

УДК 514.762.33

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

*А.В. Ануфриева, Д.Н. Тумаков*

### Аннотация

Исследована задача дифракции плоской упругой волны на градиентном в поперечном направлении изотропном слое. Методом переопределенной граничной задачи получена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями третьего рода, которая решена сеточным методом. Приведены результаты расчетов для случая кусочно линейных профилей скоростей упругой волны.

**Ключевые слова:** дифракция, упругая волна, градиентный слой.

### Введение

Слои неоднородной упругой среды с непрерывным распределением плотности и упругих модулей возникают в задачах геофизики [1]. В последние годы особый интерес вызывают исследования процессов прохождения упругих волн через метаматериалы [2–4]. В частности, исследованы задачи отражения и пропускания звука слоями неоднородных сплавов [5], композитных материалов и пространственно ограниченных пористых структур [6]. Ряд работ посвящен прохождению звуковых волн через искусственные среды, например, в работе [7] рассмотрено отражение плоской звуковой волны от слоя Эпштейна [8].

Слои с градиентным распределением скорости можно также встретить и в задачах гидроакустики. Здесь подобные слои возникают в морях и океанах на различных глубинах [9]. Скорость звука в таких слоях может непрерывно изменяться на расстоянии от нескольких метров до нескольких километров [10].

Достаточно хорошо исследована задача дифракции волны на слое или на системе однородных слоев [7], а также одномерные задачи [11, 12]. Для решения задачи дифракции на градиентном слое можно использовать различные численные методы. Например, в [13] эта задача решена с использованием импедансного метода расчета характеристик упругих волн.

В настоящей работе исследована задача дифракции упругой волны на неоднородном изотропном слое с неизменными упругими характеристиками вдоль оси волновода и с непрерывным распределением упругих параметров в сечении. Дифференциальные уравнения, описывающие задачу дифракции, рассмотрены отдельно в полуплоскостях и в слое. Задачи в полуплоскостях являются переопределенными, что позволяет установить связь между следами искомым функций на стыках сред [14]. Таким образом, исходная задача сводится к граничной задаче для системы Ламе с граничными условиями третьего рода. Затем применяется преобразование Фурье по переменной, по которой сохраняется однородность задачи. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается сеточным методом.

Приведены результаты численных расчетов для случая кусочно линейных профилей скоростей упругой волны.

### 1. Постановка задачи

Пусть (см. рис. 1) на неоднородный слой толщины  $L$  (среда 2,  $\{0 < y < L\}$ , с плотностью  $\rho_2(y)$  и постоянными Ламе  $\lambda_2(y)$  и  $\mu_2(y)$ ) из среды 1  $\{y > L\}$  под углом  $\theta$  падает упругая гармоническая волна вида  $\mathbf{u}_0(x, y) \exp\{i\omega t\}$ . В результате дифракции возникают отраженная в среду 1 волна  $\mathbf{u}_1(x, y)$ , прошедшая в среду 3  $\{y < 0\}$  волна  $\mathbf{u}_3(x, y)$  и поле  $\mathbf{u}_2(x, y)$  в среде 2. Нужно найти полное дифрагированное поле. Среда 1 и 3 полагаем однородными и изотропными.

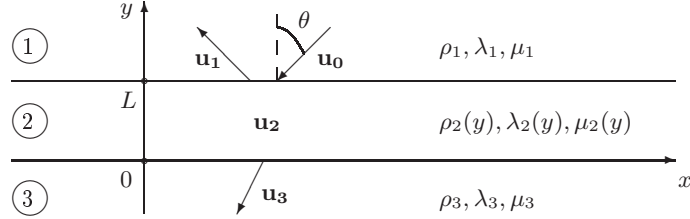


Рис. 1. Геометрия задачи

Будем искать для всех  $(x, y) \in R^2$  при  $y \neq 0$  и  $y \neq L$  решения плоской гармонической задачи теории упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_n}{\partial y} + \rho_n \omega^2 u_{xn} &= 0, & \frac{\partial \tau_n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} + \rho_n \omega^2 u_{yn} &= 0, \\ \sigma_{xn} &= (\lambda_n + 2\mu_n) \frac{\partial u_{xn}}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, & \sigma_{yn} &= \lambda_n \frac{\partial u_{xn}}{\partial x} + (\lambda_n + 2\mu_n) \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, \\ \tau_n &= \mu_n \left( \frac{\partial u_{xn}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yn}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

для  $n = 1, 2, 3$  с постоянными коэффициентами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотностью  $\rho$  при  $y > L$  и  $y < 0$  и коэффициентами Ламе  $\lambda_2(y)$ ,  $\mu_2(y)$  и плотностью  $\rho_2(y)$ , являющимися функциями переменной  $y$ , при  $0 < y < L$ . Функции  $\lambda_2(y)$ ,  $\mu_2(y)$  и  $\rho_2(y)$  полагаем непрерывно зависящими от  $y$ .

