УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 311–321 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.714 doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.311-321

ОЦЕНКИ НЕМОНОТОННОЙ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

В.В. Кочергин[1,2], *А.В. Михайлович*[2]

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия*

[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, 101000, Россия*

Аннотация

Исследована задача о сложности реализации функций многозначной логики логическими схемами в базисе, состоящем из элементов двух типов. Элементами первого типа являются произвольные монотонные (относительно стандартного порядка) функции, таким элементам приписан нулевой вес. Конечное число немонотонных функций образует непустое множество элементов второго типа, каждой такой функции приписан единичный вес. Установлены верхняя и нижняя оценки немонотонной сложности (минимального достаточного для реализации числа немонотонных элементов в схеме) произвольной функции k-значной логики, разность между которыми не превосходит некоторой абсолютной константы. Разность наилучших известных до этого верхней и нижней оценок отличалась на константу, зависящую от базиса, при этом множество значений таких констант неограничено.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, схемная сложность, функции k-значной логики, базисы с нулевыми весами, инверсионная сложность, немонотонная сложность

1. Постановка задач, определения, формулировка основного результата

В работе исследуется задача о (немонотонной) сложности реализации произвольных функций k-значной логики логики схемами в базисе, содержащем все монотонные функции, которые можно использовать «бесплатно», а также конечное число немонотонных функций. Классическими результатами в этом направлении являются теоремы А.А. Маркова [1, 2], которые для реализации произвольной булевой функции (а также системы функций) в случае, когда единственным немонотонным элементом в булевом базисе является отрицание, дают точное значение немонотонной сложности, называемой в этом случае инверсионной сложностью.

В настоящей работе для задачи о немонотонной сложности функций k-значной логики получены нижняя и верхняя оценки, отличающиеся друг от друга не более чем на абсолютную константу.

Дадим необходимые определения.

Обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через E_k. Последовательность

$$\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}),\ \widetilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}),\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rn})$$

наборов из множества E_k^n назовем *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \ldots < k-1$ или просто *цепью*, если все наборы $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \le \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Наборы $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_r$ будем называть *началом* и *концом* этой цепи соответственно.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – функция k-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* f, если выполнены условия:

1) $\alpha_j\le\beta_j$, $j=1,\ldots,n$;

2) $f(\widetilde{\alpha})>f(\widetilde{\beta})$.

Пусть C – цепь наборов из E_k^n, имеющая вид

$$\widetilde{\alpha}_1,\,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_r.$$

Под *падением* $d_C(f)$ *функции* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *на цепи* C будем понимать число обрывов для функции f на парах вида $(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{i+1})$.

Спад $d(f)$ функции f определим равенством $d(f)=\max d_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C.

Пусть P_k – множество всех функций k-значной логики, M – класс всех функций из P_k, монотонных относительно порядка $0<1<\cdots<k-1$.

Далее, для произвольной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из P_k и произвольной цепи $C=(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_r)$ наборов из E_k^n определим величину $u_C(f)$ как наибольшую длину t подпоследовательности $\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_t$ последовательности C, удовлетворяющей условию $f(\widetilde{\beta}_1)>f(\widetilde{\beta}_2)>\cdots>f(\widetilde{\beta}_t)$.

Теперь определим *инверсионную силу* $u(f)$ *функции* f равенством $u(f)=\max u_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C наборов из E_k^n. Очевидно, что для любой функции f справедливы соотношения $1\le u(f)\le d(f)+1$, при этом функция f не является монотонной (относительно порядка $0<1<\cdots<k-1$) тогда и только тогда, когда то выполняется неравенство $u(f)\ge 2$.

Наконец, равенством $u(B)=\max u(f)$, где максимум берется по всем функциям f из базиса B, введем величину $u(B)$ – *инверсионную силу базиса* B.

