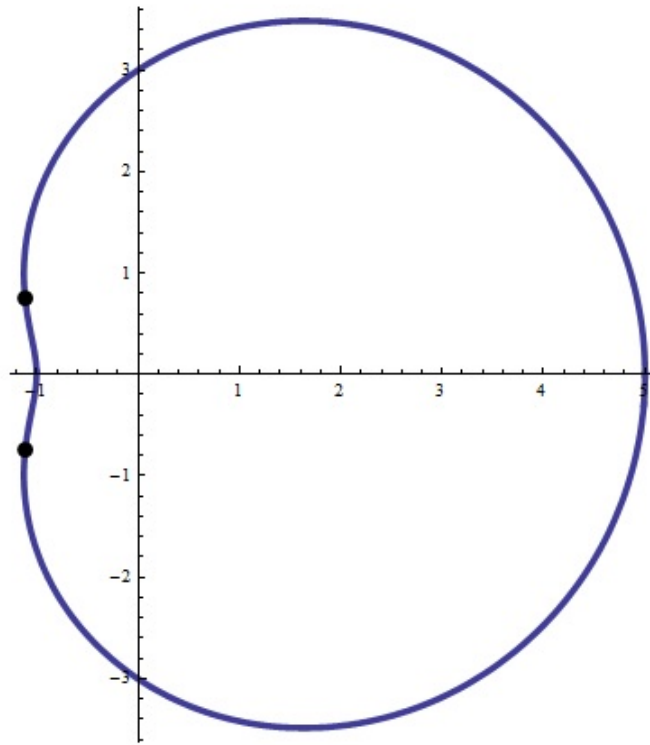


Рис. 6. Улитка Паскаля при $a = 3$ и ее точки перегиба.

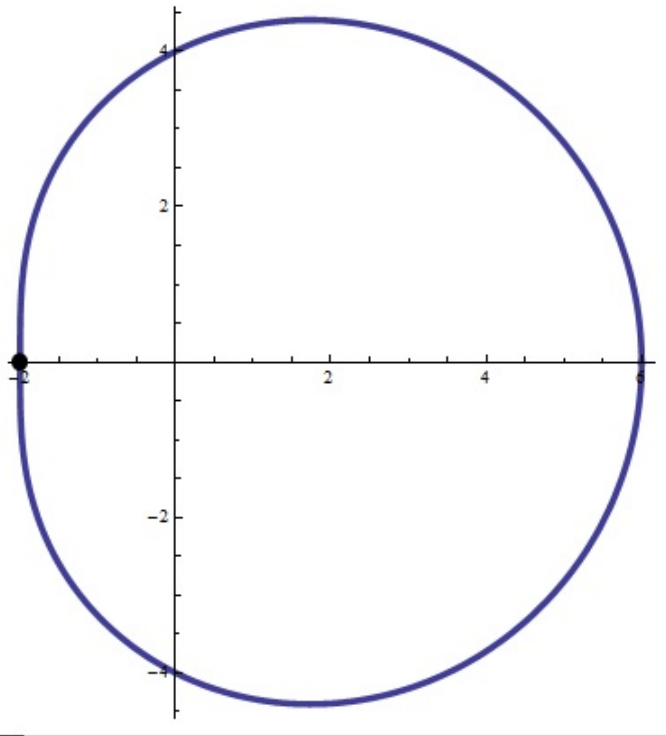


Рис. 7. Улитка Паскаля при $a = 4$ и ее точка высшего перегиба.

4 Педальные кривые

Пусть γ — кривая единичной скорости на плоскости \mathbb{R}^2 . Функция высоты $f_h(t) = \gamma(t) \cdot u$ в направлении u , определенная на кривой γ при переменном u может рассматриваться как функция

$$f_h : I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

двух переменных t и углового параметра на окружности \mathbb{S}^1 . Задавая вектор u как функцию от t , некоторым естественным образом связанную с кривой γ , будем получать функции $f_h(t, u(t))$, также несущие информацию о кривой γ .

В этом разделе в качестве функции $u(t)$ возьмем вектор нормали $u(t) = N(t)$. Функция $f_h(t, N(t))$ относит точке $\gamma(t)$ расстояние от точки O до касательной к γ в точке t . Основания перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой $\gamma(t)$ образуют кривую, называемую *педальной кривой* кривой $\gamma(t)$ или, кратко, *педалью* этой кривой относительно точки O .