На границе раздела сред должны быть выполнены следующие условия сопряжения при  $y = L$ :

$$\begin{aligned} u_{x1}(x, L+0) + u_{x0}(x, L+0) &= u_{x2}(x, L-0), \\ u_{y1}(x, L+0) + u_{y0}(x, L+0) &= u_{y2}(x, L-0), \\ \tau_1(x, L+0) + \tau_0(x, L+0) &= \tau_2(x, L-0), \\ \sigma_{y1}(x, L+0) + \sigma_{y0}(x, L+0) &= \sigma_{y2}(x, L-0), \end{aligned} \quad (2)$$

при  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} u_{x3}(x, 0-0) &= u_{x2}(x, 0+0), & u_{y3}(x, 0-0) &= u_{y2}(x, 0+0), \\ \tau_3(x, 0-0) &= \tau_2(x, 0+0), & \sigma_{y3}(x, 0-0) &= \sigma_{y2}(x, 0+0). \end{aligned} \quad (3)$$

Из возможных решений системы (1)–(3) будем выбирать решения, соответствующие уходящим на бесконечность волнам.

### 2. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поле в градиентном слое

Искомые функции системы (1) для любого фиксированного  $y$  из интервала  $(0, L)$  будем рассматривать в классе  $L_{1, \text{loc}}(R)$  и будем считать, что эти функции

имеют медленный рост на бесконечности по переменной  $x$ . Это позволяет применить к (1) преобразование Фурье по  $x$ , допуская как затухающие на бесконечности, так и распространяющиеся волны. Таким образом, перейдем от переменной  $x$  к переменной  $\xi$  и получим

$$\begin{aligned} -i\xi\sigma_{x2} + \tau'_2 + \rho_2\omega^2 u_{x2} &= 0, & -i\xi\tau_2 + \sigma'_{y2} + \rho_2\omega^2 u_{y2} &= 0, \\ \sigma_{x2} &= -i(\lambda_2 + 2\mu_2)\xi u_{x2} + \lambda_2 u'_{y2}, & \sigma_{y2} &= -i\lambda_2\xi u_{x2} + (\lambda_2 + 2\mu_2)u'_{y2}, \\ \tau_2 &= \mu_2(u'_{x2} - i\xi u_{y2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим выражения для напряжений, полученные в трех последних уравнениях (4), в первые два. Получим систему уравнений Ламе при  $y \in (0, L)$

$$\begin{aligned} (\mu_2 u'_{x2})' + [\rho_2\omega^2 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\xi^2] u_{x2} - i\xi(\lambda_2 + \mu_2)u'_{y2} - i\xi\mu'_2 u_{y2} &= 0, \\ ((\lambda_2 + 2\mu_2)u'_{y2})' + [\rho_2\omega^2 - \mu_2\xi^2] u_{y2} - i\xi(\lambda_2 + \mu_2)u'_{x2} - i\xi\lambda'_2 u_{x2} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

относительно образов Фурье перемещений  $u_{x2}(\xi, y)$  и  $u_{y2}(\xi, y)$ .

Отметим, что неизвестные  $u_{x2}(\xi, y)$  и  $u_{y2}(\xi, y)$  по  $y$  являются обычными функциями, и следовательно, все производные этих функций понимаются в классическом смысле. Это позволяет в дальнейшем дискретизировать задачу по переменной  $y$ . При каждом фиксированном  $y$  искомые функции по переменной  $\xi$  являются распределениями медленного роста.

### 3. Граничные условия

Для верхней полуплоскости  $\{y > L\}$  будем предполагать, что решения (1) принадлежат  $L_{1,\text{loc}}(R)$  и корректно определены их следы  $\tau_1(x, L+0)$ ,  $\sigma_{y1}(x, L+0)$ ,  $u_{x1}(x, L+0)$  и  $u_{y1}(x, L+0)$ . Будем считать, что искомые функции – распределения медленного роста на бесконечности (то есть функции, растущие на бесконечности не быстрее, чем полином некоторой степени) и, более того, следы функций – также распределения медленного роста на бесконечности. В работе [14] показано, что решения, соответствующие волне, уходящей в положительном направлении оси  $y$ , удовлетворяют равенствам, связывающим между собой образы Фурье следов компонент поля

