Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

А.Н.Углов

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. РЯДЫ

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения
по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров*

**Набережные Челны
2024**

УДК 51 (076)

Углов А.Н.
Кратные интегралы. Теория поля. Ряды. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров. - Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2024, 50 с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

Учебно-методические пособие включает в себя разделы математики: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля, числовые и функциональные ряды.

В учебно-методическом пособии изложены цель и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену (зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

УДК 51 (076)

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Кратные интегралы. Теория поля. Ряды» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы. Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: теоретические основы теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, теории поля, числовых и функциональных рядов;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, теории поля, числовых и функциональных рядов; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка основной и дополнительной литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ, зачётов и экзаменов.

2. Содержание и структура дисциплины.

2.1. Содержание дисциплины (наименование и номера тем).

Раздел. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Тема. Двойные интегралы.
Определение двойного интеграла, условия его существования, геометрический смысл, свойства. Оценка двойного интеграла и формула среднего значения. Понятие элементарной (правильной) области. Повторные интегралы по элементарным областям. Вычисление двойных интегралов переходом к повторным в декартовых координатах. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойных интегралов.

Тема. Тройные интегралы.
Определение тройного интеграла, условия его существования, физический смысл, свойства. Оценка тройного интеграла и формула среднего значения. Понятие элементарной (правильной) области. Повторные интегралы по элементарным областям. Вычисление тройных интегралов переходом к повторным в декартовых координатах. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройных интегралов.

Тема. Криволинейные интегралы.
Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, существование, вычисление, свойства и применение. Задача определения работы переменной силы на криволинейном пути. Криволинейный интеграл 2-го рода: определение, существование, вычисление, свойства и применение. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от полного дифференциала. Формула Ньютона-Лейбница. Нахождение функции по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Тема. Поверхностные интегралы.
Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, существование, вычисление, свойства и применение. Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, существование, вычисление, свойства и применение.

Раздел. ТЕОРИЯ ПОЛЯ.

Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению и градиент, связь между ними. Векторное поле. Векторные линии и трубки. Дифференциальные уравнения векторных линий. Поток вектора и дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса и её применение для вычисления поверхностных интегралов. Формула для вычисления дивергенции в декартовой системе координат. Циркуляция и ротор векторного поля, их физический смысл. Формула Стокса и её применение к вычислению криволинейных интегралов. Соленоидальное и потенциальное векторные поля, их свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода в потенциальном поле. Операторы Гамильтона и Лапласа. Гармонические функции и гармонические поля.

Раздел. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Тема. Числовые ряды.

Определение числового ряда. Частичная сумма, остаток, сумма ряда. Сходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости, достаточный признак расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов (почленное сложение рядов, умножение ряда на число, отбрасывание конечного числа членов ряда). Знакоположительные числовые ряды. Ряд геометрической прогрессии и обобщённый гармонический ряд, условия их сходимости, расходимости. Признаки сравнения. Признак Даламбера и радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряды, сходящиеся абсолютно и условно, их свойства. Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница. Оценка суммы и остатка ряда.

Тема. Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Определение функционального ряда. Частичная сумма, остаток, точка и область сходимости, сумма функционального ряда. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций. Применение степенных рядов для вычисления значений функций и определённых интегралов. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

3. Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Бермант А.Ф. Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа : учебное пособие / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. - 16-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 736 с. - ISBN 978-5-8114-0499-5. - URL: https://e.lanbook.com/book/2660.

2. Гаврилов В. Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов /Гаврилов В.Р. , Иванова Е.Е., Морозова В.Д. - Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. - 496 с. (Серия "Математика в техническом университете". Выпуск VII) -ISBN 978-5-7038-3190-8.-URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785703831908.html
3. Задачник по высшей математике для вузов [Текст] : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова .- 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - Москва : Айрис-пресс, 2011. - 608 с : граф. - (Высшее образование). - Прил.: с. 599-603. - В пер. - ISBN 978-5-8112-4351-8.
5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: учебник /Г.М. Фихтенгольц. - 11-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2020. - Часть 2. - 2020. - 464 с. - ISBN 978-5-8114-5339-9. - URL: https://e.lanbook.com/book/139262.

Дополнительная литература:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть 2: -М: Высшая школа, 2008. -416с.
2. Жукова Г. С. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 2: учебное пособие / Г. С. Жукова, М. Ф. Рушайло. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 544 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015965-2. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072162 .
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу : учебное пособие / Г. И. Запорожец. - 8-е изд.,стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 464 с. - ISBN 978-5-8114-0912-9. - URL: https://e.lanbook.com/book/149
4. Курс высшей математики: кратные интегралы, векторный анализ : лекции и практикум : учебное пособие / [авт. кол.: Н. В. Гуличев и др.] ; под ред. И. М. Петрушко .- 3-е изд., стер .- Санкт-Петербург : Лань, 2008 .- 318 с : ил. - (Учебники для вузов : специальная литература) .- Рек. МО .- В пер .- Библиогр.: с. 313 .- ISBN 978-5-8114-0727-9.
5. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)

4. Методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить индивидуальную контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

Раздел. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

1-10. Изменить в повторных интегралах порядок интегрирования (изобразить область интегрирования):

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

3. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_x^0 f(x,y)dy$

4. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$

6. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$

8. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

9. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

10. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

11-20. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

11. $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy$, $\quad D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

12. $\iint\limits_D (7x^2 + y)dxdy$, $\quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=2\sqrt{x}$

13. $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy$, $\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

14. $\iint\limits_D 12xdxdy$, $\quad D:\ x+y=2,\ x=0,\ x=\sqrt{y}$

15. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $\quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=15x$

16. $\iint\limits_D 30ydxdy$, $\quad D:\ x=0,\ x=\sqrt{y},\ x^2+y^2=2$

17. $\iint\limits_D xydxdy$, $\quad D:\ y=x^2,\ y^2=x$

18. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $\quad D:\ x=2,\ y=x,\ y=\frac{1}{x}$

19. $\iint\limits_D \left(1+\frac{\sqrt{x}}{3}\right)dxdy$, $\quad D:\ y=\frac{5x}{3},\ y=5\sqrt{x}$

20. $\iint\limits_D (3-x)dxdy$, $\quad D:\ x=3,\ y=\sqrt{3x},\ y=6\sqrt{3x}$

21-30. Найти среднее значение непрерывной в области D, ограниченной указанными линиями, функции $f(x,y)$:

21 а) $f(x,y)=y\sin(xy)$ $\quad D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$.

22 а) $f(x,y)=y\cos(xy)$ $\quad D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$.