Составим уравнение педали. Поскольку в качестве начала координат можно выбрать любую точку плоскости, будем считать, что перпендикуляры опускаются на касательные к кривой γ из точки q . Таким образом, будем рассматривать *педальную кривую* кривой $\gamma(t)$ относительно некоторой фиксированной точки q .

Пусть $\delta(t)$ — точка педали, соответствующая точке $\gamma(t)$. Тогда, с одной стороны, $\delta = q + \lambda N$, а с другой стороны, $\delta = \gamma + \mu T$. Отсюда следует, что

$$q + \lambda N = \gamma + \mu T.$$

Умножая последнее соотношение скалярно на вектор N , находим

$$\lambda = (\gamma - q) \cdot N.$$

Отсюда получаем уравнение педали

$$\delta = q + ((\gamma - q) \cdot N)N. \tag{12}$$

Уравнение (12), использующее натуральную параметризацию кривой γ , не удобно для использования при конкретных вычислениях. Для получения уравнения педали, не зависящее от натурального параметра, достаточно найти вектор N нормали в произвольной параметризации и подставить его в (12). Для этого надо найти вектор касательной γ' и повернуть его на прямой угол.

Пусть кривая $\gamma(t)$ задается уравнениями

$$\gamma(t) = \{x(t), y(t)\},$$

где t — произвольный параметр. Тогда

$$\gamma'(t) = \{x'(t), y'(t)\}.$$

Для единичного касательного вектора получаем следующие выражения в координатах:

$$\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = T = \left\{ \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right\},$$

а для вектора главной нормали соответственно следующие:

$$N = \left\{ \frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right\}.$$

Имеем далее:

$$q = \{q_1, q_2\}, \quad \gamma - q = \{x(t) - q_1, y(t) - q_2\}.$$

Введем обозначение

$$A(t) = (\gamma - q)N.$$

Тогда

$$A(t) = (x(t) - q_1) \left(\frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) + (y(t) - q_2) \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right).$$

$$\delta = \{X(t), Y(t)\} = \left\{ \left(q_1 + A \frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, q_2 + A \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \right\}$$

Таким образом, получаем:

$$\delta = \{q_1, q_2\} + \frac{-y'(x(t) - q_1) + (y(t) - q_2)x'}{(x')^2 + (y')^2} \{-y', x'\}. \quad (13)$$

Для конкретных (в том числе компьютерных) вычислений удобнее использовать следующее представление:

$$X = q_1 - By', \quad Y = q_2 + Bx', \quad (14)$$

где

$$B = \frac{-y'(x(t) - q_1) + (y(t) - q_2)x'}{(x')^2 + (y')^2}. \quad (15)$$

Предложение. Пусть $\gamma(t) \neq q$ для всех $t \in I$. Тогда педаль $\delta(t)$ является регулярной кривой всюду, кроме точек, соответствующих точкам перегиба кривой γ .

Доказательство. Дифференцируя уравнение (12), находим касательный вектор педали

$$\delta' = (\gamma'N + (\gamma - q)N')N + ((\gamma - q)N)N'.$$

Учитывая формулы Серре-Френе (4)

$$T' = \varkappa N, \quad N' = -\varkappa T,$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta' = ((TN) + (\gamma - q)(-\varkappa T))N + ((\gamma - q)N)(-\varkappa T) = \\ -\varkappa(((\gamma - q)T)N + ((\gamma - q)N)T). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку квадрат модуля вектора

$$((\gamma - q)T)N + ((\gamma - q)N)T$$

равен

$$((\gamma - q)T)^2 + ((\gamma - q)N)^2 = (\gamma - q)^2 > 0,$$

то из (16) следует, что δ' может обратиться в нуль только при $\varkappa(t) = 0$, но это как раз и соответствует точкам перегиба кривой γ . \square

Педальные кривые улитки Паскаля.

Выведем уравнение педали для улитки Паскаля (9). Для простоты вычислений фиксируем $q = (1, 0)$. Имеем

$$x(t) = a \cos t + \cos 2t + 1, \quad y(t) = a \sin t + \sin 2t,$$

$$x' = -a \sin t - 2 \sin 2t, \quad y' = a \cos t + 2 \cos 2t.$$

Вычисляем по-отдельности числитель и знаменатель выражения (15). Для числителя с помощью пакета программ Mathematica получаем

$$\begin{aligned} & - (a \cos t + 2 \cos 2t)(a \cos t + \cos 2t + 1 - 1) + \\ & (a \sin t + \sin 2t)(-a \sin t - 2 \sin 2t) = -2 - a^2 - 3a \cos t. \end{aligned}$$