$$\begin{aligned} \xi\tau_1(\xi, L) + \gamma_{1,1}(\xi)\sigma_{y1}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{1,1}(\xi)u_{x1}(\xi, L) - \\ - i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{y1}(\xi, L) &= 0, \\ -\gamma_{2,1}(\xi)\tau_1(\xi, L) + \xi\sigma_{y1}(\xi, L) + i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{x1}(\xi, L) - \\ - 2i\mu_1\xi\gamma_{2,1}(\xi)u_{y1}(\xi, L) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_{11}^2 = \rho_1\omega^2/(\lambda_1 + 2\mu_1)$ ,  $k_{21}^2 = \rho_1\omega^2/\mu_1$ , а ветви корней у функций  $\gamma_{1,1} = \sqrt{k_{11}^2 - \xi^2}$ ,  $\gamma_{2,1} = \sqrt{k_{21}^2 - \xi^2}$  выбираем так, чтобы вещественная часть была положительной, а в случае, если вещественная часть равна нулю, выбираем корни с положительной мнимой частью.

В равенствах (6) рассматриваются следы всех искомым функций при  $y = L$ , но так как рассматриваемые функции непрерывны во всей плоскости, предел будем понимать как значение при  $y = L$ . Аналогичным образом в дальнейшем будем поступать и для других следов искомым функций.

В равенствах (6) перейдем от следов функций из среды 1 к следам функций слоя. Для этого выразим их из условий (2) и подставим полученные выражения

в (6). Получим следующие граничные условия для образов Фурье компонент поля, определенных в слое:

$$\begin{aligned} \xi\tau_2(\xi, L) + \gamma_{1,1}(\xi)\sigma_{y2}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{1,1}(\xi)u_{x2}(\xi, L) - \\ - i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{y2}(\xi, L) = f_1(\xi), \\ - \gamma_{2,1}(\xi)\tau_2(\xi, L) + \xi\sigma_{y2}(\xi, L) + i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{x2}(\xi, L) - \\ - 2i\mu_1\xi\gamma_{2,1}(\xi)u_{y2}(\xi, L) = f_2(\xi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\xi) = \xi\tau_0(\xi, L) + \gamma_{1,1}(\xi)\sigma_{y0}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{1,1}(\xi)u_{x0}(\xi, L) - i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{y0}(\xi, L), \\ f_2(\xi) = -\gamma_{2,1}(\xi)\tau_0(\xi, L) + \xi\sigma_{y0}(\xi, L) + i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{x0}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{2,1}(\xi)u_{y0}(\xi, L). \end{aligned}$$

Исключим из полученных условий образы Фурье напряжений, используя уравнения (4). Получим таким образом уравнения, связывающие следы образов Фурье смещений в слое на верхней границе

$$\begin{aligned} a_1(\xi)u'_{x2}(\xi, L) + a_2(\xi)u_{x2}(\xi, L) + a_3(\xi)u'_{y2}(\xi, L) + a_4(\xi)u_{y2}(\xi, L) = f_1(\xi), \\ a_5(\xi)u'_{x2}(\xi, L) + a_6(\xi)u_{x2}(\xi, L) + a_7(\xi)u'_{y2}(\xi, L) + a_8(\xi)u_{y2}(\xi, L) = f_2(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\xi) = \mu_2(L)\xi, \quad a_2(\xi) = -(\lambda_2(L) + 2\mu_1)i\xi\gamma_{1,1}(\xi), \\ a_3(\xi) = (\lambda_2(L) + 2\mu_2(L))\gamma_{1,1}(\xi), \quad a_4(\xi) = -i(\rho_1\omega^2 - (2\mu_1 - \mu_2(L))\xi^2), \\ a_5(\xi) = -\mu_2(L)\gamma_{2,1}(\xi), \quad a_6(\xi) = i(\rho_1\omega^2 - (\lambda_2(L) + 2\mu_1)\xi^2), \\ a_7(\xi) = (\lambda_2(L) + 2\mu_2(L))\xi, \quad a_8(\xi) = -i(2\mu_1 - \mu_2(L))\xi\gamma_{2,1}(\xi). \end{aligned}$$

