УДК 517.97

ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

К.Г. Гараев

Аннотация

В статье дан краткий обзор работ по модифицированной теории инвариантных вариационных задач и ее приложениям, разработанной автором. В качестве метода исследования использован инфинитезимальный аппарат Ли – Овсянникова, а также фундаментальная идея Э. Нетер об инвариантных функционалах. Доказаны теоремы об обобщенной инвариантности, обсуждены вопросы применения разработанной теории к решению оптимальных задач математической физики.

Ключевые слова: группа Ли, интегральный инвариант, функциональный инвариант, обобщенная теорема Нетер, принцип максимума Понтрягина, уравнение Беллмана.

Введение

Цель настоящей работы – дать изложение модифицированной теории инвариантных вариационных задач, разрабатываемой автором в последние годы, и показать возможность ее приложения в теоретической аэрогазодинамике и теории оптимального управления. В 1897 г. выдающийся норвежский математик Софус Ли впервые ввел понятие интегрального инварианта и получил необходимые и достаточные условия его существования на языке инфинитезимальных операторов [1]. В 1918 г. знаменитый немецкий математик Эмми Нетер, опираясь на понятие интегрального инварианта, создала теорию инвариантных вариационных задач [2], нашедшую впоследствии широкое применение в теоретической и математической физике и механике. Эта теория возникла в результате сотрудничества с Д. Гильбертом, который привлек Э. Нетер к разработке проблем сохранения в общей теории относительности Альберта Эйнштейна; ее теория стала естественным развитием идей и результатов Д. Гильберта и Ф. Клейна (см. [3]). В дальнейшем теория Нетер подвергалась различным модификациям: в 1921 г. ее ученик Е. Бессель-Хаген ввел понятие так называемой дивергентной (или калибровочной) инвариантности [4], а в 1962 г. Х. Штойдель – конформной инвариантности [5]. В 1989 г. эти понятия нами были включены в понятие так называемой обобщенной инвариантности, или L^*-инвариантности [6].

1. Модифицированная теория инвариантных вариационных задач

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{D_0} L\,(x, \varphi, \partial\varphi/\partial x)\, dx \tag{1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – независимые переменные, $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ – зависимые переменные; через $\partial\varphi/\partial x$ обозначена совокупность частных производных первого порядка

$$\varphi_i^k = \partial\varphi^k/\partial x^i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m;$$

лагранжиан L – функция, имеющая в области D_0 непрерывные частные производные по своим аргументам до второго порядка включительно.

Определение 1. Интеграл I называется L^*-инвариантным относительно r-параметрической группы G_r непрерывных преобразований

$$x'^i = f^i(x, \varphi, \varepsilon), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \varphi'^k = g^k(x, \varphi, \varepsilon), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

если для всех функций $\varphi^k(x)$, каждого из преобразований (2) и любой подобласти $D \subset D_0 \subset R^n$ выполняется равенство

$$\int\limits_{D'} L\left(x', \varphi', \partial\varphi'/\partial x'\right) dx' = \int\limits_{D} L^*\left(x, \varphi, \partial\varphi/\partial x, \varepsilon\right) dx, \tag{3}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon', \ldots, \varepsilon^r)$ – параметр группы.

Подчеркнем, что структура лагранжиана L^* задается заранее: если, например, $L^* \equiv L$, то имеет место классическая инвариантность по Нетер [2]; если $L^* = L + D_i F^i\left(x, \varphi, \partial\varphi/\partial x, \varepsilon\right)$, где D_i – оператор полного дифференцирования по переменной x^i, то получим дивергентную инвариантность [4], если $L^* = h(\varepsilon)L$, то имеем конформную инвариантность [5].

Найдем необходимые и достаточные условия L^*-инвариантности интеграла (1) для любого натурального n.