Целью настоящей работы является изучение немонотонной сложности функций многозначной логики, то есть сложности реализации функций k-значной логики схемами из функциональных элементов или логическими схемами (см., например, [3, 4]) над базисами B, имеющими вид

$$B=M\bigcup\{\omega_1,\ldots,\omega_p\},\quad \omega_i\in P_k\setminus M,\quad i=1,\ldots,p\quad(p\ge 1),\tag{$*$}$$

причем функциям из множества M приписан нулевой вес, а функциям $\omega_1,\ldots,\omega_p$ – положительные веса $\rho_1,\ldots,\rho_p$ соответственно. Далее с целью упрощения рассуждений и выделения в них наиболее содержательной части будем считать, что $\rho_1=\cdots=\rho_p=1$.

Определим *немонотонную сложность* $I_B(S)$ *схемы* S *над базисом* B как суммарный вес всех немонотонных элементов схемы S, то есть элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса.

Наконец, введем две характеристики произвольного базиса B вида $(*)$. Положим

$$D(B)=\max_{\varphi\colon\varphi\in B} d(\varphi),\quad u(B)=\max_{\varphi\colon\varphi\in B} u(\varphi).$$

Точное значение немонотонной сложности произвольной булевой функций (а также произвольной системы булевых функций) в базисе $B_0=M\bigcup\{\overline{x}\}$ (то есть инверсионной сложности) было установлено А.А. Марковым [1, 2]: для любой булевой функции f справедливо равенство

$$I_{B_0}(f)=\lceil\log_2(d(f)+1)\rceil\,.$$

Для немонотонной сложности в случае реализации булевой функции (и системы булевых функций) в произвольном базисе вида $(*)$ в работе [5] установлено, что найдется такая константа $c(B)$, что для любой булевой функции f выполняются неравенства

$$\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil - c(B) \le I_B(f) \le \lceil \log_2(d(f)+1) \rceil,$$

причем для любого заданного значения N найдется булев базис B_N и функция g_N, для которых справедливо неравенство

$$\lceil \log_2(d(g_N)+1) \rceil - I_{B_N}(g_N) > N.$$

В работе [6] классический результат Маркова про инверсионную сложность булевых функций (систем функций) обобщен на случай реализации функций (систем функций) k-значной логики, $k \ge 2$: установлено, что минимальное число отрицаний, достаточное для вычисления произвольной функции k-значной логики f, равно $\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Поста, то есть функция $x+1 \pmod k$, и равно $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Лукасевича, то есть функция $k-1-x$. При $k=2$ эти величины «схлопываются» в одну, превращая соответствующие утверждения в теорему Маркова.

Отметим, что эти результаты получили дальнейшее развитие в работах [7, 8], в которых с точностью до аддитивной константы установлены значения сложности (понимаемой уже как минимальное число элементов всех типов в схеме, реализующей функцию) произвольной функции k-значной логики в двух бесконечных базисах, состоящих из всех монотонных функций, к которым добавляется соответственно либо отрицание Поста, либо отрицание Лукасевича. В первом случае устанавливаемые нижняя и верхняя оценки сложности произвольной функции k-значной логики отличаются не более чем на единицу, а во втором – не более чем на двойку.

Далее, в работе [9] результат из статьи [5] обобщен на случай функций многозначной логики. В [9] установлено, что для любого базиса B вида $(*)$ найдется такая константа $c(B)$, что для любой функции (системы функций) f из P_k выполняются неравенства

$$\left\lceil \log_{u(B)}(d(F)+1) \right\rceil - c(B) \le I_B(F) \le \left\lceil \log_{u(B)}(d(F)+1) \right\rceil.$$

Этот результат, с одной стороны, имеет достаточно общий и универсальный характер, а с другой – содержит в себе значительный недостаток: заменить константу $c(B)$, зависящую от базиса, на абсолютную константу нельзя – для любого $k \ge 2$ и для любого заданного значения N найдутся такие функции k-значной логики g_N и φ_N, что для немонотонной сложности функции g_N в базисе $B_N = M \bigcup \{\varphi_N\}$ справедливо неравенство

$$\left\lceil \log_{u(B_N)}(d(g_N)+1) \right\rceil - I_{B_N}(g_N) > N.$$

В булевом случае этот недостаток удалось устранить. В работе [10] получен в некотором смысле окончательный результат – для произвольной булевой функции f и любого базиса B вида $(*)$ установлена точная формула для вычисления немонотонной сложности:

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right) \right\rceil.$$

Для случая функций многозначной логики указанный недостаток устранен в настоящей работе. Для произвольной функции k-значной логики и любого базиса вида $(*)$ установлены нижняя и верхняя оценки немонотонной сложности, отличающиеся не более чем на константу, не зависящую от базиса (правда зависящую, вообще говоря, от значности логики).

Дадим точную формулировку основного результата работы.

Теорема. *Для произвольной функции k-значной логики f и любого базиса B вида $(*)$ выполняются неравенства*

$$\log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{d(B)}+1\right)-(\log_2 k+2)\le I_B(f)\le \log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{d(B)}+1\right)+k(k-1)^2.$$

2. Нижняя оценка

В основе доказательства для немонотонной сложности произвольной функции k-значной логики нижней оценки, отличающейся не более чем на константу от верхней оценки, лежат идеи из доказательства асимптотически точной нижней оценки из работы [9].

Лемма 1 [9]. *Для любой функции k-значной логики f и базиса B вида $(*)$ справедливо неравенство*

$$d(f)\le\frac{k(d(B)+1)-1}{u(B)-1}\left((u(B))^{I_B(f)}-1\right).$$

Лемма 2. *Для любой функции k-значной логики f и базиса B вида $(*)$ справедливо неравенство*

$$I_B(f)\ge\log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{d(B)}+1\right)-(\log_2 k+2).$$

Доказательство. При выполнении условия $d(f)<d(B)$ утверждение леммы хоть и бессодержательно, но справедливо. Далее будем считать, что выполняется неравенство $d(f)\ge d(B)$.

Из леммы 1 вытекает оценка

$$(u(B))^{I_B(f)}-1\ge d(f)\frac{u(B)-1}{k(d(B)+1)-1}.$$

Следовательно,

$$I_B(f)\ge\log_{u(B)}\left(d(f)\frac{u(B)-1}{k(d(B)+1)-1}+1\right)\ge$$
$$\ge\log_{u(B)}\left(\frac{d(f)+d(B)}{d(B)}\,\frac{d(f)}{d(f)+d(B)}\,\frac{d(B)(u(B)-1)}{k(d(B)+1)}\right).$$

Далее, применяя неравенства

$$u(B)-1\ge\frac{u(B)}{2},\quad d(B)+1\le 2d(B),\quad d(f)\ge d(B),$$

получаем

$$I_B(f) \geq \log_{u(B)} \left(\left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) \frac{u(B)}{8k} \right) =$$
$$= \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) - (\log_{u(B)}(8k) - 1) \geq$$
$$\geq \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) - (\log_2 k + 2).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2 завершает доказательство нижней оценки теоремы.

3. Верхняя оценка

Основой для получения нужной верхней оценки является конструкция доказательства асимптотически наилучшей верхней оценки немонотонной сложности произвольной функции k-значной логики из работы [6], а способы ее усовершенствования сходны с теми, что использовались для получения точной верхней оценки немонотонной сложности произвольной булевой функции в работе [10].

Лемма 3. *Для любых двух функций f и g, $f \in P_k$, $g \in P_k \setminus M$ при выполнении условия $d(f) \leq kd(g) - 1$ немонотонная сложность функции f в базисе $B = M \bigcup \{g\}$ ограничена константой:*

$$I_B(f) \leq k(k-1)^2.$$

Доказательство. Пусть функции f и g зависят от s и t переменных соответственно.