В нижней полуплоскости  $\{y < 0\}$  решения (1) будем искать в классе  $L_{1,\text{loc}}(R)$  с медленным ростом на бесконечности, считая, что следы  $\tau_3(x, 0)$ ,  $\sigma_{y3}(x, 0)$ ,  $u_{x3}(x, 0)$  и  $u_{y3}(x, 0)$  корректно определены и также принадлежат  $L_{1,\text{loc}}(R)$ . Тогда решения из класса распределений медленного роста, соответствующие волнам, уходящим в отрицательном направлении оси  $y$ , удовлетворяют уравнениям, связывающим следы образов Фурье компонент поля [14]

$$\begin{aligned} \xi\tau_3(\xi, 0) - \gamma_{1,3}(\xi)\sigma_{y3}(\xi, 0) + 2i\mu_3\xi\gamma_{1,3}(\xi)u_{x3}(\xi, 0) - i(\rho_3\omega^2 - 2\mu_3\xi^2)u_{y3}(\xi, 0) = 0, \\ \gamma_{2,3}(\xi)\tau_3(\xi, 0) + \xi\sigma_{y3}(\xi, 0) + i(\rho_3\omega^2 - 2\mu_3\xi^2)u_{x3}(\xi, 0) + 2i\mu_3\xi\gamma_{2,3}(\xi)u_{y3}(\xi, 0) = 0, \end{aligned}$$

которые эквивалентны условиям относительно следов составляющих поля на нижней границе:

$$\begin{aligned} \xi\tau_2(\xi, 0) - \gamma_{1,3}(\xi)\sigma_{y2}(\xi, 0) + 2i\mu_3\xi\gamma_{1,3}(\xi)u_{x2}(\xi, 0) - i(\rho_3\omega^2 - 2\mu_3\xi^2)u_{y2}(\xi, 0) = 0, \\ \gamma_{2,3}(\xi)\tau_2(\xi, 0) + \xi\sigma_{y2}(\xi, 0) + i(\rho_3\omega^2 - 2\mu_3\xi^2)u_{x2}(\xi, 0) + 2i\mu_3\xi\gamma_{2,3}(\xi)u_{y2}(\xi, 0) = 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4), получим

$$\begin{aligned} b_1(\xi)u'_{x2}(\xi, 0) + b_2(\xi)u_{x2}(\xi, 0) + b_3(\xi)u'_{y2}(\xi, 0) + b_4(\xi)u_{y2}(\xi, 0) = 0, \\ b_5(\xi)u'_{x2}(\xi, 0) + b_6(\xi)u_{x2}(\xi, 0) + b_7(\xi)u'_{y2}(\xi, 0) + b_8(\xi)u_{y2}(\xi, 0) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} b_1(\xi) = \mu_2(0)\xi, \quad b_2(\xi) = i(\lambda_2(0) + 2\mu_3)\xi\gamma_{1,3}(\xi), \\ b_3(\xi) = -(\lambda_2(0) + 2\mu_2(0))\gamma_{1,3}(\xi), \quad b_4(\xi) = -i(\rho_3\omega^2 - (2\mu_3 - \mu_2(0))\xi^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5(\xi) &= \mu_2(0)\gamma_{2,3}(\xi), & b_6(\xi) &= i(\rho_3\omega^2 - (\lambda_2(0) + 2\mu_3)\xi^2), \\ b_7(\xi) &= (\lambda_2(0) + 2\mu_2(0))\xi, & b_8(\xi) &= i(2\mu_3 - \mu_2(0))\xi\gamma_{2,3}(\xi). \end{aligned}$$

Решения уравнения (5) с граничными условиями (7) и (8) физически представляют собой смещения  $(u_{x2}, u_{y2})$ , которые описывают поле при  $0 < y < L$  в задаче дифракции на упругом слое.

#### 4. Аппроксимация задачи

Обозначим функции  $u_{x2}(\xi, y)$ ,  $u_{y2}(\xi, y)$  через  $u_x(y)$ ,  $u_y(y)$ , полагая  $\xi$  параметром. Тогда уравнение (5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (c_1 u'_x)' + c_2 u_x + c_3 u'_y + c_4 u_y &= 0, \\ (c_5 u'_y)' + c_6 u_y + c_7 u'_x + c_8 u_x &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 = \mu_2, & \quad c_2 = \rho_2\omega^2 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\xi^2, & c_3 = -i\xi(\lambda_2 + \mu_2), & \quad c_4 = -i\xi\mu'_2, \\ c_5 = \lambda_2 + 2\mu_2, & \quad c_6 = \rho_2\omega^2 - \mu_2\xi^2, & c_7 = -i\xi(\lambda_2 + \mu_2), & \quad c_8 = -i\xi\lambda'_2. \end{aligned}$$