23 а) $f(x,y)=4ye^{2xy}$ $\quad D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/2,\ x=1$

24 а) $f(x,y)=y^2\cos(xy/2)$ $\quad D:\ y=\sqrt{\pi/2},\ y=x/2,\ x=0.$

25 а) $f(x,y)=y\cos(2xy)$ $\quad D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1/2,\ x=1$

26 а) $f(x,y)=y\sin(2xy)$ $\quad D: y=\pi/2, y=3\pi/2, x=1/2, x=3.$

27 а) $f(x,y)=8ye^{4xy}$ $\quad D:\ y=\ln 3, y=\ln 4, x=1/4, x=1/2$

28 а) $f(x,y)=3x+6y^2$ $\quad D:\ y=0,\ y^2=x,\ x=1\ (y\ge 0)$

29 а) $f(x,y)=7x^2+2y$ $\quad D:\ y=0,\ y^2=4x,\ x=1\ (y\ge 0)$

30 а) $f(x,y)=4x+9y^2$ $\quad D:\ x=1/2,\ y=0,\ y^2=x\quad (y\ge 0)$

31-40. Найти площадь (с помощью двойного интеграла) фигуры D, ограниченной указанными линиями:

31. $y=\dfrac{3}{x}, y=8\cdot e^x, y=3, y=8$

32. $x=8-y^2,\quad x=-2y$

33. $x=27-y^2,\quad x=-6y$

34. $y=\dfrac{1}{x}, y=6\cdot e^x, y=1, y=6$

35. $y=\sqrt{x},\quad y=1/x,\quad x=16$

36. $y=11-x^2,\quad y=-10x$

37. $y=\sin x, y=\cos x, x=0\ (x\ge 0)$

38. $y=\dfrac{2}{x}, y=5\cdot e^x, y=2, y=5$

39. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2},\quad y=\dfrac{3}{2x},\quad x=9$

40. $x=5-y^2,\quad x=-4y$

Раздел. Теория поля.

41 – 50. Найти градиент скалярного поля $grad\, u$ и его величину $|grad\, u|$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

41. $u=x+\ln(z^2+y^2)$, $\quad M_0(2,1,1)$

42. $u=y\ln(1+x^2)-arctgz$, $\quad M_0(0,1,1)$

43. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$, $M_0(1{,}3{,}2)$

44. $u=xy-\dfrac{x}{z}$, $M_0(-4{,}3{,}-1)$

45. $u=z^2+2arctg(x-y)$, $M_0(1{,}2{,}-1)$

46. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$, $M_0(1{,}1{,}0)$

47. $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$, $M_0(1{,}-3{,}4)$

48. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$, $M_0(1{,}1{,}2)$

49. $u=\ln(x^2+y^2)+xyz$, $M_0(1{,}-1{,}2)$

50. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $M_0(1{,}1{,}1)$

51-60. Найти производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ скалярного поля $u=f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$;

51. $u=x+\ln(z^2+y^2)$, $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(2{,}1{,}1)$

52. $u=y\ln(1+x^2)-arctgz$, $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(0{,}1{,}1)$

53. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$, $\vec{l}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(1{,}3{,}2)$

54. $u=xy-\dfrac{x}{z}$, $\vec{l}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(-4{,}3{,}-1)$

55. $u=z^2+2arctg(x-y)$, $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(1{,}2{,}-1)$

56. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$, $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(1{,}1{,}0)$

57. $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$, $\vec{l}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M_0(1{,}-3{,}4)$

58. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$, $\vec{l}=5\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{5}\vec{k}$, $M_0(1{,}1{,}2)$

59. $u=\ln(x^2+y^2)+xyz$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $M_0(1{,}-1{,}2)$

60. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M_0(1{,}1{,}1)$

Раздел. Числовые и функциональные ряды.

61-70. Исследовать на сходимость числовой ряд, используя предельный признак сравнения с обобщённым гармоническим рядом.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}}{9n}$ **62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^3-1}$ **63.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^2+5n}{9n^2-n}$ **65.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ **66.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-1}$ **68.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{\sqrt{n^3+8n}}$ **69.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+\sqrt{n}}$

71-80. Исследовать на сходимость числовой ряд:
а) используя признак Даламбера;
б) используя радикальный признак Коши.

71. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n(n-1)!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$

72. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$

73. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^3}{(n+1)!}$ **б)** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{n-1}\right)^n$

74. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{2^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

75. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2^n(3n+5)}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

76. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$

77. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n^2}{(n+2)!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$

78. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$

79. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{(2n)!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

80. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n (n+1)^2}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

81-90. Найти интервал, радиус и область сходимости степенного ряда:

81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}$ **82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$ **83.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3 (x+3)^n}{n+1}$

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+7)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ **85.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$ **86.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n^3 \cdot 4^n}$

87. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n \cdot 3^n}$ **88.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-6)^n}{(n+2) \cdot 3^n}$ **89.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{2n}}{n \cdot 4^n}$

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$

91-100. Найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

91. $y = \dfrac{1}{3+6x}$, $x_0 = 0$ **92.** $y = \dfrac{1}{2-x}$, $x_0 = 0$

93. $y = \dfrac{x}{3-x}$, $x_0 = 2$ **94.** $y = xe^x$, $x_0 = 0$

95. $y = \sin^2 x$, $x_0 = 0$ **96.** $y = e^{3x}$, $x_0 = 0$

97. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$ **98.** $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$

99. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$ **100.** $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

Раздел. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

1. Двойной интеграл как предел интегральной суммы, условие его существования и геометрический смысл. Задача о вычислении объёма цилиндрического тела.
2. Основные свойства двойного интеграла. Оценивание двойного интеграла. Формула среднего значения.
3. Понятие элементарной (правильной) области в направлении координатных осей Ox, Oy. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному интегрированию.
4. Замена переменных интегрирования в двойном интеграле. Полярные координаты. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
5. Вычисление площади плоской фигуры и объёма цилиндрического тела с помощью двойного интеграла.
6. Механические приложения двойных интегралов. Вычисление массы, статических моментов, моментов инерции, координат центра тяжести плоской пластинки.
7. Тройной интеграл как предел интегральной суммы, условие его существования. Задача о вычислении массы неоднородного тела.
8. Основные свойства тройного интеграла. Оценивание тройного интеграла. Формула среднего значения.
9. Понятие элементарной (правильной) области в направлении координатных осей Ox, Oy, Oz. Вычисление тройного интеграла сведением к повторному интегрированию.
10. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
11. Вычисление объёма тела с помощью тройного интеграла.
12. Механические приложения тройных интегралов. Вычисление массы, статических моментов, моментов инерции, координат центра тяжести объемного тела.
13. Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение, условие существования, основные свойства, вычисление.
14. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение, условие существования, основные свойства, вычисление. Теорема о независи-

мости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

15. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от полного дифференциала. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Приложения криволинейных интегралов. Задача определения работы переменной силы на криволинейном пути. Формула Грина для односвязных и многосвязных областей. Нахождение функции по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.
17. Поверхностные интегралы 1-го. Определение, условие существования, основные свойства, вычисление.
18. Поверхностные интегралы 2-го. Определение, условие существования, основные свойства, вычисление.