Определив монотонные функции $m_i(x)$, $i - 1, 2. \ldots, k-1$, равенствами

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \geq i, \\ 0, & \text{если } \ x < i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

положим $g_i(x_1, \ldots, x_t) = m_i(g(x_1, \ldots, x_t))$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Таким образом,

$$g_i(x_1, \ldots, x_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ g(x_1, \ldots, x_t) \geq i, \\ 0, & \text{если } \ g(x_1, \ldots, x_t) < i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Отметим, что если пара $\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right)$ наборов из E_k^t является обрывом для функции g, то эта пара наборов является обрывом хотя бы для одной из функций $g_i(x_1, \ldots, x_t)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Поэтому справедливо неравенство

$$d(g_1) + d(g_2) + \cdots + d(g_{k-1}) \geq d(g).$$

Обозначим через φ функцию из построенного множества $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$, имеющую наибольшее значение спада. Очевидно, что выполняются соотношения

$$d(\varphi) \geq \frac{d(f)}{k-1}, \quad I_B(\varphi) = 1.$$

Для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ положим $f_i(x_1, \ldots, x_s) = m_i(f(x_1, \ldots, x_s))$. Легко понять, если пара $\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right)$ наборов из E_k^s является обрывом для какой-либо функции f_i,

$i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, то эта пара наборов является обрывом и для самой функции $f(x_1, \ldots, x_t)$. Поэтому для любого i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, справедливо неравенство $d(f_i) \leq d(f)$.

Теперь рассмотрим базис $B' = M \bigcup \{\varphi\}$. Для немонотонной сложности в этом базисы верны оценки

$$I_{B'}(f_i) \leq \frac{d(f_i)}{d(\varphi)} + 1 \leq \frac{d(f)}{d(g)}(k-1) + 1 < k(k-1) + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Отсюда, учитывая целочисленность величин $I_{B'}(f_i)$, получаем

$$I_{B'}(f_i) \leq k(k-1), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Так как справедливо равенство $I_B(\varphi) = 1$, для любой функции h из P_k выполняется неравенство $I_B(h) \leq I_{B'}(h)$. Поэтому

$$I_B(f_i) \leq k(k-1), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Далее, используя монотонные функции M_i, определяемые равенствами

$$M_i = \begin{cases} i, & \text{если } x \geq i, \\ 0, & \text{если } x < i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

можно следующим образом выразить функцию f через функции f_i:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \max\{M_1(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_s)), \ldots, M_{k-1}(f_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_s))\}.$$

Таким образом,

$$I_B(f) \leq \sum_{i=1}^{k-1} I_B(f_i) \leq \sum_{i=1}^{k-1} I_{B'}(f_i) \leq k(k-1)^2.$$

Лемма 3 доказана. □

Для упорядоченного набора функций k-значной логики

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

будем называть *s-переключателем* функций $f_1, \ldots, f_s$ любую функцию k-значной логики $g(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{array}{rcl} g(1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ g(0, 1, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ & . \;\; . \;\; . & \\ g(0, \ldots, 0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}$$

Лемма 4 [6]. *Пусть базис B имеет следующий вид: $B = M \bigcup \{\omega\}$, где $\omega \in P_k \setminus M$. Тогда для любого упорядоченного набора $\{(f_1, \ldots, f_s)\}$ функций k-значной логики найдется s-переключатель g этого множества функций, удовлетворяющий условию*

$$I_B(g) \leq \max\{I_B(f_1), \ldots, I_B(f_s)\}.$$

Доказательство следующей леммы местами дословно совпадает с доказательством теоремы 3 из [6], однако содержит и принципиальные изменения.

