УДК 519.21

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В.Т. Дубровин

Аннотация

Пусть W – невырожденная целочисленная матрица такая, что $|\det W| > 1$, f – заданная на единичном гиперкубе в R^d вещественнозначная периодическая по каждому аргументу липшиц-непрерывная функция. Для последовательности $(f(tW^n))$ доказана центральная предельная теорема с большими уклонениями с промежутком действия $[1; \mathrm{o}\,(n^{1/8}/\ln n)]$.

Ключевые слова: предельная теорема, эндоморфизмы, большие уклонения.

В работе [1] исследована скорость сходимости в центральной предельной теореме для преобразования $Tt = \{tW\}$, где $t \in \Omega_d$, Ω_d – d-мерный тор, W – невырожденная целочисленная матрица, $\{\cdot\}$ – обозначение дробной доли. Целью настоящей работы является доказательство предельной теоремы с большими уклонениями для преобразование T, то есть исследование поведения функции распределения

$$F_n(x) = \mathrm{mes}\left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f(tW^k) < x \right\}$$

в случае, когда x растет вместе с n. Здесь $\mathrm{mes}\{\cdot\}$ – мера Лебега, определенная на гиперкубе $\overline{\Omega}_d = \{t = (t_1, \ldots, t_d) : \ \ 0 \le t_i \le 1, \ i = 1, \ldots, d\}$; $f(t)$ – вещественнозначная периодическая по каждому $t_1, \ldots, t_d$ функция, заданная на $\overline{\Omega}_d$; $\sigma^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(tW^k) \right)^2 dt$.

Ранее в работе [2] был получен результат аналогичного характера. В предположении существования предела

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2 > 0$$

и справедливости условий:

1) существует такая постоянная $A > 0$, что

$$|f(t) - f(t')| \le A\,||t - t'||, \quad t, t' \in \overline{\Omega}_d, \|t\| = \left(\sum_{i=1}^{d} t_i^2 \right)^{1/2};$$

2) матрица W такова, что

$$\sup_{\|t\|<1} \| \, t\, W^{-1} \, \| < 1, \quad |\det W| > 1\,;$$

3) f интегрируема по Лебегу на $\overline{\Omega}_d$ и $\int\limits_{\overline{\Omega}_d} f(t)\,dt = 0$.

Равномерно относительно x, $0 \le x \le \mathrm{O}\left(\dfrac{n^{1/10}}{w(n)\ln^2 n}\right)$, имеют место соотношения для больших уклонений

$$1 - F_n(x) = (1 - \varPhi(x))\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{(x+1)\ln^2 n}{n^{1/10}}\right)\right),$$

$$F_n(-x) = \varPhi(-x)\,\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{(x+1)\ln^2 n}{n^{1/10}}\right)\right),$$

где функция w такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} w(n) = \infty$, $\varPhi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\,du$.

В работе [1] для преобразования T доказана центральная предельная теорема с остаточным членом вида $\mathrm{O}\left(n^{-1/2+\varepsilon}\right)$, где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число. Используя этот результат, можно продвинуться дальше при исследовании асимптотического поведения функции $1 - F_n(x)$ в случае больших уклонений, то есть роста x вместе с n.

Теорема 1. *Если при выполнении условий* 1–3 *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2 > 0,$$

то при $x \ge 1$, $x = \mathrm{o}(n^{1/8}/\ln n)$ *справедливы соотношения*

$$1 - F_n(x) = (1 - \varPhi(x))\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{x\ln n}{n^{1/8}}\right)\right), \quad F_n(-x) = \varPhi(-x)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{x\ln n}{n^{1/8}}\right)\right).$$

Доказательство. Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа (их мы определим позднее), $p = [n/(Q+N)]$ ($[a]$ – обозначение целой части числа a),