Для знаменателя с помощью пакета программ Mathematica получаем

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 t + 4a \cos t \cos 2t + 4 \cos^2 2t + a^2 \sin^2 t + 4a \sin t \sin 2t + 4 \sin^2 2t = \\ 4 + a^2 + 4a \cos t. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (15) принимает вид

$$B = \frac{-2 - a^2 - 3a \cos t}{4 + a^2 + 4a \cos t}$$

При $a = 2$ уравнение (14) педали улитки относительно точки $q = \{1, 0\}$ имеет вид

$$\begin{cases} X = 1 + \left(\frac{-6-6 \cos t}{8+8 \cos t}\right) (-2 \cos t - 2 \cos 2t), \\ Y = 0 + \left(\frac{-6-6 \cos t}{8+8 \cos t}\right) (-2 \sin t - 2 \sin 2t). \end{cases}$$

Ниже следуют рисунки улиток Паскаля и их педалей для различных значений a и q , на которых видно соответствие точек перегиба улитки и особенностей педали. Общей касательной в двух различных точках улитки соответствует кратная точка улитки Паскаля. Все вычисления и построения осуществляются с использованием пакета программ Mathematica.

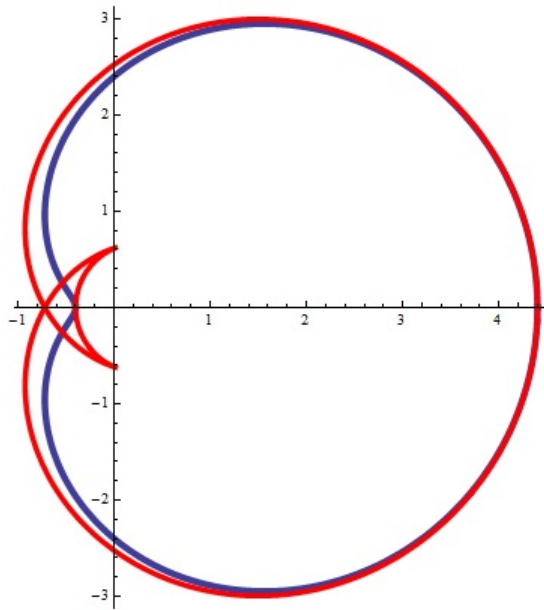


Рис. 9. Педаль улитки Паскаля при $a = 2.4$ относительно точки $(1;0)$.

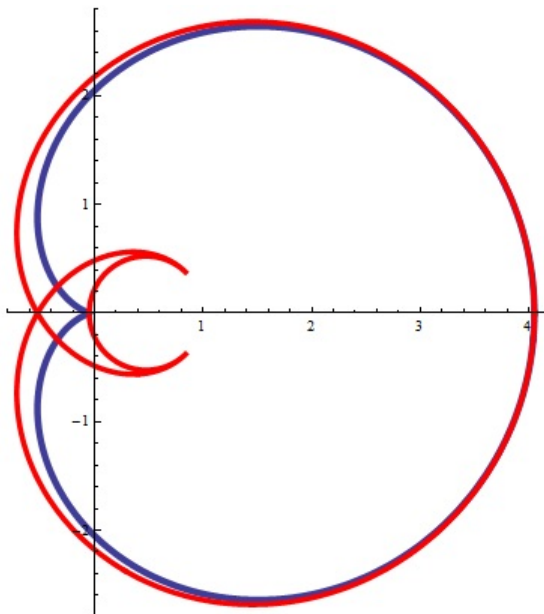


Рис. 10. Педаль улитки Паскаля при $a = 2.05$ относительно точки $(1;0)$.

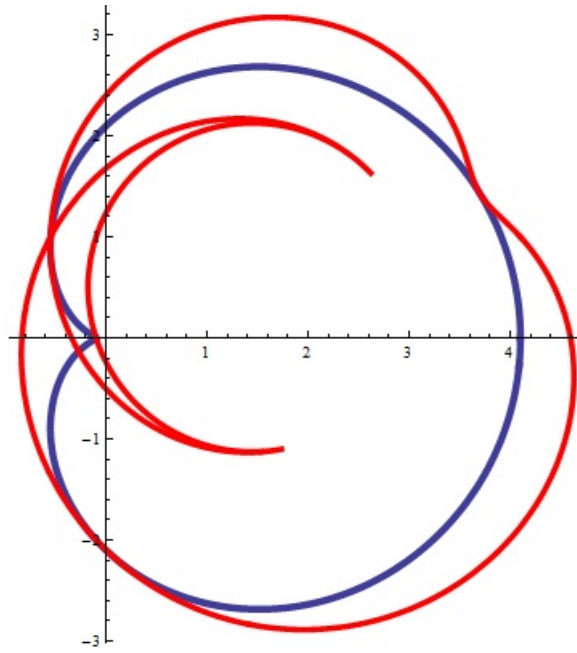


Рис. 11. Педаль улитки Паскаля при $a = 2.1$ относительно точки $(3;1)$.