Заметим, что  $c_n$  – функции от переменной  $y$  и параметра  $\xi$ . Уравнение (9) в новых обозначениях удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} b_1 u'_x(0) + b_2 u_x(0) + b_3 u'_y(0) + b_4 u_y(0) &= 0, \\ b_5 u'_x(0) + b_6 u_x(0) + b_7 u'_y(0) + b_8 u_y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} a_1 u'_x(L) + a_2 u_x(L) + a_3 u'_y(L) + a_4 u_y(L) &= f_1, \\ a_5 u'_x(L) + a_6 u_x(L) + a_7 u'_y(L) + a_8 u_y(L) &= f_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Сделаем некоторые замечания относительно зависимости решения задачи (9)–(11) от параметра  $\xi$ . Все коэффициенты краевой задачи являются непрерывными функциями по  $\xi$ . Тогда если правые части (11) являются регулярными распределениями по  $\xi$ , то и решения будем полагать также регулярными по параметру  $\xi$ . Если же  $f_1$  и  $f_2$  – сингулярные распределения по  $\xi$ , то и сами решения будем полагать также сингулярными. Например, если  $f_1 = C_1\delta(\xi - \xi_0)$  и  $f_2 = C_2\delta(\xi - \xi_0)$ , то  $u_x(y) = \delta(\xi - \xi_0)w_x(y; \xi_0)$  и  $u_y(y) = \delta(\xi - \xi_0)w_y(y; \xi_0)$ . В таком случае удобно «пронормировать» граничную задачу на  $\delta(\xi - \xi_0)$ . Для этого формально заменим всюду  $\xi$  на  $\xi_0$  и разрешим (9)–(11) относительно  $w_x(y; \xi_0)$  и  $w_y(y; \xi_0)$ .

Поэтому в случае, когда образы Фурье следов падающего поля являются сингулярными распределениями, например в случае, если падающая волна является плоской, решением задачи будут также сингулярные распределения с таким же носителем. Отсюда следует, что в результате дифракции одной плоской волны отражается и проходит по две волны – продольная и поперечная.

Построим разностные аппроксимации уравнений (9) с погрешностью аппроксимации  $O(h^2)$ , где  $h$  – шаг по сетке:

$$\begin{aligned} -u_{x,i-1}c_{1,i-1/2} + u_{x,i}(c_{1,i-1/2} + c_{1,i+1/2} - c_{2,i}h^2) - u_{x,i+1}c_{1,i+1/2} + \\ + u_{y,i-1}c_{3,i}\frac{h}{2} - u_{y,i}c_{4,i}h^2 - u_{y,i+1}c_{3,i}\frac{h}{2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& -u_{y,i-1}c_{5,i-1/2} + u_{y,i}(c_{5,i-1/2} + c_{5,i+1/2} - c_{6,i}h^2) - u_{y,i+1}c_{5,i+1/2} + \\
& + u_{x,i-1}c_{7,i}\frac{h}{2} - u_{x,i}c_{8,i}h^2 - u_{x,i+1}c_{7,i}\frac{h}{2} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Далее аппроксимируем граничные условия (10)

$$\begin{aligned}
& -u_{x,N-1}a_1 + u_{x,N}(a_1 + a_2h) - u_{y,N-1}a_3 + u_{y,N}(a_3 + a_4h) = f_1h, \\
& -u_{x,N-1}a_5 + u_{x,N}(a_5 + a_6h) - u_{y,N-1}a_7 + u_{y,N}(a_7 + a_8h) = f_2h
\end{aligned} \quad (14)$$

и условия (11)

$$\begin{aligned}
& u_{x,0}(b_1 - b_2h) - u_{x,1}b_1 + u_{y,0}(b_3 - b_4h) - u_{y,1}b_3 = 0, \\
& u_{x,0}(b_5 - b_6h) - u_{x,1}b_5 + u_{y,0}(b_7 - b_8h) - u_{y,1}b_7 = 0.
\end{aligned} \quad (15)$$

Представим (12)–(15) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}$$

с векторами-столбцами

$$\mathbf{u}_x = \begin{pmatrix} u_{x,0} \\ u_{x,1} \\ \vdots \\ u_{x,N-1} \\ u_{x,N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_y = \begin{pmatrix} u_{y,0} \\ u_{y,1} \\ \vdots \\ u_{y,N-1} \\ u_{y,N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_1h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2h \end{pmatrix}$$

и трехдиагональными матрицами

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 - b_2h & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{1,1/2} & d_1 & -c_{1,3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{1,3/2} & d_2 & -c_{1,5/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{1,N-5/2} & d_{N-2} & -c_{1,N-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{1,N-3/2} & d_{N-1} & -c_{1,N-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & a_1 + a_2h \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} b_7 - b_8h & -b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{5,1/2} & j_1 & -c_{5,3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{5,3/2} & j_2 & -c_{5,5/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{5,N-5/2} & j_{N-2} & -c_{5,N-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{5,N-3/2} & j_{N-1} & -c_{5,N-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_7 & a_7 + a_8h \end{pmatrix},$$