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N} f(tW^r), \quad 1 \le k \le p,$$

$$\eta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=k\,Q+(k-1)N+1}^{k(Q+N)} f(tW^r), \quad 1 \le k \le p-1,$$

$$\eta_p^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=p\,Q+(p-1)N+1}^{n} f(tW^r),$$

$$\zeta_p = \sum_{r=1}^{p} \eta_r, \quad \zeta_p^0 = \sum_{r=1}^{p} \eta_r^0, \quad \widehat{\zeta}_p = \sum_{r=1}^{p} \widehat{\eta}_r, \quad \widehat{\zeta}_p{}^0 = \sum_{r=1}^{p} \widehat{\eta}_r{}^0,$$

где $\widehat{\eta}_k$, $\widehat{\eta}_k^{\,0}$, $k=1,\dots,p$, – величины, удовлетворяющие условиям:

1) $\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \widehat{\eta}_k<x\}=\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \eta_k<x\}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{i\,l}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \widehat{\zeta}_p\right)dt=\prod_{k=1}^{p}\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{i\,l}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \widehat{\eta}_k\right)dt.$

Здесь $\displaystyle\sigma^2(Q)=\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\left(\frac{1}{\sqrt{Q}}\sum_{k=1}^{Q}f(tW^k)\right)^2dt.$

Пусть также

$$F_p(x)=\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \frac{\zeta_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}}>x\},\qquad \widehat{F}_p(x)=\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \frac{\widehat{\zeta}_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}}>x\},$$

$$F_p^0(x)=\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \frac{\zeta_p^0}{\sigma(Q)\sqrt{p}}>x\},\qquad \widehat{F}_p^{\,0}(x)=\operatorname{mes}\{t: t\in\overline{\Omega}_d, \frac{\widehat{\zeta}_p^{\,0}}{\sigma(Q)\sqrt{p}}>x\},$$

$$f_p(l)=\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \zeta_p\right)dt,\qquad \widehat{f}_p(l)=\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \widehat{\zeta}_p\right)dt,$$

$$f_p^0(l)=\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \zeta_p^0\right)dt,\qquad \widehat{f}_p^{\,0}(l)=\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\ \widehat{\zeta}_p^{\,0}\right)dt.$$

Через C_k будем обозначать в дальнейшем положительные постоянные. Докажем необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\left(\sum_{k=1}^{m}f(tW^k)\right)^{2\nu}dt\le(C_1)^{2\nu}(\ln m)^{\nu}m^{\nu}(2\nu)!\,,$$

если $\nu\le C\sqrt{m/\ln m}$, C *– некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Запишем

$$\sum_{k=1}^{m}f(tW^k)=\sum_{r=1}^{K}\widetilde{\eta}_r(t),$$

где $\displaystyle\widetilde{\eta}_r(t)=\sum_{l=0}^{N_r}f(tW^{lK+r})$, $N_r=\left[\frac{m-r}{K}\right]+1$, K – некоторое число, которое мы определим позднее.

Далее, применяем обобщенное c_r-неравенство

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\left(\sum_{r=1}^{K}\widetilde{\eta}_r(t)\right)dt\le K^{2\nu-1}\sum_{r=1}^{K}\quad\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\widetilde{\eta}_r^{\,2\nu}(t)\,dt. \tag{1}$$

Произведем оценку $\int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\eta}_r^{\,2\nu}(t)\,dt$. Для облегчения записи обозначим $f(tW^{lK+r})$ через $\widetilde{\xi}_{l+1}(t)$. Имеем

$$\int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\eta}_r^{\,2\nu}(t)\,dt = \int\limits_{\Omega_d} \left(\sum_{l=1}^{N_r+1} \widetilde{\xi}_l(t)\right)^{2\nu} dt \ =$$

$$= \sum_{q=1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_q=2\nu,\\ \nu_i\geq 1,\\ 1\leq k_1\neq\cdots\neq k_q\leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_q!} \int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\xi}_{k_1}^{\,\nu_1}(t)\cdots\widetilde{\xi}_{k_q}^{\,\nu_q}(t)\,dt. \quad (2)$$