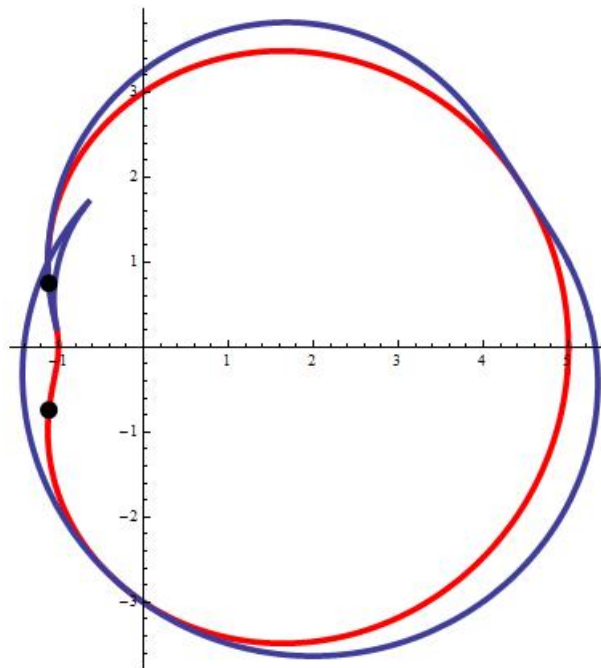


Рис. 12. Педаль улитки Паскаля при $a = 3$ относительно точки $(3;1)$,
на улитке отмечены точки перегиба.

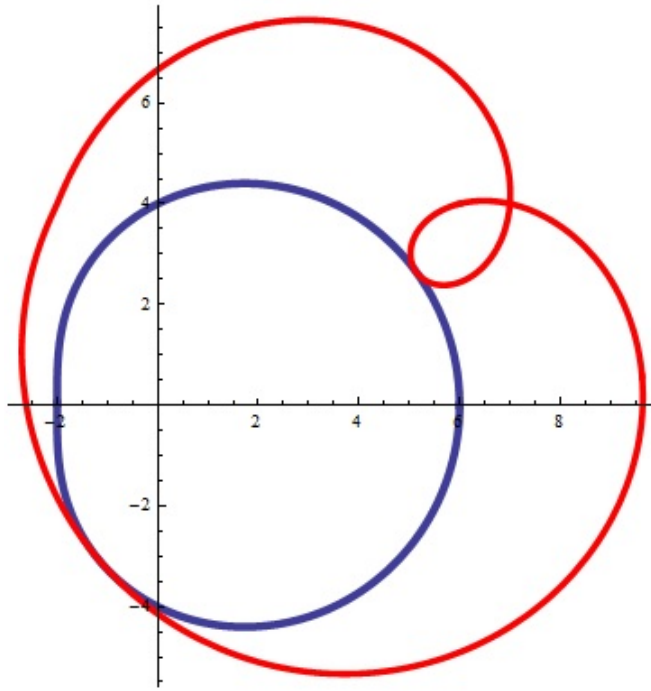


Рис. 13. Педаль улитки Паскаля при $a = 4$ относительно внешней точки $(7;4)$, в которой пересекаются две касательные.

5 Функция высоты на пространственной кривой

Пусть

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

— кривая единичной скорости и u — орт в \mathbb{R}^3 . Функция высоты в направлении u определяется формулой

$$f_h(t) = \alpha(t)u.$$

Число $f_h(t)$ — расстояние от точки $\gamma(t)$ до плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярно вектору u .

Будем использовать формулы Серре—Френе для пространственной кривой [1], [3]:

$$\gamma' = T, \quad T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N,$$

Где T , N и B — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно, \varkappa — функция кривизны, τ — функция кручения.