где  $d_i = c_{1,i-1/2} + c_{1,i+1/2} - c_{2,i}h^2$ ,  $j_i = c_{5,i-1/2} + c_{5,i+1/2} - c_{6,i}h^2$ ,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_5 - b_6 h & -b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{7,1} \frac{h}{2} & -c_{8,1} h^2 & -c_{7,1} \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{7,2} \frac{h}{2} & -c_{8,2} h^2 & -c_{7,2} \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{7,N-2} \frac{h}{2} & -c_{8,N-2} h^2 & -c_{7,N-2} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{7,N-1} \frac{h}{2} & -c_{8,N-1} h^2 & -c_{7,N-1} \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & a_5 + a_6 h \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_3 - b_4 h & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{3,1} \frac{h}{2} & -c_{4,1} h^2 & -c_{3,1} \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{3,2} \frac{h}{2} & -c_{4,2} h^2 & -c_{3,2} \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{3,N-2} \frac{h}{2} & -c_{4,N-2} h^2 & -c_{3,N-2} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,N-1} \frac{h}{2} & -c_{4,N-1} h^2 & -c_{3,N-1} \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_3 + a_4 h \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая задача дифракции сведена к системе линейных алгебраических уравнений (12)–(15) с ленточными матрицами.

### 5. Численные результаты

Смещения в однородной изотропной  $n$ -й среде в общем виде могут быть представлены следующим образом [15]:

$$u_{xn}(y) = \xi A_n e^{-i\gamma_{1n}y} - \xi B_n e^{i\gamma_{1n}y} + \gamma_{2n} C_n e^{-i\gamma_{2n}y} + \gamma_{2n} D_n e^{i\gamma_{2n}y},$$

$$u_{yn}(y) = \gamma_{1n} A_n e^{-i\gamma_{1n}y} + \gamma_{1n} B_n e^{i\gamma_{1n}y} - \xi C_n e^{-i\gamma_{2n}y} + \xi D_n e^{i\gamma_{2n}y}.$$

С учетом условия на бесконечности и выводов п. 4 относительно отраженного и прошедшего полей смещения для отраженного поля примут вид

$$u_{x1}(y) = -\xi_0 B_1 e^{i\gamma_{11}(y-L)} + \gamma_{21} D_1 e^{i\gamma_{21}(y-L)},$$

$$u_{y1}(y) = \gamma_{11} B_1 e^{i\gamma_{11}(y-L)} + \xi_0 D_1 e^{i\gamma_{21}(y-L)},$$

а для прошедшего –

$$u_{x3}(y) = \xi_0 A_3 e^{-i\gamma_{13}y} + \gamma_{23} C_3 e^{-i\gamma_{23}y},$$

$$u_{y3}(y) = \gamma_{13} A_3 e^{-i\gamma_{13}y} - \xi_0 C_3 e^{-i\gamma_{23}y}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $A_3$  и  $C_3$  сперва решим численно задачу (12)–(15). Затем из (2), (3) найдем следы компонент полей

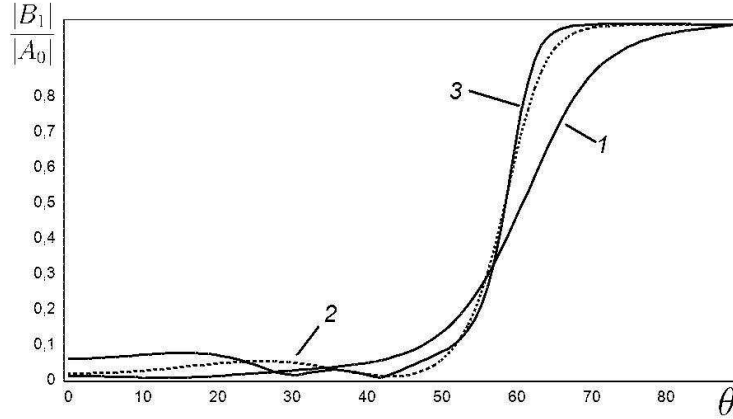


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения  $|B_1|/|A_0|$  для волны вида (16), дифрагирующей на градиентной полосе толщиной  $L = 10$  м, расположенной в песчанике ( $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_p = 3300$  м/с,  $v_s = 2000$  м/с), от угла падения  $\theta$ . До середины слоя продольная и поперечная скорости линейно увеличиваются до значений  $v_p^{\max} = 3900$  м/с и  $v_s^{\max} = 2360$  м/с соответственно, а затем линейно уменьшаются до первоначальных значений. Первый график соответствует круговой частоте  $\omega = 2 \cdot 10^3$ , второй –  $\omega = 4 \cdot 10^3$ , третий –  $\omega = 6 \cdot 10^3$