Функция f липшиц-непрерывна (в силу условия 1 теоремы). Следовательно, величины $\widetilde{\xi}_l(t)$ являются ограниченными. Допустим, что $|\widetilde{\xi}_l(t)| \leq B$, где B – некоторая постоянная. Используя ограниченность величин $\widetilde{\xi}_l(t)$, оценим часть суммы (2) с $1 \leq q \leq \nu$ при условии, что $\nu \leq N_r + 1$:

$$\sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_q=2\nu,\\ \nu_i\geq 1,\\ 1\leq k_1\neq\cdots\neq k_q\leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_q!} \int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\xi}_{k_1}^{\,\nu_1}(t)\cdots\widetilde{\xi}_{k_q}^{\,\nu_q}(t)\,dt \ \leq$$

$$\leq \ B^{2\nu} \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_q=2\nu,\\ \nu_i\geq 1}} \frac{(N_r+1)^q}{\nu_1!\cdots\nu_q!} \ \leq$$

$$\leq \ B^{2\nu} \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \,(N_r+1)^q \cdot e^q \leq (C_2\sqrt{e})^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} \,(N_r+1)^{\nu}. \quad (3)$$

Оценим теперь оставшуюся часть суммы (2) применяя лемму 2 из [2]:

$$\sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_q=2\nu,\\ \nu_i\geq 1,\\ 1\leq k_1\neq\cdots\neq k_q\leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_q!} \int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\xi}_{k_1}^{\,\nu_1}(t)\cdots\widetilde{\xi}_{k_q}^{\,\nu_q}(t)\,dt \ \leq$$

$$\leq \ (Be)^{2\nu}(C_3)^{\nu}\theta^K \sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!}(N_r+1)^q, \quad (4)$$

где $0 < \theta < 1$.

Далее,

$$\sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(N_r+1)^{q-\nu}}{q!} \leq (C_4)^{2\nu} \frac{(N_r+1)^{\nu}}{\nu!},$$

поэтому из (2) с учетом оценок (3) и (4) получим

$$\int\limits_{\Omega_d} \widetilde{\eta}_r^{\,2\nu}(t)\,dt \leq (C_5)^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!}(N_r+1)^{\nu}\left(1+\theta^K(N_r+1)^{\nu}\right). \quad (5)$$

Очевидно, что $N_r^{\nu} \leq 2^{\nu}\left(\dfrac{m}{K}\right)^{\nu}$. Исходя из этого величины K и ν будем выбирать из условия

$$\theta^K \left(\frac{m}{K}\right)^{\nu} \leq C_6. \quad (6)$$

Предположим, что $K \le m/3$. Тогда условие (6) будет выполняться, если

$$K \in \left(\nu \ln m,\ \frac{m}{3}\right). \tag{7}$$

Пусть $K = [\nu \ln m] + 1$. Если $\nu \le C_7\, m/\ln m$, то выбранное K будет принадлежать интервалу (7). В то же время $\nu \le N_r + 1$. Отсюда, так как $N_r \le C_8\, m/K$, следует, что

$$\nu \le C_9 \sqrt{\frac{m}{\ln m}}.$$

Таким образом, оценка леммы 1 верна при $\nu \le C_9 \sqrt{m/\ln m}$.
Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \exp\left(h \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|\right) dt \le C_{10} < \infty, \tag{8}$$

где $0 < h < \varepsilon_0/\sqrt{\ln Q}$, ε_0 *– достаточно малое фиксированное положительное число.*

Доказательство. Имеем:

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \exp\left(h \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|^k dt. \tag{9}$$

При $k \le C_9\sqrt{Q/\ln Q}$ из леммы 1 следует оценка

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|^k dt \le (C_1)^k k! \ln^{k/2} Q. \tag{10}$$

При $k > C_9\sqrt{Q/\ln Q}$ используем очевидную оценку

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|^k dt \le C_{11}\, Q^{k/2}. \tag{11}$$