Лемма 5. *Для любой функции k-значной логики f и базиса B вида $(*)$ справедливо неравенство*

$$I_B(f) \le \left\lceil \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)+1}{d(B)} \right) \right\rceil + k(k-1)^2 - 1.$$

Доказательство. Пусть $u(B) = s$. Выберем в базисе B функцию $\omega(x_1, \dots, x_q)$, удовлетворяющую условию $u(\omega) = s$, и функцию φ, удовлетворяющую условию $d(\varphi) = d(B)$. Положим $B' = M \bigcup \{\omega, \varphi\}$. В силу очевидного соотношения $I_{B'}(f) \ge I_B(f)$ достаточно установить неравенство

$$I_{B'}(f) \le \left\lceil \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)+1}{d(B)} \right) \right\rceil + k(k-1)^2 - 1,$$

которое будем доказывать индукцией по величине

$$R(f) = \left\lceil \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)+1}{d(B)} \right) \right\rceil .$$

Если $R(f) \le 1$, то $d(f) \le u(B)d(B) - 1$. Следовательно, выполняется соотношение $d(f) \le kd(\varphi) - 1$, и база индукции устанавливается применением леммы 3.

Пусть для любой функции g, для которой справедливо соотношение $R(g) \le \le R(f) - 1$, устанавливаемое неравенство выполняется.

Будем считать, что функция f зависит от n переменных. Обозначим через T_1 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) < < s^{R(f)-1}D(B)$, то есть

$$T_1 = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \mid d_C(f) < s^{R(f)-1}D(B) \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha}\}.$$

Далее, для $i = 2, \dots, s-1$ обозначим через T_i множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C наборов из множества $E_k^n \setminus (T_1 \bigcup \dots \bigcup T_{i-1})$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) < < s^{R(f)-1}D(B)$, то есть

$$T_i = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \setminus (T_1 \textstyle\bigcup \dots \bigcup T_{i-1}) \mid d_C(f) < s^{R(f)-1}D(B)$$
$$\text{для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha},\ C \subset E_k^n \setminus (T_1 \textstyle\bigcup \dots \bigcup T_{i-1})\}.$$

Наконец, положим $T_s = E_k^n \setminus (T_1 \bigcup \dots \bigcup T_{s-1})$.

Отметим, что если $\widetilde{\alpha} \in T_i$ и $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta} \in T_1 \bigcup \dots \bigcup T_{i-1}$, $i = 1, \dots, s$.

Теперь докажем, что для любой цепи C наборов из множества T_s также выполняется неравенство $d_C(f) < s^{R(f)-1}D(B)$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_s с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_s}(f) \ge s^{R(f)-1}D(B)$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}_s$ не лежит в множестве T_{s-1}, то найдется цепь C_{s-1} с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_{s-1}$, $\widetilde{\alpha}_{s-1} \in T_{s-1}$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_{s-1}}(f) \ge s^{R(f)-1}D(B)$. Аналогично, последовательно для $i = s-2, \dots, 1$ устанавливаем существование цепи C_i с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_i \in T_i$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, $\widetilde{\alpha}_{i+1} \in T_{i+1}$, для которой выполняется неравенство $d_{C_i}(f) \ge s^{R(f)-1}D(B)$.

Тогда для цепи $C = C_1 \bigcup \dots \bigcup C_s$ справедливы соотношения

$$d_C(f) = d_{C_1}(f) + \dots + d_{C_s}(f) \ge s\bigl(s^{R(f)-1}\bigr)D(B) = s^{R(f)}D(B) > d(f),$$

что противоречит определению величины $d(f)$.

Далее для $i = 1, \ldots, s$ положим

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \bigcup \cdots \bigcup T_{i-1}, \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_i, \\ k-1, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_{i+1} \bigcup \cdots \bigcup T_s. \end{cases}$$

В силу определения функций f_i выполняются неравенства $d(f_i) < s^{R(f)-1} D(B)$, $i = 1, \ldots, s$, и, следовательно, неравенства

$$d(f_i) \leq s^{R(f)-1} D(B) - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Поэтому

$$R(f_i) = \left\lceil \log_s \frac{(d(f_i)+1)}{D(B)} \right\rceil \leq \left\lceil \log s^{R(f)-1} \right\rceil = R(f) - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В силу определения величины $s = u(\omega)$ найдется цепь

$$(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}), (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}), \ldots, (\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}),$$

удовлетворяющая условию

$$\omega(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}) > \omega(\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}) > \cdots > \omega(\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}).$$

Функции $\xi_1, \ldots, \xi_q$ определим равенствами

$$\xi_j(x_1, \ldots, x_n) = \beta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, q,$$

справедливыми для всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i.