Обозначим через G_1 однопараметрическую группу точечных преобразований

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(x, \varphi, \varepsilon), \ldots, f^i(x, \varphi, 0) = x^i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \varphi'^k &= g^k(x, \varphi, \varepsilon), \ldots, g^k(x, \varphi, 0) = \varphi^k, \quad k = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{4}$$

которым отвечает инфинитезимальный оператор

$$X = \xi_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi_\varphi^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \tag{5}$$

где

$$\xi_x^i(x,\, \varphi) = \left.\frac{\partial f^i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \xi_\varphi^k(x,\, \varphi) = \left.\frac{\partial g^k}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Пусть $\widetilde{\widetilde{G}}_1$ – группа, полученная из группы G_1 продолжением преобразований (4) на производные φ_i^k и элемент объема dx; согласно [7] ей отвечает инфинитезимальный оператор $\widetilde{\widetilde{X}} = \widetilde{X} + D_i(\xi_x^i)\, dx \dfrac{\partial}{\partial x}$. Здесь $\widetilde{X}$ – оператор группы G_1, полученный продолжением преобразований (4) на производные $\varphi_i^k : \widetilde{X} = X + \xi_{\varphi_i}^k \dfrac{\partial}{\partial \varphi_i^k}$, где

$$\xi_{\varphi_i}^k = D_i(\xi_\varphi^k) - \varphi_j^k\, D_i(\xi_x^j), \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi_i^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + \varphi_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \varphi_j^k}, \quad \varphi_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i\, \partial x^j}.$$

Отметим, что группа $\widetilde{G}_1$ задается преобразованиями

$$x'^i = f^i(x, \varphi, \varepsilon); \quad \varphi'^i = g^k(x, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi_i'^k = \eta_i^k(x, \varphi, \varphi_x, \varepsilon).$$

Тогда

$$L\left(x',\varphi',\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)dx' =$$
$$= L\left(f(x,\varphi,\varepsilon), g(x,\varphi,\varepsilon), \eta\left(x,\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x},\varepsilon\right)\right) J\left(\frac{x'}{x}\right)dx = F\left(x,\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x},\varepsilon\right),$$

где $J\left(\frac{x'}{x}\right)$ – якобиан преобразования координат.

Следуя С. Ли, функцию F представим в виде суммы ряда по степеням группового параметра [8]:

$$F = F\big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon}{1\,!}\,\frac{dF}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,\frac{d^2F}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} + \cdots + \frac{\varepsilon^p}{p\,!}\,\frac{d^pF}{d\varepsilon^p}\bigg|_{\varepsilon=0} + \cdots \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&F\big|_{\varepsilon=0} = L\,dx, \quad \frac{dF}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \overset{\approx}{X}{}^{(1)}(L\,dx) = S_1\,dx, \quad S_1 = \widetilde{X}\,L + L\,D_i\left(\xi^i_x\right),\\
&\frac{d^2F}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = \overset{\approx}{X}{}^{(2)}(L\,dx) = S_2\,dx, \quad S_2 = \widetilde{X}\,S_1 + S_1\,D_i\left(\xi^i_x\right),\\
&\cdots\\
&\frac{d^pF}{d\varepsilon^p}\bigg|_{\varepsilon=0} = \overset{\approx}{X}{}^{(p)}(L\,dx) = S_p\,dx, \quad S_p = \widetilde{X}\,S_{p-1} + S_{p-1}\,D_i\left(\xi^i_x\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

В формулах (7) введено обозначение

$$\overset{\approx}{X}{}^{(p)}L = \underbrace{\overset{\approx}{X}\,\overset{\approx}{X}\cdots\overset{\approx}{X}}_{p\text{ раз}}(L\,dx).$$

Разложив лагранжиан L^* в ряд по степеням ε и учтя формулы (6), (7), равенство (3) перепишем в виде

$$\int\limits_D \left(L + \frac{\varepsilon}{1\,!}\,S_1 + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,S_2 + \cdots + \frac{\varepsilon^p}{p\,!}\,S_p + \cdots\right)dx =$$
$$= \int\limits_D \left(L + \frac{\varepsilon}{1\,!}\,\frac{\partial L^*_0}{\partial\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,\frac{\partial^2L^*_0}{\partial\varepsilon^2} + \cdots + \frac{\varepsilon^p}{p\,!}\,\frac{\partial^pL^*_0}{\partial\varepsilon^p} + \cdots\right)dx,$$