Тогда из неравенств (10), (11) следует

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \exp\left(h \left|\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(tW^r)\right|\right) dt \le C_{10} < \infty.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\mathrm{mes}\left\{ t:\ t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sqrt{m}} \left|\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right| \ge w\right\} \le \exp\left(-C_{12}\, \frac{w}{\ln^{\lambda} m}\right), \tag{12}$$

где $\lambda > 1/2$ *– постоянная.*

Доказательство. По неравенству Маркова

$$\operatorname{mes}\left\{t : t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sqrt{m}}\ \left|\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right| \geq w\right\} \leq \frac{1}{m^{\nu} w^{2\nu}} \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left|\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right|^{2\nu} dt.$$

Пусть $\nu \leq C_{13}\sqrt{m/\ln m}$. В этом случае, используя оценку из леммы 1, получим

$$\operatorname{mes}\left\{t : t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sqrt{m}}\left|\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right| \geq w\right\} \leq \exp\left(-C_{14}\,\frac{w}{\ln^{\lambda} m}\right),$$

если только $w \leq C_{15}\sqrt{m}\,\ln^{\lambda_1} m$ $(\lambda_1 > 0, \lambda - \lambda_1 > 1/2)$.

Поскольку для $B < w/\sqrt{m}$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left(\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right)^{2\nu} dt \leq B^{2\nu}\, m^{\nu},$$

то, выбирая $\nu = C_{16}\, w/\ln^{\lambda} m$, получим

$$\operatorname{mes}\left\{t : t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sqrt{m}}\left|\sum_{r=1}^{m} f(tW^r)\right| \geq w\right\} \leq \exp\left(-C_{17}\,\frac{w}{\ln^{\lambda} m}\right).$$

Полученные оценки доказывают лемму 3. □

Лемма 4. *Пусть* $\widehat{\mu}_{\nu} = \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{\eta_1}{\sigma(Q)}\right)^{\nu} dt$, μ_{ν} – ν*-й момент нормальной нормированной величины. Тогда если*

$$\operatorname{mes}\left\{t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{m}}\ \sum_{r=1}^{m} f(tW^r) < x\right\} = \Phi(x) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{1+|x|^{\beta}}\,\frac{1}{m^{\alpha}}\right),$$

где $\beta > 1$, $0 \leq \alpha < 1/2$, *то*

$$\widehat{\mu}_{\nu} = \mu_{\nu} + \mathrm{O}\left((C_{18})^{\nu}\, \nu!\, \ln^{(\lambda+1)\nu}\ Q\,\frac{1}{Q^{\alpha}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\overline{F}_Q(x) = \operatorname{mes}\left\{t : t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{\eta_1}{\sigma(Q)} < x\right\}.$$

По условию настоящей леммы

$$\overline{F}_Q(x) = \Phi(x) + R_Q(x),$$

где

$$|R_Q(x)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1+|x|^{\beta}}\,\frac{1}{Q^{\alpha}}\right). \tag{14}$$

Отсюда следует

$$\widehat{\mu}_\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu \, d\Phi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\nu \, dR_Q(x) = \mu_\nu + \int\limits_{-N_1}^{N_1} x^\nu \, dR_Q(x) + \int\limits_{|x|>N_1} x^\nu \, dR_Q(x). \quad (15)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части (15). Первый из них оценим, используя (14):

$$\left| \int\limits_{-N_1}^{N_1} x^\nu \, dR_Q(x) \right| \le C_{19} \, N_1^\nu \, \frac{1}{Q^\alpha}. \quad (16)$$

Применяя оценку (12), можно доказать, что

$$|R_Q(x)| \le C_{20} \, \exp\left(-C_{21} \, \frac{|x|}{\ln^\lambda Q} \right),$$

следовательно,

$$\left| \int\limits_{|x|>N_1} x^\nu \, dR_Q(x) \right| = C_{22} \, \frac{N_1^\nu}{Q^\alpha} + C_{23} \, \nu \int\limits_{N_1}^{+\infty} x^{\nu-1} \exp\left(-C_{21} \, \frac{x}{\ln^\lambda Q} \right) dx. \quad (17)$$