Раздел. Теория поля.

19. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению и градиент, связь между ними.
20. Векторное поле. Векторные линии и трубки. Дифференциальные уравнения векторных линий.
21. Поток вектора и дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса и её применение для вычисления поверхностных интегралов. Формула для вычисления дивергенции в декартовой системе координат.
22. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса и её применение к вычислению криволинейных интегралов. Ротор векторного поля. Физический смысл циркуляции и ротора векторного поля.
23. Специальные виды векторных полей. Соленоидальное и потенциальное векторные поля и их свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода в потенциальном поле.
24. Операторы Гамильтона и Лапласа. Гармонические функции и гармонические поля.

Раздел. Числовые и функциональные ряды.

25. Определение числового ряда (ЧР). Частичная сумма и остаток ряда. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды.
26. Основные свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости ряда.
27. Достаточные признаки сравнения (классический и предельный) сходимости рядов с положительными членами.

28. Эталонные числовые ряды (геометрический и обобщённый гармонический), условия их сходимости и расходимости.
29. Достаточные признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами, условия их применимости.
30. Знакочередующийся числовой ряд. Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда и его остатка. Вычисление суммы знакочередующегося ряда с заданной степенью точности ε ?
31. Знакопеременный числовой ряд. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды, их свойства. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
32. Определение функционального ряда (ФР). Частичная сумма, остаток, точка сходимости, область определения и область сходимости ФР. Сумма функционального ряда.
33. Равномерная сходимость ФР. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование. Абсолютно сходящиеся ФР.
34. Определение степенного ряда. Признак Абеля. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.
35. Ряды Тейлора и Маклорена. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций. Применение степенных рядов для вычисления значений функций и определённых интегралов. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

Раздел. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

1-10. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах (изобразить область интегрирования):

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy .$$

Повторным интегралом называют: **1)** интеграл вида $\int_{a}^{b} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по области $D=\left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{matrix}\right\}=D_y$, называемой элементарной в направлении оси Oy, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ -непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением; **2)** интеграл вида $\int_{c}^{d} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ по области $D=\left\{\begin{matrix} \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \\ c \le y \le d \end{matrix}\right\}=D_x$, называемой элементарной в направлении оси Ox, где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ -непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением.

При изменении порядка интегрирования в повторных интегралах:

1) Если $D=D_y$ и $D \ne D_x$, то область D прямыми, параллельными оси Ox, разбивают на части $D_{1x}, D_{2x}, \ldots$, такие, чтобы $D_y = D_{1x} \cup D_{2x} \cup \ldots$. При этом повторный интеграл по области D_y представляют в виде суммы повторных интегралов по областям $D_{1x}, D_{2x}, \ldots$.

2) Если $D=D_x$ и $D \ne D_y$, то область D прямыми, параллельными оси Oy, разбивают на части $D_{1y}, D_{2y}, \ldots$, такие, чтобы $D_x = D_{1y} \cup D_{2y} \cup \ldots$. При этом повторный интеграл по области D_x представляют в виде суммы повторных интегралов по областям $D_{1y}, D_{2y}, \ldots$.

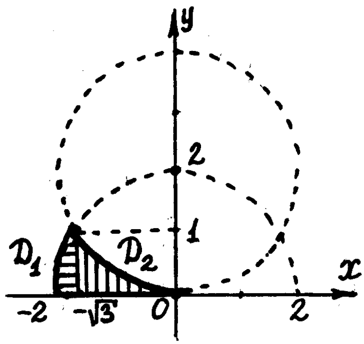
Решение.

1) Представим области интегрирования D_1 и D_2, являющиеся элементарными в направлении оси Oy для каждого из данных повторных интегралов, в виде $D_1 = D_{1y}$ и $D_2 = D_{2y}$:

$$D_1 = D_{1y} = \left\{ \begin{array}{l} -2 \le x \le -\sqrt{3} \\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}, \quad D_2 = D_{2y} = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{3} \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 2-\sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}.$$

2) Изобразим на одном рисунке области интегрирования D_1 и D_2.

Очевидно, что $D_1 \cup D_2 = D$.



3) Представим D в виде D_x - элементарной области в направлении оси Ox:

$$D = D_x = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{4-y^2} \le x \le -\sqrt{4-(y-2)^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{array} \right\}.$$

4) Запишем повторный интеграл для функции $f(x, y)$ по области $D = D_x$:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x, y)dx.$$

Таким образом, изменив порядок интегрирования, получим:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x, y)dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)dx$.

Неявное уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ с центром в точке (a,b) и радиусом r представляют явными уравнениями:

$$\begin{cases} y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2} - \textit{верхняя половина окружности} \\ y=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2} - \textit{нижняя половина окружности} \end{cases}$$

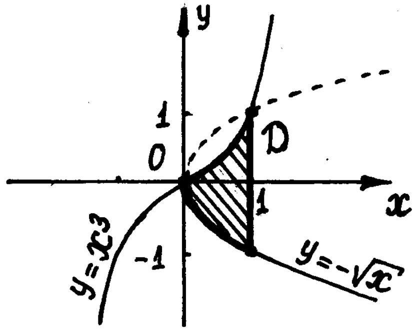
$$\begin{cases} x=a+\sqrt{r^2-(y-b)^2} - \textit{правая половина окружности} \\ x=a-\sqrt{r^2-(y-b)^2} - \textit{левая половина окружности} \end{cases}$$

11-20. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$ по области D, ограниченной линиями: $x=0,\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

Если $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\end{matrix}\right\}=D_y$, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. Если $D=\left\{\begin{matrix}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y) \\ c\le y\le d\end{matrix}\right\}=D_x$ где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ -непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

Решение.

1) Изобразим область интегрирования D:



2) Представим D в виде D_y: $D = D_y = \left\{ \begin{matrix} 0 \le \quad x \le 1 \\ -\sqrt{x} \le y \le x^3 \end{matrix} \right\}$.

Если $D \ne D_y$ или $D \ne D_x$, то область D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом двойной интеграл по области D находят как сумму двойных интегралов по её элементарным частям.