Далее положим $b_i = \omega(\beta_{i1}, \ldots, \beta_{iq})$, $i = 1, \ldots, s$.

Теперь определим функции $\lambda_j(x)$, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j, \\ 1, & \text{если } x \geq j. \end{cases}$$

И, наконец, введем функции $\mu_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, s$:

$$\mu_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_1 \bigcup \cdots \bigcup T_{i-1}, \\ 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_i \bigcup \cdots \bigcup T_s. \end{cases}$$

Отметим, что все введенные функции монотонны.

Теперь рассмотрим s-переключатель $g(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x})$ набора функций $(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_s(\widetilde{x}))$, о существовании которого говорится в лемме 4.

В функцию $g(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x})$, вместо переменной z_i, $i = 1, \ldots, s$, подставим функцию

$$Z_i(x_1, \ldots, x_n) = \min \left\{ \lambda_{b_i} \left(\omega(\xi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \xi_q(x_1, \ldots, x_n)) \right), \mu_i(x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

Учитывая, что функция $Z_i(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в единицу на наборах из множества T_i, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i, $i = 1, \ldots, s$, справедливы равенства

$$g(Z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Z_s(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

Для реализации функций $Z_1, \ldots, Z_s$ помимо использования монотонных функций потребовалось лишь однократное использование функции ω. Поэтому, учитывая предположение индукции, получаем соотношения

$$I_{B'}(f) \leq I_{B'}(g) + 1 \leq \max\{I_{B'}(f_1), \ldots, I_{B'}(f_s)\} + 1 \leq$$
$$\leq \max\left\{\left\lceil \log_s \left(\frac{d(f_1)+1}{d(B)}\right)\right\rceil + k(k-1)^2 - 1, \ldots\right.$$
$$\left. \ldots, \left\lceil \log_s \left(\frac{d(f_s)+1}{d(B)}\right)\right\rceil + k(k-1)^2 - 1\right\} + 1 \leq$$
$$\leq \left\lceil \log_s s^{R(f)-1} \right\rceil + k(k-1)^2 = R(f) + k(k-1)^2 - 1,$$

которые завершают переход индукции. Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для любой функции k-значной логики f и базиса B вида $(*)$ справедливо неравенство*

$$I_B(f) \leq \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1\right) + k(k-1)^2.$$

Лемма 6 непосредственно следует из леммы 5 и завершает доказательство верхней оценки теоремы.

Благодарности. Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00337).

Литература

1. *Марков А.А.* Об инверсионной сложности систем функций // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 116, № 6. – С. 917–919.

2. *Марков А.А.* Об инверсионной сложности систем булевых функций // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 3. – С. 477–479.

3. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 137 с.

4. *Savage J.E.* The Complexity of Computing. – N. Y.: Wiley, 1976. – 391 p.

5. *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами // Прикл. дискрет. матем. – 2015. – № 4. – С. 25–32. – doi: 10.17223/20710410/30/2.

6. *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций k-значной логики // Дискрет. матем. – 2016. – Т. 28, Вып. 4. – С. 80–90. – doi: 10.4213/dm1394.

7. *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2018. – Т. 25, № 1. – С. 42–74. – doi: 10.17377/daio.2018.25.587.

8. *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* О схемной сложности функций k-значной логики в одном бесконечном базисе // Прикл. матем. и информатика. – 2018. – № 58. – С. 21–34.

9. *Kochergin V.V., Mikhailovich A.V.* Asymptotics of growth for non-monotone complexity of multi-valued logic function systems // Sib. Electron. Math. Rep. – 2017. – V. 14. – P. 1100–1107. – doi: 10.17377/semi.2017.14.093.