Выберем $N_1 = \nu \ln^{(\lambda+1)} Q$. Оценки (16) и (17) подставим в (15). В результате получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $\lambda^{(m)}(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^k$ *– ряд Крамера* [1]*, построенный для величины* $(\sigma(m)\sqrt{m}\,)^{-1} \sum\limits_{r=1}^{m} f(tW^r)$. *Если*

$$\operatorname{mes}\left\{ t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \sum_{r=1}^{m} f(tW^r) < x \right\} = \Phi(x) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{1+|x|^\beta} \, \frac{1}{m^\alpha} \right),$$

где $\beta > 1$, $0 \le \alpha < 1/2$, *то*

$$\lambda^{(m)}(\tau) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln^5 m}{m^\alpha} \right)$$

при $|\tau| \le \delta / \ln^2 m$ (δ *– достаточно малое положительное число*).

Доказательство. Положим

$$M(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(zx) \, d\Phi(x), \quad K(z) = \ln M(z),$$

$$M_1(z) = \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \exp\left(z \, \frac{\eta_1}{\sigma(Q)} \right) dt, \quad K_1(z) = \ln M_1(z),$$

[1] См. [3, гл. VII, § 2].

Существование $M_1(z)$ при $|z| \le \varepsilon/\sqrt{\ln Q}$ гарантируется леммой 2. Запишем

$$M_1(z) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_\nu \, z^\nu}{\nu!} \tag{18}$$

Далее, используя асимптотическое разложение (13) из леммы 4, получим при $|z| \le 1/\left(\ln^{\lambda+1} Q\right)$

$$M_1(z) = M(z) + \mathrm{O}\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\, z^3\right),$$

а также

$$M_1'(z) = M'(z) + \mathrm{O}\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\, z^2\right).$$

Из этих соотношений следует

$$K_1(z) = K(z) + \ln\frac{M_1(z)}{M(z)} = \frac{z^2}{2}\left(1 + \mathrm{O}\left(z\,\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right)$$

и

$$K_1'(z) = \frac{M_1'(z)}{M_1(z)} = z\left(1 + \mathrm{O}\left(z\,\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right), \tag{19}$$

так как $M(z) = \exp(z^2/2)$.

Решая относительно z уравнение $K_1'(z) - \tau = 0$, получим

$$z = z_0(\tau) = \tau\left(1 + \mathrm{O}\left(\tau\,\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right), \tag{20}$$

если только $|\tau| \le 1/\left(\ln^{\lambda+1} Q\right)$. В силу (19) при $|\tau| \le 1/\left(\ln^{\lambda+1} Q\right)$ из (20) следует

$$K_1(z_0(\tau)) = \frac{\tau^2}{2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\tau\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right).$$

Так как ряд Крамера $\lambda^m(\tau)$ определяется из соотношения (см. гл. VII [3])

$$K_1(z_0(\tau)) - \tau z_0(\tau) = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3\lambda^m(\tau),$$

где $z_0(\tau)$ дается равенством (20), то мы получим при $|\tau| \le 1/\left(\ln^{\lambda+1} Q\right)$

$$\lambda^m(\tau) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\tau\,\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right) + \frac{1}{2} - \left(1 + \mathrm{O}\left(\tau\,\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right)\right)\right) = \\ = \mathrm{O}\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^\alpha}\right).$$

Поскольку $\lambda > 1/2$, то из полученного асимптотического равенства следует утверждение леммы 5. □

Лемма 6. *При* $x \geq 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p \ln n}\, \ln^{-2} N\right)\right)$, $N = \mathrm{o}\,(Q)$ *справедлива оценка*

$$\mathrm{mes}\left\{t:\, t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\, \left|\zeta_p^0\right| > x\, w \sqrt{N \ln n/Q}\right\} = \mathrm{O}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x\, n^w} + \sqrt{\frac{p}{N}}\, e^{-C_{24}\, Q}\right),$$