3) Вычислим двойной интеграл:

$$\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dy.$$

В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной y, считая переменную x постоянной величиной:

$$\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)dy = 54x^2 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} y^2dy + 150x^4 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} y^4dy =$$

$$= 54x^2\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3} + 150x^4\left(\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3} = 18x^2\left(x^9 + x^{\frac{3}{2}}\right) + 30x^4\left(x^{15} + x^{\frac{5}{2}}\right) =$$

$$= 18x^{11} + 18x^{\frac{7}{2}} + 30x^{19} + 30x^{\frac{13}{2}}.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменной x:

$$\int_0^1\left(18x^{11}+18x^{\frac{7}{2}}+30x^{19}+30x^{\frac{13}{2}}\right)dx=\left(18\frac{x^{12}}{12}+18\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+30\frac{x^{20}}{20}+30\frac{x^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

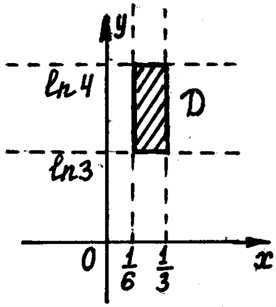
$$=\frac{18}{12}+\frac{36}{9}+\frac{30}{20}+\frac{60}{15}=\frac{3}{2}+4+\frac{3}{2}+4=11.$$

Ответ: $\iint\limits_D\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=11.$

21-30. Найти среднее значение непрерывной функции $f(x,y)=12y\cdot e^{6xy}$ в области D, ограниченной линиями: $y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/6,\ x=1/3$.

> Среднее значение f_{cp} функции $z=f(x,y)$ непрерывной в области D находится по формуле: $f_{cp}=\dfrac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $S_D=\iint\limits_D dxdy$ - площадь области D.

Решение.
1) Изобразим область D:



2) Представим D в виде D_x: $D=D_x=\left\{\begin{matrix}1/6\le x\le 1/3\\ \ln 3\le y\le \ln 4\end{matrix}\right\}$.

> Если $D=D_y$ и $D=D_x$, то при выборе формулы для вычисления двойного интеграла через повторный интеграл, следует учитывать вид подынтегральной функции $f(x,y)$ и выбирать такую формулу, для которой вычисления будут наиболее простыми. В данном случае следует выбрать формулу, в которой повторный интеграл записывается для области D_x.

3) Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_x} 12ye^{6xy}dxdy$:

$$\iint\limits_{D_x} 12ye^{6xy}dxdy = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} 12ye^{6xy}dx .$$

В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной x, считая переменную y постоянной величиной:

$$\int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx = 12y\int\limits_{1/6}^{1/3} e^{6xy}dx = 12y\cdot\left(\frac{1}{6y}e^{6xy}\right)\Bigg|_{1/6}^{1/3} = 2(e^{2y}-e^{y}) .$$

Затем вычислим внешний интеграл по переменной y :

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} 2\left(e^{2y}-e^{y}\right)dy = 2\left(\frac{e^{2y}}{2}-e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-e^{\ln 4}+e^{\ln 3}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 16-\frac{1}{2}\cdot 9-4+3\right)=5 .$$

4) Вычислим площадь области D: $S_D = \iint\limits_{D_x} dxdy = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} dx$. В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной x, считая переменную y постоянной величиной: $\int\limits_{1/6}^{1/3} dx = (x)\Big|_{1/6}^{1/3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$. Затем вычислим внешний интеграл по переменной y :

$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4}\left(\frac{1}{6}\right)dy = \frac{1}{6}y\Big|_{\ln 3}^{\ln 4} = \frac{1}{6}(\ln 4-\ln 3)=\frac{1}{6}\ln\frac{4}{3}$. Таким образом $S_D = \frac{1}{6}\ln\frac{4}{3}$.

Если область D представляет собой классическую фигуру (прямоугольник, треугольник, круг,…), то её площадь можно найти по известным для таких фигур формулам. В данном примере D - прямоугольник, площадь которого $S_D = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot(\ln 4-\ln 3)=\frac{1}{6}\ln\frac{4}{3}$.

5) Найдём среднее значение функции:

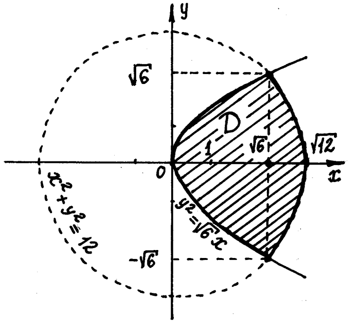
$$f_{cp} = \frac{1}{S_D} \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \frac{5}{\frac{1}{6}\ln(4/3)} = \frac{30}{\ln(4/3)}.$$

Ответ: $f_{cp} = \dfrac{30}{\ln(4/3)}$.

31-40. Найти площадь (с помощью двойного интеграла) фигуры D, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 12, \quad x\sqrt{6} = y^2 \quad (x \ge 0)$.

Решение.

1) Изобразим фигуру D:



2) Представим D в виде D_x.

В направлении оси Oy область D элементарной не является, т.е. $D \ne D_y$. Если $D \ne D_y$ и $D \ne D_x$, то фигуру D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом площадь фигуры D находят как сумму площадей её частей.

С этой целью составим систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ \sqrt{6}x = y^2 \end{cases}$ и найдем ординаты точек пересечения окружности с параболой. Для этого, исключив переменную x, получим уравнение относительно переменной y: $y^4 + 6y^2 - 72 = 0$. Решив данное уравнение, найдём $y_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Таким образом: $y_1 = -\sqrt{6}$, $y_2 = \sqrt{6}$ - ординаты точек пересечения окружности с параболой. Тогда $D = D_x = \left\{ \begin{matrix} y^2/\sqrt{6} \le x \le \sqrt{12-y^2} \\ -\sqrt{6} \le \ y \le \ \sqrt{6} \end{matrix} \right\}$.

3) Вычислим площадь фигуры D: $S_D = \iint\limits_{D_x} dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}} dx$ **.**

В повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл по переменной x, считая переменную y постоянной величиной:

$$\int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = (x)\Big|_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} = \sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}}.$$

Затем вычислим внешний интеграл по переменной y:

$$\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}}\right) dy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}\, dy - \frac{1}{\sqrt{6}} \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y^2 dy .$$

Так как $\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}\, dy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \sqrt{(\sqrt{12})^2 - y^2}\, dy = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 21 \end{bmatrix} =$

$$= \left(\frac{(\sqrt{12})^2}{2} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{12}}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{(\sqrt{12})^2 - y^2} \right)\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} =$$

$$= \left(6\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{12}}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{12-y^2} \right)\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = \left(6\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{6} \right) -$$

$$- \left(6\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{6} \right) = 6\cdot\frac{\pi}{4} + 3 + 6\cdot\frac{\pi}{4} + 3 = 3\pi + 6;$$

$\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y^2 dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = \left(\frac{6\sqrt{6}}{3} - \left(-\frac{6\sqrt{6}}{3}\right)\right) = 4\sqrt{6}$, то $\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}}\right) dy =$

$= 3\pi + 6 - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 4\sqrt{6} = 3\pi + 2$. Тогда $S_D = 3\pi + 2$.