где индекс 0 означает, что все частные производные от функции L^* вычислены при $\varepsilon = 0$. В силу произвольности области D из последнего равенства получим бесконечную цепочку равенств

$$S_1 = \frac{\partial L^*_0}{\partial\varepsilon}, \quad S_2 = \frac{\partial^2L^*_0}{\partial\varepsilon^2}, \quad \ldots, \quad S_p = \frac{\partial^pL^*_0}{\partial\varepsilon^p}, \quad \ldots,$$

или в силу (7)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{X}\,L + L\,D_i\left(\xi^i_x\right) = \frac{\partial L^*_0}{\partial\varepsilon}, \quad \widetilde{X}\left(\frac{\partial L^*_0}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{\partial L^*_0}{\partial\varepsilon}\,D_i\left(\xi^i_x\right) = \frac{\partial^2L^*_0}{\partial\varepsilon^2},\\
&\cdots\\
&\widetilde{X}\left(\frac{\partial^{p-1}L^*_0}{\partial\varepsilon^{p-1}}\right) + \frac{\partial^{p-1}L^*_0}{\partial\varepsilon^{p-1}}\,D_i\left(\xi^i_x\right) = \frac{\partial^pL^*_0}{\partial\varepsilon^p},\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, если имеет место условие (3), то при любом ε имеет место бесконечная цепочка равенств (8), и обратно, рассмотрев записанные равенства в противоположном направлении, придем к условию L^*-инвариантности n-мерного интеграла (1).

Этот результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Для L^*-инвариантности интеграла (1) относительно точечной группы Ли G_1 с оператором (5) необходимо и достаточно выполнение бесконечной цепочки равенств*

$$\widetilde{X}\left(\frac{\partial^{p-1}L_0^*}{\partial\varepsilon^{p-1}}\right)+\frac{\partial^{p-1}L_0^*}{\partial\varepsilon^{p-1}}\,D_i\left(\xi_x^i\right)=\frac{\partial^{p}L_0^*}{\partial\varepsilon^{p}},\quad i=1,2,\ldots,n,\quad p=1,2,\ldots \tag{9}$$

Здесь принято $\dfrac{\partial^0 L_0^*}{\partial\varepsilon}\equiv L$.

Следствие 1. *Если $L^*\equiv L$, то из (9) следует необходимое и достаточное условие классической инвариантности по Э. Нетер [7]: $\widetilde{X}\,L+L\,D_i\left(\xi_x^i\right)=0$, $i=1,2,\ldots,n$.*

Следствие 2. *Необходимое и достаточное условие конформной инвариантности интеграла (1) относительно группы G_1 с функцией $L^*=L\exp(s\cdot\varepsilon)$, $s\in R$, в соответствии с (9) примет вид $\widetilde{X}\,L+L\,D_i\left(\xi_x^i\right)=s\cdot L$, $i=1,2,\ldots,n$.*

Следствие 3. *Для случая дивергентной инвариантности с функцией $L^*=L+[\exp(s\cdot\varepsilon)-1]\,D_i\,F^i$ бесконечная цепочка равенства (9) также обрывается [9]:*

$$\widetilde{X}\,L+L\,D_i\left(\xi_x^i\right)=s\,D_i\,F^i,$$
$$\widetilde{X}\left(D_i\,F^i\right)+\left(D_i\,F^i\right)\left\lfloor\left(D_i\left(\xi_x^i\right)\right)\right\rfloor=s\,D_i\,F^i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

2. L^*-теорема и аналоги классических формул математического анализа для функционалов

Пусть теперь интеграл I – вариационный, то есть функции $\varphi^k(x)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi^k}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i^k}\right)=0,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,m.$$

Справедлива следующая L^*-теорема.