где w *– достаточно большое фиксированное положительное число.*

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{mes}\left\{\, t:\, t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\, \widehat{\zeta}_p^{\,0} > y \right\} =$$
$$= \mathrm{mes}\left\{t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{\sigma(N)}{\sigma(Q)} \sqrt{N/Q}\, \frac{1}{\sigma(N)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{p} \left(\sqrt{Q/N}\, \widehat{\eta}_k^{\,0}\right) > y\right\}. \quad (21)$$

Докажем, что $\sigma(Q) = \sigma(1 + \mathrm{O}\,(1/Q))$. Запишем, используя теорему 18.2.1 [3]:

$$\sigma^2(Q) = \int\limits_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^{Q} f(tW^k)\right)^2 dt \ =$$
$$= \frac{1}{Q}\left(Q \int\limits_{\overline{\Omega}_d} f^2(tW)\, dt + 2 \sum_{j=1}^{Q} (Q-j) \int\limits_{\overline{\Omega}_d} f(tW)\, f(tW^{j+1})\, dt\right).$$

В силу леммы 2 [2] имеем

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_d} f(tW)\, f(tW^{j+1})\, dt = \mathrm{O}\,(\theta^j), \quad 0 < \theta < 1,$$

следовательно,

$$\sigma^2(Q) = \sigma^2(1 + \mathrm{O}\,(1/Q)).$$

Отсюда следует

$$\sigma(Q) = \sigma(1 + \mathrm{O}\,(1/Q)).$$

Тогда мы можем записать (21) следующим образом:

$$\widehat{F}_p^{\,0}(y) = \mathrm{mes}\left\{t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(N)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{p} \left(\sqrt{Q/N}\, \widehat{\eta}_k^{\,0}\right) > y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right\},$$

где $\Delta_1 = \mathrm{O}\left(y\sqrt{Q/N}\right)$.

Применим к правой части данного выражения теорему 1 [4] о больших уклонениях для независимых и разнораспределенных слагаемых, после чего получим, что равномерно для всех $y\sqrt{Q/N} + \Delta_1$ из интервала $\left[1, \sqrt{p}/w(p)\sqrt{\ln N}\right]$

$$\widehat{F}_p^{\,0}(y) = \left(1 - \varPhi\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\right) \exp\left(\frac{(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1)^3}{\sqrt{p}}\ \times\right.$$
$$\left.\times\ \lambda_p \left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right) \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right), \quad (22)$$

где $\lambda_p(u)$ – степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях $|u|$ равномерно для всех p, $w(p)$ – функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{p\to\infty} w(p) = \infty$.

Степенной ряд $\lambda_p(u)$ записывается следующим образом (см. (10) в [4]):

$$\lambda_p(u) = \frac{1}{6}\,\frac{\Gamma_{3p}}{\Gamma_{2p}^{1/2}} + \frac{\Gamma_{4p}\,\Gamma_{2p} - 3\,\Gamma_{3p}^2}{24\,\Gamma_{2p}^3}\,u + \cdots\,, \tag{23}$$

где $\Gamma_{kp} = p^{-1}\sum\limits_{j=1}^{p}\gamma_{kj}$, γ_{kj} – семиинварианты порядка k величин $\sqrt{Q/N}\,\eta_j^0$, то есть

$$\gamma_{kj} = (-1)^k \frac{d^k}{dl^k}\ln\varphi_{\eta_j^0}(l)\Big|_{l=0}, \quad \text{где} \quad \varphi_{\eta_j^0}(l) = \int\limits_{\Omega_d} \exp\left(i\,l\,\eta_j^0\right)dt.$$

Очевидно, что $\gamma_{k1} = \cdots = \gamma_{k,\,p-1} = \gamma_k$, где γ_k – k-й семиинвариант суммы $N^{-1/2}\sum\limits_{k=1}^{N} f(tW^k)$. Учитывая это, а также неравенство $|n - p\,(Q+N)| \le p$ (величины p, Q и N мы будем выбирать так, чтобы это неравенство выполнялось), можно легко показать, что для всех k справедливо равенство $\Gamma_{kp} = \gamma_k(1+\mathrm{O}\,(1/p))$. Отсюда после подстановки в (23) получим равенство

$$\lambda_p(u) = \lambda^{(N)}(u)(1+\mathrm{O}\,(1/p)),$$

где $\lambda^{(N)}(u)$ – ряд Крамера, построенный для величин $\sqrt{Q/N}\,\eta_j^0$, $j = 1,\ldots,p$.