в полуплоскостях и неизвестные коэффициенты. Например, если определить следы смещений, то

$$B_1 = \frac{u_{y1}\gamma_{21} - u_{x1}\xi_0}{\gamma_{11}\gamma_{21} + \xi_0^2}, \quad D_1 = \frac{u_{x1}\gamma_{11} + u_{y1}\xi_0}{\gamma_{11}\gamma_{21} + \xi_0^2},$$

$$A_3 = \frac{u_{y3}\gamma_{23} + u_{x3}\xi_0}{\gamma_{13}\gamma_{23} + \xi_0^2}, \quad C_3 = \frac{u_{x3}\gamma_{13} - u_{y3}\xi_0}{\gamma_{13}\gamma_{23} + \xi_0^2},$$

где  $u_{xn}$  и  $u_{yn}$  – следы смещений  $n$ -й среды.

Пусть на слой набегают плоская продольная волна со смещениями вида

$$\begin{aligned} u_{x0}(x, y) &= A_0 k_{1,1} \sin \theta \exp\{-ik_{1,1} \sin \theta x - ik_{1,1} \cos \theta (y - L)\}, \\ u_{y0}(x, y) &= A_0 k_{1,1} \cos \theta \exp\{-ik_{1,1} \sin \theta x - ik_{1,1} \cos \theta (y - L)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Применим преобразование Фурье к компонентам падающего поля, получим дельта-распределение  $\delta(\xi - \xi_0)$ ,  $\xi_0 = k_{1,1} \sin \theta$ . При этом  $\gamma_{1,1}(\xi_0) = k_{1,1} \cos \theta$ . Так как правые части (11) являются сингулярными распределениями, то задачу (12)–(15) достаточно решить при одном  $\xi = \xi_0$ .

Приведем результаты численных расчетов для песчаника с постоянными плотностью  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup> и скоростями  $v_p = 3300$  м/с и  $v_s = 2000$  м/с во всей плоскости, за исключением слоя толщиной  $L = 10$  м. В первой половине слоя продольная скорость линейно увеличивается с  $v_p = 3300$  м/с до  $v_p^{\max} = 3900$  м/с, а затем происходит линейное уменьшение до прежней скорости  $v_p$ . На этой неоднородности также изменяется и поперечная скорость от  $v_s = 2000$  м/с до  $v_s^{\max} = 2360$  м/с, таким образом, что во всей плоскости выполняется соотношение  $v_p(y)/v_s(y) = 1.65$ .

На рис. 2 показана зависимость коэффициента отражения  $|B_1|/|A_0|$  для волны вида (16) от угла падения  $\theta$ . Можно сделать выводы о том, что при малых углах (менее  $40^\circ$ ) подавляющая часть энергии проходит в среду 3. При  $\theta > 70^\circ$  большая часть энергии переходит в отраженную продольную волну. В переходной



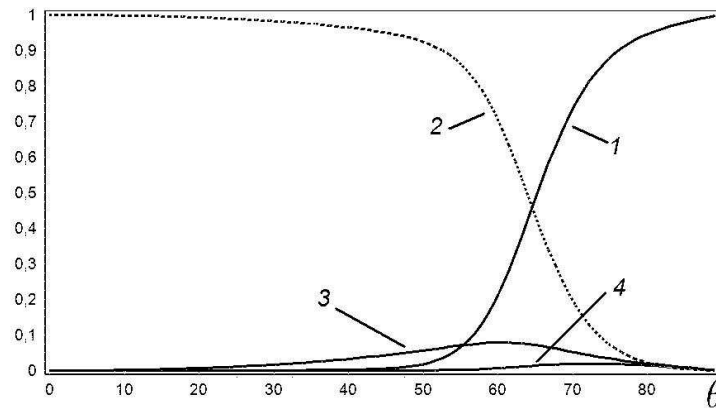


Рис. 3. Зависимость прошедшей и отраженной энергии от угла падения  $\theta$  волны вида (16) на градиентный слой толщины  $L = 10$  м при частоте  $\omega = 2 \cdot 10^3$ . Параметры совпадают с параметрами рис. 2. Первый график соответствует энергии отраженной продольной волны, 2 – прошедшей продольной, 3 – отраженной поперечной, 4 – прошедшей поперечной

зоне при  $\theta \in (40^\circ, 70^\circ)$  малые частоты соответствуют более медленному нарастанию коэффициента отражения, большие частоты – более резкому изменению «прозрачности» слоя на полное отражение.