Ответ: $S_D = 3\pi + 2$.

Раздел. Теория поля.

41 – 50. Найти градиент скалярного поля $grad\,u$ и его величину $|\,grad\,u\,|$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если: $u = \ln(x + y^2 + z^3)$, $M_0(1,2,1)$.

Градиент $grad\,u$ скалярного поля $u = f(x, y, z)$ находится по формуле $grad\,u = u'_x\,\vec{i} + u'_y\,\vec{j} + u'_z\,\vec{k} = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$.

Решение.

1) Находим первые частные производные функции $u = \ln(x + y^2 + z^3)$**:**

$$u'_x = (\ln(x + y^2 + z^3))'_x = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_x = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t} \cdot t'_x =$$

$$= \frac{(x + y^2 + z^3)'_x}{x + y^2 + z^3} = \frac{(x)'_x + (y^2)'_x + (z^3)'_x}{x + y^2 + z^3} = \frac{1 + 0 + 0}{x + y^2 + z^3} = \frac{1}{x + y^2 + z^3};$$

$$u'_y = (\ln(x + y^2 + z^3))'_y = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_y = (\ln t)'_t \cdot t'_y = \frac{1}{t} \cdot t'_y =$$

$$= \frac{(x + y^2 + z^3)'_y}{x + y^2 + z^3} = \frac{(x)'_y + (y^2)'_y + (z^3)'_y}{x + y^2 + z^3} = \frac{0 + 2y + 0}{x + y^2 + z^3} = \frac{2y}{x + y^2 + z^3};$$

$$u'_z = (\ln(x + y^2 + z^3))'_z = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_z = (\ln t)'_t \cdot t'_z = \frac{1}{t} \cdot t'_z =$$

$$= \frac{(x + y^2 + z^3)'_z}{x + y^2 + z^3} = \frac{(x)'_z + (y^2)'_z + (z^3)'_z}{x + y^2 + z^3} = \frac{0 + 0 + 3z^2}{x + y^2 + z^3} = \frac{3z^2}{x + y^2 + z^3}.$$

2) Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1,2,1)$:

$$u'_x(M_0) = \frac{1}{1 + 2^2 + 1^3} = \frac{1}{6},\ u'_y(M_0) = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2 + 1^3} = \frac{4}{6},\ u'_y(M_0) = \frac{3 \cdot 1^2}{1 + 2^2 + 1^3} = \frac{3}{6}$$

3) Находим значение градиента скалярного поля $grad\,u$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$gradu(M_0) = \frac{1}{6} \cdot \vec{i} + \frac{4}{6} \cdot \vec{j} + \frac{4}{6} \cdot \vec{k} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

4) Вычисляем $|\,grad\,u\,|$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$|\,gradu(M_0)\,| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 16 + 16}{6^2}} = \frac{\sqrt{33}}{6}.$$

Ответ: $gradu(M_0)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $|\,gradu(M_0)\,|=\frac{\sqrt{33}}{6}$.

51 – 60. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ скалярного поля $u=f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению вектора $\vec{\ell}$, если:

$u=\ln(x+y^2+z^3)$**,** $\vec{\ell}=2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$**,** $M_0(1{,}2{,}1)$**.**

Производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ скалярного поля $u=f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{\ell}=\ell_x\vec{i}+\ell_y\vec{j}+\ell_z\vec{k}$ находится по формуле $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma$, где $\cos\alpha=\frac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\beta=\frac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\gamma=\frac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}$, $|\vec{\ell}|=\sqrt{\ell_x^2+\ell_y^2+\ell_z^2}$.

Решение.

1) Находим первые частные производные функции $u=\ln(x+y^2+z^3)$**:**

$$u'_x=(\ln(x+y^2+z^3))'_x=\left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_x=(\ln t)'_t\cdot t'_x=\frac{1}{t}\cdot t'_x=$$

$$=\frac{(x+y^2+z^3)'_x}{x+y^2+z^3}=\frac{(x)'_x+(y^2)'_x+(z^3)'_x}{x+y^2+z^3}=\frac{1+0+0}{x+y^2+z^3}=\frac{1}{x+y^2+z^3};$$

$$u'_y=(\ln(x+y^2+z^3))'_y=\left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_y=(\ln t)'_t\cdot t'_y=\frac{1}{t}\cdot t'_y=$$

$$=\frac{(x+y^2+z^3)'_y}{x+y^2+z^3}=\frac{(x)'_y+(y^2)'_y+(z^3)'_y}{x+y^2+z^3}=\frac{0+2y+0}{x+y^2+z^3}=\frac{2y}{x+y^2+z^3};$$

$$u'_z=(\ln(x+y^2+z^3))'_z=\left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_z=(\ln t)'_t\cdot t'_z=\frac{1}{t}\cdot t'_z=$$

$$=\frac{(x+y^2+z^3)'_z}{x+y^2+z^3}=\frac{(x)'_z+(y^2)'_z+(z^3)'_z}{x+y^2+z^3}=\frac{0+0+3z^2}{x+y^2+z^3}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}.$$

2) Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1{,}2{,}1)$:

$$u'_x(M_0)=\frac{1}{1+2^2+1^3}=\frac{1}{6},\ u'_y(M_0)=\frac{2\cdot 2}{1+2^2+1^3}=\frac{4}{6},\ u'_y(M_0)=\frac{3\cdot 1^2}{1+2^2+1^3}=\frac{3}{6}$$

3) Вычисляем направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}=(2,4,4)$:

$$|\vec{\ell}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6,\ \cos\alpha=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

4) Вычисляем значение $\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}(M_0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1+8+6}{18}=\frac{15}{18}.$$

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}(M_0)=\frac{15}{18}$.

Раздел. Числовые и функциональные ряды.

61-70. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}$, используя предельный признак сравнения с обобщённым гармоническим рядом.

> Если общий член u_n числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ представляет собой отношение многочленов или алгебраических функций относительно аргумента n, то исследование его на сходимость следует выполнять, используя предельный признак сравнения, где в качестве ряда сравнения выбирают обобщённый гармонический ряд.

Решение.

Так как общий член u_n данного ряда представляет собой отношение алгебраических функций относительно аргумента n, то исследуем его на сходимость с помощью предельного признака сравнения с обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где p - любое действительное число. При $p>1$ ряд сходится, при $p\le 1$ - ряд расходится.

Используем для исследования на сходимость предельный признак сравнения. В качестве ряда сравнения выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, который сходится, как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ с показателем степени $p = 3/2 > 1$.