Используя полученное равенство, перепишем (22) следующим образом:

$$\widehat{F}_p^{\,0}(y) = \left(1 - \varPhi\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\right)\exp\left(\frac{\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)^3}{\sqrt{p}}\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\lambda^{(N)}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right).$$

Введем обозначение

$$G_p(z) = (1 - \varPhi(z))\exp\left(\frac{z^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right)\right).$$

Тогда

$$\widehat{F}_p^{\,0}(y) = G_p\left(y\,\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{y\,\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right). \tag{24}$$

Перейдем в полученном выражении к величинам η_j^0, $j = 1,\ldots,p$. Справедливо неравенство

$$\left|F_p^0(y) - \widehat{F}_p^{\,0}(y)\right| \le \Delta_2 + \left|\widehat{F}_p^{\,0}(y) - \widehat{F}_p^{\,0}(y+\Delta_2)\right| + \left|\widehat{F}_p^{\,0}(y) - \widehat{F}_p^{\,0}(y-\Delta_2)\right|, \tag{25}$$

где $\Delta_2 = L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^{\,0}\right)$ – расстояние между F_p^0 и $\widehat{F}_p^{\,0}$, измеряемое в метрике Леви. По неравенству из работы [5] имеем

$$L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^{\,0}\right) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^U \left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^{\,0}(l) \right| \frac{dl}{l} + 2e\,\frac{\ln U}{U}, \quad U > e. \tag{26}$$

Из леммы 3 работы [2] вытекает, что

$$\left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^{\,0}(l) \right| \le C_{25}\sqrt{p/N}\,\exp(-C_{26}\,Q). \tag{27}$$

Обозначим $\sqrt{p/N}\,\exp(-C_{26}\,Q) = \alpha_1$. Положим $U = \alpha_1^{-1}$. Используя в интервале $\left[0, \sqrt{\alpha_1}\right]$ тривиальную оценку $\left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^{\,0}(l) \right| \le C_{27}\,l^2$, а в интервале $\left[\sqrt{\alpha_1},\, \alpha_1^{-1}\right]$ – оценку (27), запишем

$$\int\limits_0^U \left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^{\,0}(l) \right| \frac{d\,l}{l} \le C_{27}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha_1}} l\,dl + \int\limits_{\sqrt{\alpha_1}}^{\alpha_1^{-1}} \alpha_1\,\frac{d\,l}{l} = \mathrm{O}\,(\alpha_1).$$

Из полученной оценки и (26) следует

$$L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^{\,0}\right) = \mathrm{O}\,(\alpha_1). \tag{28}$$

Перейдем к оценке разностей $F_p^0 - \widehat{F}_p^{\,0}(y \pm \Delta_2)$. Несложно доказать следующие неравенства:

$$|\,\Phi(z+\Delta) - \Phi(z)\,| \le C_{28}\,|\,\Delta\,|\,\exp\left(-\,z^2/2\right), \quad \text{если} \quad |\,z\,| \le |\,\Delta\,|^{-1}, \tag{29}$$

$$\sup_{1 \le z \le \sqrt{p}\,/\left(w(p)\sqrt{\ln N}\right)} \left| \lambda^{(N)}\left(\frac{z+\Delta}{\sqrt{p}}\right) - \lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) \right| \le C_{29}\,\frac{|\Delta|}{\sqrt{p}}\,G,$$