Имеем следующие выражения для производных функции высоты:

$$f'_h = Tu, \quad f''_h = \varkappa Nu, \quad f'''_h = \varkappa' Nu - \varkappa^2 Tu + \varkappa \tau Bu. \quad (17)$$

Уравнение $F(x) = 0$ для функции

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = (x - \gamma(t_0))u$$

задает плоскость, проходящую через точку $\gamma(t_0)$ с нормальным вектором u .

Выясним геометрический смысл обращения в нуль производных (17) от функции высоты. Будем предполагать, что кривизна в рассматриваемой точке не равна нулю. Имеем:

$$f'_h(t_0) = 0 \quad \iff u = \lambda N + \mu B,$$

то есть вектор u принадлежит нормальной плоскости.

$$f'_h(t_0) = f''_h(t_0) = 0 \quad \iff u = \pm B,$$

$$f'_h(t_0) = f''_h(t_0) = f'''_h(t_0) = 0 \quad \iff u = \pm B, \tau(t_0) = 0.$$

Как следствие, получаем следующее предложение.

Предложение. Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая единичной скорости и $\varkappa(t_0) \neq 0$. Кривая γ имеет в точке t_0 по крайней мере трехточечное касание с соприкасающейся плоскостью.

Кривая γ имеет в точке t_0 по крайней мере четырех-точечное касание с соприкасающейся плоскостью тогда и только тогда, когда $\tau(t_0) = 0$.

Список литературы

- [1] Брус, Д. Кривые и особенности / Д. Брус, П. Джиблин. М.: Мир, 1988.
- [2] Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. М.: Изд. Лань, 2010.
- [3] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*. М., 1958. 244 с.
- [4] Скопенков А. Б. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах. М.: МЦНМО, 2010.
- [5] Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory.*: Cambridge University Press 1992
- [6] Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica* / A. Gray. Chapman & Hall/CRC (Boca Raton, FL), 2006. 1016 pp.
- [7] Toponogov V. A. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhäuser Boston, 2006.

6 Приложения

Кривая с самопересечением

```
x[t_] = t*t - 1;  
y[t_] = t*t*t - t;  
plot = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -2, 2}]
```

k -точечные касания, $k = 1, 2, 3, 4$

```
Plot[x, {x, -0.8, 0.8}, AspectRatio -> Automatic]  
Plot[x*x, {x, -0.8, 0.8}, AspectRatio -> Automatic]  
Plot[x*x*x, {x, -0.8, 0.8}, AspectRatio -> Automatic]  
Plot[x*x*x*x, {x, -1, 1}, AspectRatio -> Automatic]
```

Вычисление числителя и знаменателя в уравнении педали

```
Simplify[-(a*Cos[t] + 2*Cos[2*t])*(a*Cos[t] + Cos[2*t]) +  
(a*Sin[t] + Sin[2*t])*(-a*Sin[t] - 2*Sin[2*t])] =  
-2 - a^2 - 3 a Cos[t]  
Simplify[a^2*Cos[t]^2 + 4*a*Cos[t]*Cos[2*t] + 4*Cos[2*t]^2 +  
a^2*Sin[t]^2 + 4*a*Sin[t]*Sin[2*t] + 4*Sin[2*t]^2] =  
4 + a^2 + 4 a Cos[t]
```

Точки перегиба на кривой

```
f[t_] = t^2;f1[t_] = 2 t^4 + t^5;
t = -1.06;
N[f[t]]
N[f1[t]]
1.1236
1.18673
Graphics[ParametricPlot[{t^2, 2 t^4 + t^5}, {t, -2, 1},
PlotStyle -> {Thickness[0.01]},
Epilog -> {PointSize[0.03], Point[{1.123, 1.186}]}]]
```

Точки перегиба на улитках Паскаля. Общая программа

```
a = ?;
q1 = ?;
q2 = ?;
x[t] = a*Cos[t] + Cos[2 t] + 1;
y[t] = a*Sin[t] + Sin[2 t];
x'[t] = -a*Sin[t] - 2*Sin[2 t];
y'[t] = a*Cos[t] + 2*Cos[2 t];
B = (-y'[t]*(x[t] - q1) + (y[t] - q2)*x'[t])/((x'[t])^2 + (y'[t])^2);
X = q1 + B*(-y'[t]);
Y = q2 + B*(x'[t]);
Show[{ParametricPlot[{a*Cos[t] + Cos[2 t] + 1,
a*Sin[t] + Sin[2 t]}, {t, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Thickness[0.0125]}],
ParametricPlot[{X, Y}, {t, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Thickness[0.01], Red}], PlotRange -> All]
```