При выборе в качестве ряда сравнения обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ руководствуются следующим, если $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{A}{n^p}\right)$, где $A \neq 0$ - некоторое число, то ряд сравнения имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Тогда, по предельному признаку сравнения, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n^{3/2}}{10n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{10n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{10} \neq 0,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ или одновременно сходятся, или одновременно расходятся. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}$ также сходится.

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{10n^2+1}$ сходится по предельному признаку сравнения.

При исследовании рядов на сходимость следует иметь в виду следующие предельные значения функций: $\ln(+0) = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$, $arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & при \quad a > 1 \\ 0 & при \quad 0 < a < 1 \end{cases}$, $a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & при \quad a > 1 \\ +\infty & при \quad 0 < a < 1 \end{cases}$, а также известные пределы: $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$ ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$), $\lim_{n\to\infty}(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0 & \text{если } k<m\\ a_0/b_0 & \text{если } k=m\\ \infty & \text{если } k>m\end{cases},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.72$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

71-80. Исследовать на сходимость:

а) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n\text{-}2)}{(2n)!}$, используя признак Даламбера;

б) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\cdot arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$, используя радикальный признак Коши.

Если в выражение общего члена u_n числового ряда входят: $n!$, a^n, то для исследования его на сходимость следует применить признак Даламбера. Если выражение для u_n можно представить в виде $u_n=f(n)=(g(n))^n$, то для исследования ряда на сходимость следует применить радикальный признак Коши.

Решение.

а) Данный ряд исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$, где

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1)}{(2n+2)!}\right)}{\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n)!}\right)}=\frac{(1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1))\cdot(2n)!}{(1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2))\cdot(2n+2)!}.$$

В полученном для $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ выражении выполним преобразование с факториалом $(2n+2)!=(2n)!(2n+1)(2n+2)$ и сократим числитель и знаменатель на общие множители. Получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=0=L$.

Так как $L=0<1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

б) Данный ряд исследуем на сходимость по радикальному признаку Коши. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$, где

$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(n^4 arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{4}{n}} \cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right)$. С учётом известного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{4}{n}} \cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sqrt[n]{n})^4 \cdot arctg\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] = 1^4 \cdot arctg0 = 0 = L$. Так как $L = 0 < 1$, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n\text{-}2)}{(2n)!}$ сходится по признаку Даламбера;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\, arctg^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ сходится по радикальному признаку Коши.

81-90. Найти интервал, радиус и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$.

Интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ находим, решая неравенство $L(x) < 1$, где $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$, $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$, R - радиус сходимости.
Областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, к которому присоединяются точки $x_0 \pm R$, если в них ряд сходится. Для исследования сходимости ряда на концах интервала сходимости обычно применяют признаки сравнения (для рядов с положительными членами) и признак Лейбница (для знакочередующихся рядов).

Решение.

1) Найдём интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ сходимости степенного ряда. Для этого сначала вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}}{\dfrac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)\cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right| = |(x+1)| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right| =|x+1| \lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}} =$$

$|x+1| \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}} = |x+1|\cdot\dfrac{1}{(1+0)^{3/2}} =|x+1|= L(x)$. Затем решим неравенство $L(x) =|x+1|<1$. Полученное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+1<1 \\ -(x+1)<1 \end{cases}$, откуда: $-2<x<0$. Таким образом, интервалом сходимости данного ряда является интервал $(-2,0)$.

2) Радиус $R \geq 0$ сходимости степенного ряда найдём, учитывая, что интервалом его сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $x_0 = -1$, является интервал $(-2,0)$, т.е. из условия $(-1-R, -1+R) = (-2, 0)$ или $\begin{cases} -1-R=-2 \\ -1+R=0 \end{cases}$. Откуда $R=1$.

3) Для нахождения области сходимости степенного ряда исследуем его сходимость на концах интервала сходимости $(-2,0)$, т.е. в точках $x=-2$ и $x=0$.

При $x=-2$ получим знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. Исследуем его на сходимость по признаку Лейбница.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, где $u_n>0$, сходится, если: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) $u_1>u_2>u_3>\ldots$ (может выполняться начиная с номера $n=n_0$).

Для этого проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$; 2) $\frac{1}{1\sqrt{1}} > \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3\sqrt{3}} > \ldots$. Оба условия выполняются и, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, являющийся обобщенным гармоническим рядом с показателем степени $p = 3/2$. Так как $p = 3/2 > 1$, то этот ряд сходится.

Таким образом, в точках $x = -2$ и $x = 0$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится и тогда областью его сходимости является промежуток $[-2,0]$.

Ответ: Для степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$: $(-2, 0)$ - интервал сходимости; $R = 1$ - радиус сходимости; $[-2,0]$ - область сходимости.

91-100. Найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0 = 1$.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots .$$

Решение.

Найдём сначала первые три отличные от нуля производные функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$: $f^{(0)}(1) = f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, …. Получим:

$$f^{(0)}(1) = f(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \neq 0;$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)' = \frac{(x)'(x+2) - x(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9} \neq 0;$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{2}{(x+2)^2}\right)'=-2\cdot\frac{\left((x+2)^2\right)'}{(x+2)^4}=-2\cdot\frac{2(x+2)(x+2)'}{(x+2)^4}=$$

$$=-2\cdot\frac{2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4}=-\frac{4}{(x+2)^3}\ \Rightarrow\ f''(1)=-\frac{4}{(1+2)^3}=-\frac{4}{27}\neq 0\,.$$

Теперь подставим найденные ненулевые значения производных в ряд Тейлора функции $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ в окрестности точки $x=1$ и получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x+1)^n\approx\frac{1}{3}+\frac{(2/9)}{1!}(x+1)+\frac{(-4/27)}{2!}(x+1)^2=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(x+1)-\frac{2}{27}(x+1)^2\,.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}(x+1)-\dfrac{2}{27}(x+1)^2$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.</u>

Замкнутую область $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[a,b]$, будем называть ***элементарной в направлении оси*** Oy и обозначать D_y (рис.1).

Замкнутую область $D=\{(x,y): \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$, где функции $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[c,d]$, будем называть ***элементарной в направлении оси*** Ox и обозначать D_x (рис.2).

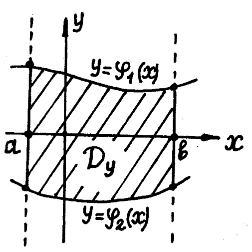


Рис.1

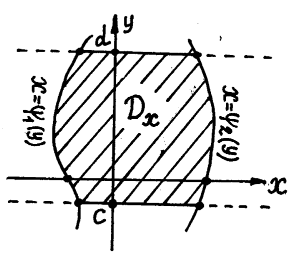


Рис.2

Область, элементарная в направлении одной из осей, не обязана быть элементарной в направлении другой.