Теорема 2. *Пусть функционал I инвариантен относительно группы Ли G_1 с оператором (5). Тогда имеет место следствие уравнений Эйлера («обобщенный закон сохранения») вида*

$$D_i\left(T^i\right)-\frac{\partial L_0^*}{\partial\varepsilon}=0, \tag{10}$$

$$T^i=\left(\xi_\varphi^k-\varphi_j^k\,\xi_x^j\right)\frac{\partial L}{\partial\varphi_i^k}+\xi_x^i\,L,\quad i,\,j=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,m.$$

Доказательство. С помощью тождества Нетер – Ибрагимова [7] равенства (9) для $p=1$ можно записать в виде

$$\left(\xi_\varphi^k-\varphi_j^k\,\xi_x^j\right)\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi^k}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i^k}\right)\right]+D_i\left[\left(\xi_\varphi^k-\varphi_j^k\,\xi_x^j\right)\frac{\partial L}{\partial\varphi_i^k}+\xi_x^i\,L\right]-$$
$$-\frac{\partial L_0^*}{\partial\varepsilon}=0,\quad i,\,j=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,m. \tag{11}$$

На экстремалях $\varphi^k(x)$ из равенства (11) и следует «обобщенный закон сохранения» (10). $\square$

Отметим, что в случае $L^* \equiv L$ из (11) следует классическая теорема Э. Нетер, и равенство (10) превращается в дифференциальный закон сохранения.

В качестве следствий рассмотрим три важных для приложений случая: вариационные задачи соответственно с одной, двумя и тремя независимыми переменными; при этом будем рассматривать конформную инвариантность функционала I относительно группы G_1 с функцией $L^* = L\,\exp(s\cdot\varepsilon)$.

Аналог формулы Ньютона – Лейбница. Рассмотрим функционал

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} L\left[x, \varphi^k(x), \dot\varphi^k(x)\right] dx, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

Равенство (10) примет вид

$$\frac{dT^x}{dx} - s\,L = 0, \tag{13}$$

где $T^x = \left(\xi^k_\varphi - \dot\varphi^k\,\xi_x\right)\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi^k} + \xi_x\,L$. Проинтегрировав (13) в пределах от x_0 до x_1, получим

$$I = \frac{1}{s}\cdot T^x\Big|_{x_0}^{x_1}. \tag{14}$$

Таким образом, если функционал (12) конформно инвариантен относительно однопараметрической группы G_1 с оператором X и экстремали $\varphi^k(x)$ найдены, то экстремальное значение функционала можно вычислить по формуле (14), которую естественно назвать аналогом формулы Ньютона – Лейбница для функционала с одной независимой переменной. Отметим, что этой формулой особенно удобно пользоваться тогда, когда интеграл (12) является несобственным, так как в этом случае его непосредственное вычисление бывает затруднительным.

Рассмотрим в качестве примера функционал [10]

$$I = \int\limits_0^l y\left(2\dot y^3 + Ax^{-\alpha}\right) dx, \tag{15}$$

представляющий собой (с точностью до числового множителя) аэродинамическое сопротивление тонкого тела вращения радиуса $y(x)$ в сверхзвуковом потоке; A и α – известные постоянные. Экстремаль, доставляющая минимум (15), отыскивается в классе гладких функций; она есть решение нелинейной двухточечной задачи $12\,y\,\dot y\,\ddot y + 4\,\dot y - A\,x^{-\alpha} y = 0$; $y(0) = 0$, $y(l) = y_l$, решение которой в элементарных функциях неизвестно.

Нетрудно установить, что функционал (15) L^*-инвариантен относительно однопараметрической группы Ли с оператором $X = x\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{3-\alpha}{3}\,y\,\dfrac{\partial}{\partial y}$ и функцией $L^* = L\cdot\exp\left(\dfrac{6-4\alpha}{3}\,\varepsilon\right)$; поэтому в соответствии с (14) имеем

$$I = \frac{3}{6-4\alpha}\left[\left(1-\frac{\alpha}{3}\right) y\,\frac{\partial L}{\partial \dot y} + x\left(L - \dot y\,\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right)\right]_0^l,$$

где L – подынтегральная функция в (15).