На рис. 3 показано распределение энергии между возбуждаемыми в полуплоскостях волнами в зависимости от угла падения  $\theta$ . Видно, что основная энергия распределяется между продольными волнами. Лишь в переходной зоне доля энергии, уносимая поперечными волнами, увеличивается, достигая  $\approx 0.1$ .

## 6. Выводы

Представленный в работе метод эффективен прежде всего, когда образы Фурье следов падающего поля являются сингулярными распределениями. Тогда аппроксимирующая задача решается при одном  $\xi = \xi_0$ . Если же образы Фурье – регулярные распределения (например, при дифракции на пластине гауссова пучка), то задачу (12)–(15) нужно решать при нескольких параметрах  $\xi$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-97012-р\_поволжье\_a).

## Summary

*A. V. Anufrieva, D. N. Tumakov.* Diffraction of a Plane Elastic Wave by a Gradient Layer.

In this article, the problem of diffraction of a plane elastic wave by a gradient layer isotropic in a transverse direction is investigated. A system of second-order ordinary differential equations with boundary conditions of the third kind is obtained using an overdetermined boundary-value problem. This system is solved by the grid method. The calculation results for the case of piecewise linear scaling of elastic wave velocities are given.

**Key words:** diffraction, elastic wave, gradient layer.

## Литература

1. *Slawinski M.A.* Seismic Waves and Rays in Elastic Media. – Amsterdam: Pergamon, 2003. – 402 p.
2. *Wen W., Sheng P.* Two- and three-dimensional ordered structures formed by electro-magnetorheological colloids // *Physica B.* – 2003. – V. 338, No 1. – P. 343–346.
3. *Milton G.W., Briane M., Willis J.R.* On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form // *New J. Phys.* – 2006. – V. 8, No 10. – P. 248-1–248-20.
4. *Chen H., Chan C.T.* Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials // *Appl. Phys. Lett.* – 2007. – V. 91, No 18. – P. 183518-1–183518-3.
5. *Lee S.-J., Moon S.E., Ryu H.-C., Kwak M.-H., Kim Y.-T., Han S.-K.* Microwave properties of compositionally graded (Ba,Sr)TiO<sub>3</sub> thin films according to the direction of the composition gradient for tunable microwave applications // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – V. 82, No 13. – P. 2133–2135.
6. *Chakraborty A.J.* Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory // *Acoust. Soc. Am.* – 2008. – V. 123. – P. 56–67.
7. *Бреховских Л.М., Годун О.А.* Акустика слоистых сред. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
8. *Epstein P.* Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* – 1930. – V. 16, No 10. – P. 627–637.
9. *Бреховских Л.М.* Акустика океанской среды. – М.: Наука, 1989. – 222 с.
10. *Ярошенко А.А., Ластовенко О.Р., Лисютин В.А., Калинюк И.В.* О влиянии профиля скорости звука и течений на распространение акустических волн в море // *Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка.* – 2007. – № 1. – С. 178–186.
11. *Шварцбург А.Б., Ерохин Н.С.* Градиентные акустические барьеры (точно решаемые барьеры) // *Усп. физ. наук.* – 2011. – Т. 181, № 6. – С. 627–646.
12. *Anufrieva A.V., Tumafov D.N., Kipot V.L.* Elastic wave propagation through a layer with graded-index distribution of density // *Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction 2012”.* – St. Petersburg, Russia, 2012. – P. 21–26.
13. *Приходько В.Ю., Тютюкин В.В.* Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // *Акуст. журн.* – 1986. – Т. 32, № 2. – С. 122–129.
14. *Плецинская И.Е., Плецинский Н.Б.* Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 4–32.
15. *Вдовина К.Н., Плецинский Н.Б., Тумаков Д.Н.* Об ортогональности собственных волн полукрытого упругого волновода // *Изв. вуз. Матем.* – 2008. – № 9. – С. 69–75.

Поступила в редакцию  
02.11.12

---

**Ануфриева Анастасия Вадимовна** – студент Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: [nastya-anufrieva@mail.ru](mailto:nastya-anufrieva@mail.ru)

**Тумаков Дмитрий Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: [dtumakov@ksu.ru](mailto:dtumakov@ksu.ru)