Выражение $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ называется ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ ***по области*** D_y, а выражение $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ называется ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ ***по области*** D_x.

В повторных интегралах сначала вычисляются внутренние интегралы, причём интегрирование производится по внутренней переменной, а внешняя переменная считается постоянной. В результате получится подынтегральная функция для внешнего интеграла, интегрируя которую получим число.

Имеет место равенство $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, если $D = D_x = D_y$. Если D не является множеством такого вида, то при изменении порядка интегрирования, её представляют в виде конечного объединения непересекающихся (без общих внутренних точек) областей $D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$, каждая из которых является элементарной в направлении той или другой координатной оси. Тогда в силу аддитивности повторный интеграл по области D будет равен сумме повторных интегралов по областям $D_1, D_2, \ldots, D_k$.

Представление области D в виде $D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$, часто существенно упрощается при изображении области D на чертеже.

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x,y)$ по ограниченной замкнутой области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum\limits_i \sum\limits_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и суммирование ведётся по тем значениям i и j, для которых $(x_i, y_j) \in D$.

Двойной интеграл по области $D = D_y$ вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

Двойной интеграл по области $D = D_x$ вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Если D не является множеством такого вида, то её представляют в виде объединения непересекающихся (без общих внутренних точек) областей $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$, каждая из которых является элементарной в направлении той или другой оси. Разбиение зависит от желаемого порядка расстановки пределов интегрирования. Тогда в силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy .$$

При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x, y) к полярным координатам (r, φ), связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имеет место формула $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Если область D^* имеет вид $D^* = \{(\varphi, r) : \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$, где функции $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ - непрерывны и заданы одним аналитическим выражением на отрезке $[\alpha, \beta]$, то двойной интеграл $\iint_{D^*} f_1(\varphi, r)rdrd\varphi$, где $f_1(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, вычисляется по формуле $\iint_{D^*} f_1(\varphi, r)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f_1(\varphi, r)rdr$. Если область интегрирования D^* не принадлежит к рассмотренному виду, то её разбивают на части, каждая из которых является областью данного вида.

Площадь области D вычисляется по формуле $S_D = \iint_D dxdy$. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x, y) к полярным координатам (r,φ), имеет место формула $S_D=\iint\limits_{D^*} rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Среднее значение непрерывной функции $f(x,y)$ *в области* D вычисляется по формуле $f_{cp}=\dfrac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Объём υ цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, вычисляется по формуле $\upsilon=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат (x,y) к полярным координатам (r,φ), имеет место формула $\upsilon=\iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$, где D^* - область интегрирования в плоскости переменных φ и r.

Тема. <u>Теория поля.</u>

Пусть D - область в двумерном пространстве. ***Скалярным полем*** на D называется числовая функция $u=f(M)$, заданная в точках $M(x,y)\in D$. Линии $f(x,y)=C$, где $C=const$ называются ***линиями уровня*** скалярного поля $u=f(x,y)$.

Пусть V - область в трёхмерном пространстве.

Скалярным полем на V называется числовая функция $u=f(M)$, заданная в точках $M(x,y,z)\in V$. Поверхности $f(x,y,z)=C$, где $C=const$ называются ***поверхностями уровня*** скалярного поля $u=f(x,y,z)$.

Градиентом скалярного поля $u=f(x,y,z)$ называется вектор

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial x}\vec{k}.$$

Производная скалярного поля $u=f(x,y,z)$ ***по направлению*** произвольного вектора $\vec{\ell}=\ell_x\vec{i}+\ell_y\vec{j}+\ell_z\vec{k}$ вычисляется по формуле $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

Градиент скалярного поля $u = f(M)$ в точке $M(x, y, z)$ направлен по нормали к поверхности уровня $f(x, y, z) = C$, проходящей через $M(x, y, z)$ в сторону возрастания поля, а его модуль $|gradu|$ равен наибольшей производной по направлению в этой точке.

Пусть V - область в трёхмерном пространстве. ***Векторным полем*** на V называется векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}(\vec{r})$, заданная в точках $M(x, y, z) \in V$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Аналогично определяется плоское векторное поле.

Векторной линией (***силовой линией***, ***линией тока***) называется гладкая кривая, касательная к которой в каждой точке $M(x, y, z)$ имеет направление соответствующего ей вектора поля $\vec{a}(M)$. Векторные линии поля $\vec{a}(M)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

Если Γ - плоская кусочно-гладкая простая (без точек самопересечений) замкнутая кривая, нигде не касающаяся векторных линий поля $\vec{a}$, то поверхность, образованная векторными линиями, пересекающими Γ, называется ***векторной трубкой*** поля $\vec{a}$.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется скалярная величина $div\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$.

Ротором (***вихрем***) векторного поля $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется вектор $rot\vec{a} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$.

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи ***оператора Гамильтона*** – символического вектора ∇ (читается - набла), определяемого равенством $\nabla = \vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$. Так, например: $gradu = \nabla u$, $div\,\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$,

$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется ***потенциальным***, если $\vec{a} = grad\, u$, где $u = f(M)$ -скалярная функция (***потенциал*** векторного поля).

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется ***соленоидальным***, если в каждой точке поля $div\,\vec{a} = 0$.

Тема. <u>Числовые ряды.</u>

Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, где $u_1, u_2, \ldots$- последовательность чисел, называется ***числовым рядом*** и обозначатся $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ называется ***остатком*** n***-ого порядка*** исходного ряда и обозначается r_n. Сумма $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ n первых членов ряда называется n***-ой частичной суммой*** ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***сходящимся***, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и ***расходящимся***, если предел не существует. Число S называется ***суммой сходящегося ряда***, при этом пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится его остаток r_n. В случае сходящегося ряда его остаток записывают в виде $r_n = S - S_n$.

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (***необходимый признак сходимости ряда)***. Обратное утверждение неверно.

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (***достаточный признак расходимости ряда***).

Признак сравнения. Если для рядов $U:\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $V:\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, начиная с некоторого n_0, для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $0 \leq u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда V следует сходимость ряда U, из расходимости ряда U следует расходимость ряда V.

Предельный признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ (в частности, если $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ($u_n > 0$, $v_n > 0$ начиная с некоторого n_0) сходятся или расходятся одновременно.

Для применения признаков сравнения необходимо наличие «эталонных» рядов, сходимость или расходимость которых известна. В качестве «эталонных» рядов широко используются: **1)** ***обобщённый гармонический ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$; **2)** *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, который сходится при $0 \leq q < 1$, при этом его сумма равна $S = \frac{1}{1-q}$ и расходится при $q \geq 1$. Таким образом, для применения признаков сравнения нужно найти последовательность $\frac{A}{n^p}$ или Bq^n, где A, B - некоторые числа, такую, что $u_n \sim \frac{A}{n^p}$ или $u_n \sim Bq^n$ при $n \to \infty$.