Аналог формулы Грина – Остроградского. Рассмотрим функционал

$$I = \iint\limits_D L\left[x, y, \varphi^k(x,y), \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^k}{\partial y}\right] dx\, dy, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Проинтегрировав (10) по области D и использовав формулу Грина – Остроградского для вычисления значения функционала, получим формулу (l – граница области D)

$$I = \frac{1}{s} \oint\limits_{l^+} T^y\, dx - T^x\, dy,$$

где

$$T^x = \left(\xi^k_\varphi - \varphi^k_x\, \xi_x - \varphi^k_y\, \xi_y\right) \frac{\partial L}{\partial \varphi^k_x} + \xi_x\, L,$$

$$T^y = \left(\xi^k_\varphi - \varphi^k_x\, \xi_x - \varphi^k_y\, \xi_y\right) \frac{\partial L}{\partial \varphi^k_y} + \xi_y\, L, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Аналог формулы Остроградского – Гаусса. Рассмотрим функционал

$$I = \iiint\limits_V L\left[x, y, z, \varphi^k(x,y,z), \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^k}{\partial y}, \frac{\partial \varphi^k}{\partial z}\right] dV, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Проинтегрировав (10) по области и использовав формулу Гаусса - Остроградского, получим

$$I = \frac{1}{s} \iint\limits_\sigma \left[T^x \cos(n,x) + T^y \cos(n,y) + T^z \cos(n,z)\right] d\sigma.$$

Здесь $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ;

$$T^x = A^k \frac{\partial L}{\partial \varphi^k_x} + \xi_x\, L, \quad T^y = A^k \frac{\partial L}{\partial \varphi^k_y} + \xi_y\, L, \quad T^z = A^k \frac{\partial L}{\partial \varphi^k_z} + \xi_z\, L,$$

$$A^k = \xi^k_\varphi - \varphi^k_x\, \xi_x - \varphi^k_y\, \xi_y - \varphi^k_z\, \xi_z, \quad k = 1, \ldots, m.$$

3. Приложения теории инвариантных вариационных задач

Эта теория применяется для конструирования законов сохранения различных физических процессов, допускающих вариационную формулировку, когда уравнения, описывающие некоторый физический процесс, можно рассматривать как уравнения Эйлера для некоторого специальным способом построенного функционала (принципы Гамильтона, Кастелиано, Глансдорфа – Пригожина и др.). В этом направлении в мировой литературе представлено много интересных и важных результатов (например, [11, 12]).

Другое направление связано с применением этой теории к проблеме оптимизации систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Здесь публикаций немного. Среди зарубежных работ нам известна только одна [13], которая посвящена проблеме построения первого интеграла для уравнений принципа максимума Понтрягина в случае отсутствия ограничений на управление и в которой инвариантность функционала понималась в дивергентном смысле.

В России, по-видимому, первой публикацией, связанной с привлечением теории Нетер к решению оптимальных задач математической физики, явилась работа

[14], где был найден первый интеграл для уравнений Эйлера – Лагранжа в задаче оптимального уравнения пограничным слоем несжимаемой жидкости (впервые поставленной в 1969 г. Т.К. Сиразетдиновым [15]).

Позднее были исследованы следующие задачи [16–19]:

• решена задача по минимизации трения в потоке вязкой несжимаемой жидкости;

• поставлена и решена задача оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое в сверхзвуковых потоках газа в плоском и осесимметричном случаях;

• поставлена и решена задача минимизации конвективного теплового потока в пограничном слое электропроводящего газа при наличии магнитного поля;

• получены первые интегралы и в других оптимальных задачах аэрогазодинамики: в задаче управления трением на проницаемом крыле бесконечного большого размаха, обтекаемом под углом скольжения несжимаемой жидкости, и на проницаемом теле вращения, обтекаемом несжимаемой жидкостью под нулевым углом атаки; в задаче оптимизации тепломассообмена в пограничном слое диссоциирующего газа в плоском случае; в задаче построения оптимального плоского контура в сверхзвуковом потоке.

Поставлена и решена задача о минимизации трения на круговом цилиндре в сверхзвуковом потоке газа. Отметим также, что в работе [20] аналог классической теоремы Нетер получен для динамических систем с управлением, что позволило найти условие декомпозиции такого рода систем. В [21, 22] использование понятия L^*-инвариантности позволило найти новый первый интеграл соотношений принципа максимума Понтрягина в задаче оптимизации систем с сосредоточенными параметрами.

В работе [10] показана возможность использования конформной инвариантности оптимального процесса для построения точных решений уравнения Беллмана в проблеме синтеза оптимального управления.