10. *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* Точное значение немонотонной сложности булевых функций // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, Вып. 1. – С. 32–41. – doi: 10.4213/mzm11693.

Поступила в редакцию
17.08.2020

Кочергин Вадим Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики; профессор кафедры высшей математики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
ул. Мясницкая, д. 20, г. Москва, 101000, Россия
E-mail: *vvkoch@yandex.ru*

Михайлович Анна Витальевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
ул. Мясницкая, д. 20, г. Москва, 101000, Россия
E-mail: *avmikhailovich@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2020, vol. 162, no. 3, pp. 311–321

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.311-321

Bounds of Non-Monotone Complexity for the Multi-Valued Logic Functions

V.V. Kochergin[a,b*], *A.V. Mikhailovich*[b**]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*
[b] *National Research University – Higher School of Economics, Moscow, 101000 Russia*
E-mail: [*] *vvkoch@yandex.ru*, [**] *avmikhailovich@gmail.com*

Received August 17, 2020

Abstract

The non-monotone complexity of realization of k-valued logic functions by circuits in a special basis was investigated. The basis consists of elements of two types: the first type comprises all monotone functions (with respect to the order $0 < 1 < 2 < \cdots < k-1$) with zero weight; the second type includes non-monotone elements with unit weight, the non-empty set of which is finite. The upper and lower bounds of non-monotone complexity (the minimum number of non-monotone elements) for an arbitrary k-valued logic function were established. The difference between the upper and lower bounds does not exceed a universal constant. The difference between the best upper and lower bounds known before is a constant that depends on the basis. The range of values for these constants is infinite.

Keywords: logic circuits, circuit complexity, k-valued logic functions, bases with zero weight elements, inversion complexity, non-monotone complexity

Acknowledgments. This study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00337).

References

1. Markov A.A. On the inversion complexity of systems of functions. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1958, vol. 5, no. 4, pp. 331–334. doi: 10.1145/320941.320945.
2. Markov A.A. On the inversion complexity of systems of Boolean functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, vol. 150, no. 3, pp. 477–479. (In Russian)
3. Lupanov O.B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic Estimates of Complexity of Control Systems]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1984. 137 p. (In Russian)
4. Savage J.E. *The Complexity of Computing.* New York, Wiley, 1976. 391 p. (In Russian)
5. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. On the complexity of circuits in bases containing monotone elements with zero weights. *Prikl. Diskretn. Mat.,* 2015, no. 4, pp. 25–32. doi: 10.17223/20710410/30/2. (In Russian)
6. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. The minimum number of negations in circuits for systems of multi-valued functions. *Discrete Math. Appl.*, 2017, vol. 27, no. 5, pp. 295–302. doi: 10.1515/dma-2017-0030.
7. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. On the complexity of multivalued logic functions over some infinite basis. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 40–58. doi: 10.1134/S1990478918010052.
8. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. Circuit complexity of k-valued logic functions in one infinite basis. *Comput. Math. Model.*, 2019, vol. 30, no. 1, pp. 13–25. doi: 10.1007/s10598-019-09430-5.
9. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. Asymptotics of growth for non-monotone complexity of multi-valued logic function systems. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2017, vol. 14, pp. 1100–1107. doi: 10.17377/semi.2017.14.093.
10. Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. Exact value of the nonmonotone complexity of Boolean functions. *Math. Notes*, 2019, vol. 105, no. 2, pp. 28–35. doi: 10.1134/S0001434619010048.

⟨ ***Для цитирования*:** *Кочергин В.В., Михайлович А.В.* Оценки немонотонной сложности функций многозначной логики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 311–321. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.311-321. ⟩

⟨ ***For citation*:** Kochergin V.V., Mikhailovich A.V. Bounds of non-monotone complexity for the multi-valued logic functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 311–321. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.311-321. (In Russian) ⟩