Полезно иметь в виду эквивалентности (при $n \to \infty$, $p > 0$):

$$\sin\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim tg\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim \arcsin\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim arctg\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right) \sim \frac{1}{n^p},$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n},$$

а также оценки $(\ln n)^{\alpha} \leq n^{\beta} \leq a^n \leq n! \leq n^n$ ($\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$), имеющие место, начиная с некоторого n_0, для всех $n \geq n_0$.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$ начиная с некоторого n_0) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, то ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$. Если $L = 1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

Признак Коши (радикальный). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$ начиная с некоторого n_0) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, то ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$. Если $L = 1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

При применении признака Коши полезно иметь в виду, что: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_m(n)} = 1$, где $P_m(n)$- многочлен порядка m относительно n.

Интегральный признак Коши. Если $u_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \ge n_0 \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при перестановке членов ряда. Сумму условно сходящегося ряда путём перестановки его членов можно сделать равной любому числу.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он является сходящимся (***достаточный признак сходимости знакопеременного ряда***).

Для исследования ряда на абсолютную сходимость используют известные признаки сходимости знакоположительных рядов. В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$. В общем случае из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Но если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$, то расходится не только ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, но и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд называется ***знакочередующимся***, если все его соседние члены имеют разные знаки.

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ ($u_n>0$) модуль его общего члена $|u_n|$ монотонно стремится к нулю, т.е. выполнены условия: **1)** $u_1>u_2>u_3>\ldots$ (может начать выполняться начиная с некоторого n_0); **2)** $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то знакочередующийся ряд сходится (по крайней мере условно). Для остатка ряда r_n в этом случае справедлива оценка $|r_n|\le u_{n+1}$.

Сумму знакочередующегося ряда с заданной степенью точности ε вычисляют по приближённой формуле $S\approx S_{n_0}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n_0+1}u_{n_0}$, где n_0 - минимальный из номеров, дл которых $u_{n+1}<\varepsilon$.

Тема. Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, где $u_1(x), u_2,(x)\ldots$ - последовательность функций, определённых на одном и том же множестве $D\subset R$, называется ***функциональным рядом***, определённым на D и обозначается

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Функция $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ называется ***n-ой частичной суммой*** функционального ряда.

Точка $x_0 \in D$, в которой сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, называется ***точкой сходимости*** функционального ряда. Множество $D_0 \subset D$, состоящее из всех точек сходимости функционального ряда, называется его ***областью сходимости***. Область D_0 сходимости функционального ряда обычно уже, чем область его определения D.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве D^*, если при всех $x \in D^*$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Всякий ряд, абсолютно сходящийся на множестве D^*, сходится на этом множестве. Область D^* абсолютной сходимости ряда обычно уже его области сходимости D_0.

Функцию $S(x)$, определённую в области сходимости D_0 функционального ряда такую, что при любом фиксированном $x \in D_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, называют ***суммой ряда*** и пишут $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. При $x \in D_0$ остаток ряда представляет собой также функцию $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $x \in D_0$.

Для нахождения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ применяют известные признаки сходимости числовых рядов, считая $x \in D$ фиксированным.

В частности, на основании признаков Даламбера и Коши (радикального) можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = L(x) < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x) < 1$, соответственно, и расходится, если $L(x) > 1$. В точках x, в которых $L(x) = 1$, сходимость ряда исследуют с помощью других признаков (например, признаков сравнения, интегрального признака Коши, признака Лейбница).

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$, где a_i, x_0 - действительные числа. Числа a_i называются ***коэффициентами*** ряда.

Всякий степенной ряд сходится в точке $x = x_0$.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ называется число R такое, что при $|x-x_0| < R$ ряд сходится (и притом абсолютно), а при $|x-x_0| > R$ расходится. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ при этом называется ***интервалом сходимости*** ряда. На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = x_0 \pm R$, ряд может как сходится, так и расходится.

Областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, к которому присоединяются точки $x_0 \pm R$, если в них ряд сходится. В частности, радиус сходимости R может быть равен 0, тогда область сходимости ряда состоит из одной точки x_0, и $+\infty$, тогда областью сходимости ряда является вся числовая прямая) .

Интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши (радикального), вычисляя пределы $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = L(x)$ или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x)$ и решая неравенство $L(x) < 1$.

Внутри общего интервала сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ степенные ряды можно почленно складывать и вычитать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n .$$

Внутри интервала сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

$$\textbf{1)}\ \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} ;$$

$$\textbf{2)}\ \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)} + C .$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке $x=x_0$. При $x_0=0$ ряд Тейлора называется ***рядом Маклорена***: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots.$

Представление функции $f(x)$ в виде $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, называется разложением $f(x)$ в ряд Тейлора. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда остаток ряда $r_n(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \to 0$ при $n\to\infty$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, входящей в интервал сходимости ряда. Для оценки остатка ряда Тейлора часто пользуются формулой $r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$, где $0<\theta<1$.

При разложении функций в степенные ряды, как правило, используют основные разложения элементарных функций в ряд Маклорена). Иногда при разложении используют почленное дифференцирование или интегрирование. При разложении в степенные ряды рациональных дробей рекомендуется представлять их в виде суммы простейших дробей.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ **2.** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

4. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ **5.** $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$ **2.** $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,$

3. $1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha,$ **4.** $1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha.$

5. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

6. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

7. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

9. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cdot\cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cdot\sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cdot\cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin[(\alpha-\beta)/2]\cdot\cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}dx$
2	$a^{x}\quad(a>0,\neq 1)$	$a^{x}\ln a$	$a^{x}\ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x}dx$
4	$\log_a x\quad(a>0,\neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos xdx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin xdx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\frac{1}{ch^2 x}$	$\frac{dx}{ch^2 x}$
17	$cthx$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	$-\frac{dx}{sh^2 x}$

Таблица основных неопределенных интегралов.

№ п/п	$\int f(x)dx$	№ п/п	$\int f(x)dx$
1	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$	**2**	$\int (x+a)^k dx = \frac{(x+a)^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	**4**	$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\|x+a\| + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	**6**	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	**8**	$\int \cos x dx = \sin x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**10**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$	**12**	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	**14**	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	**16**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
17	$\int shxdx = chx + C$	**18**	$\int chxdx = shx + C$
19	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$	**20**	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
21	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$		
22	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$		

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

Контрольная работа
по дисциплине «Кратные интегралы. Теория поля. Ряды»

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №_______
*Ф.И.О. студента*_________
зач. книжка - №_________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
202…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е