Более подробно с модифицированной теорией инвариантных вариационных задач и ее приложениями можно ознакомиться по работам [10, 23].

Summary

K.G. Garaev. Theory of Invariant Variational Problems and Its Applications.

A brief review of the works on the modified theory of invariant variational problems and its applications, developed by the author, is presented. The research is based on the infinitesimal Li–Ovsyannikov formalism and E. Noether's fundamental idea of invariant functionals. Theorems on generalized invariance are proved, and the application of the developed theory to the solution of optimal problems of mathematical physics is discussed.

Keywords: Lee group, integral invariant, functional invariance, Noether's generalized theorem, Pontryagin's maximum principle, Bellman's equation.

Литература

1. *Lie S.* Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Korollar der Theorie der Differentialinvariante // Leipz. Berich. – 1897. – H. III. – S. 342–357.

2. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Konig. Gesell. Wissen. Gottingen, Math.-Phys. Kl. – 1918. – S. 235–257. = *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики: Сб. ст. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 611–630.

3. *Визгин В.П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. – М.: Наука, 1979. – 239 с.

4. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaltungssatze der Elektrodynamik // Matn. Ann. – 1921. – Bd. 84. – S. 258–276.

5. *Steudel H.* Eine Erweiterung des ersten NOETHERschen Satzes // Zeitschrift Naturforschung Teil A. – 1962. – Bd. 17. – S. 133–135.

6. *Гараев К.Г.* Замечание к теории Нетер // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 5. – С. 69–71.

7. *Ибрагимов Н.Х.* Инвариантные вариационные задачи и их законы сохранения // Теор. и матем. физика. – 1969. – Т. 1, № 3. – С. 350–359.

8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

9. *Garaev K.G.* On the problem of modified theory of invariant variation problems construction // Geometry and Topology of Submanifolds IX. – 1999. – P. 139–147.

10. *Гараев К.Г.* Группы Ли и теория Нетер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1994. – 240 с.

11. *Шмутцер Э.* Основные принципы классической механики и теории поля. – М.: Мир, 1976. – 158 с.

12. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 445 с.

13. *Djukic D.S.* Noether's theorem for optimum control systems // Int. J. Control. – 1973. – V. 18, No 3. – P. 667–672.

14. *Гараев К.Г.* Об инвариантных вариационных задачах // Материалы I Поволжской конф. по автоматическому управлению. – Казань: Таткнигоиздат, 1971. – С. 121–129.

15. *Сиразетдинов Т.К., Диваков О.Г.* Оптимальное управление пограничным слоем // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1969. – № 3. – С. 5–13.

16. *Гараев К.Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

17. *Гараев К.Г., Овчинников В.А.* Инвариантные краевые задачи оптимально управляемого пограничного слоя // Прикл. механика и техн. физика. – 2003. – Т. 44, № 1. – С. 33–38.

18. *Гараев К.Г., Овчинников В.А., Бильченко Н.Г.* Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения. – Казань: Изд-во КГТУ-КАИ, 2003. – 122 с.

19. *Гараев К.Г., Кузнецов В.К.* Об одной инвариантной вариационной задаче ламинарного пограничного слоя // Прикл. матем. и механика. – 2011. – Т. 75, Вып. 4. – С. 572–580.

20. *Бабичев А.В.* Инвариантность фазового портрета и аналог теоремы Нетер для динамических систем с управлением // Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по управлению в механических системах. – Львов: Ин-т прикл. проблем механики и математики АН УССР, 1988. – С. 13.

21. *Гараев К.Г.* Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимизации динамических систем с управлением // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 9. – С. 49–56.

22. *Garaev K.G.* Remark on the Bellman principle of Optimality // Journal of the Franklin Institute. – 1998. – V. 335, No 2. – P. 395–400.

23. *Гараев К.Г.* Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимального управления. – Казань: Изд-во КГТУ-КАИ, 2005. – 152 с.

Поступила в редакцию
18.12.13

Гараев Кавас Гараевич – доктор физико-математических наук, декан физико-математического факультета, заведующий кафедрой специальной математики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *sm@kai.ru*