где $G = \sum\limits_{j=0}^{\infty} j\,|\lambda_j|\,(z/\sqrt{p})^{j-1} < \infty$,

$$\sup_{1 \le z \le \sqrt{p}\,/\left(w(p)\sqrt{\ln N}\right)} \left| \frac{(z+\Delta)^3}{\sqrt{p}} - \frac{z^3}{\sqrt{p}} \right| \le C_{30}\,\frac{|\Delta|\sqrt{p}}{w^2(p)\,\ln N},$$

используя которые, находим, что если $1 \le z \le \min\left(|\Delta|^{-1}, \sqrt{p}/(w^2(p)\ln N)\right)$, то

$$\begin{aligned} G_p(z+\Delta) = {} & \left(1 - \Phi(z) + \mathrm{O}\left(\Delta\,\exp\left(-z^2/2\right)\right)\right) \times \\ & \times\ \exp\left(\left(\frac{z^3}{\sqrt{p}} + \mathrm{O}\left(\frac{\Delta\sqrt{p}}{w^2(p)\ln N}\right)\right)\left(\lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{p}}\right)\right)\right) + \\ & +\ \mathrm{O}\left(\Delta\,\exp\left(-z^2/2\right)\exp\left(\frac{(z+\Delta)^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(N)}\left(\frac{z+\Delta}{\sqrt{p}}\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Согласно центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства из [1] можно выбрать величину α из леммы 5, равной $1/2-\varepsilon$, иначе говоря, при $|\tau| \le \delta/\ln^2 N$

$$\lambda^{(N)}(\tau) = \mathrm{O}\left(1/N^{1/2-\varepsilon}\right),$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

Поэтому при $\Delta = \mathrm{O}\,(1/\sqrt{p}\,)$ мы получим из (30), что если $1 \le z \le C_{31}\sqrt{p}\,/\ln^2 N$, то

$$G_p(z+\Delta) = G_p(z) + \mathrm{O}(\Delta). \tag{31}$$

Используя (24) и (31), имеем

$$\begin{aligned}\widehat{F}_p^{\,0}(y) - \widehat{F}_p^{\,0}(y \pm \Delta_2) &= G_p\left(p\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) - G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}\right) + \\ &+ \mathrm{O}\left(G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}\right)\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}}{\sqrt{p}} + \right. \\ &\left. + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right) = \\ &= \mathrm{O}\left(\Delta_2\sqrt{Q/N} + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right),\end{aligned} \tag{32}$$

где $1 < y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \le C_{31}\,\sqrt{p}\,\ln^2 N$. Из (25), (29) и (32) вытекает неравенство

$$\left|F_p^0(y) - \widehat{F}_p^{\,0}(y)\right| \le C_{32}\left(\Delta_2\sqrt{Q/N} + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right). \tag{33}$$

Нетрудно показать, учитывая (28), что при $1 \le y\sqrt{Q/N} \le N^{3/2}/(y\sqrt{Q}\,)$ из неравенства (33) следует оценка

$$\begin{aligned}F_p^0(y) \le C_{33}\exp&\left(-\frac{1}{2}\left(y\sqrt{Q/N}\right)^2\right) \times \\ &\times \exp\left(C_{34}\frac{y^3 Q^{3/2}}{\sqrt{p}\,N^{3/2}}\,\lambda^{(N)}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right) + \\ &+ C_{34}\sqrt{p/N}\,\exp\left(-C_{26}\,Q\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Так как $\lambda^{(N)}(\tau) = \mathrm{O}\left(1/N^{1/2-\varepsilon}\right)$, то (34) перепишется так:

$$\begin{aligned}F_p^0(y) \le C_{33}\exp&\left(-\frac{1}{2}\left(y\sqrt{Q/N}\right)^2 + C_{35}\frac{y^3\,Q^{3/2}}{\sqrt{p}\,N^{2-\varepsilon}}\right) + \\ &+ C_{36}\sqrt{p/N}\,\exp\left(-C_{26}\,Q\right).\end{aligned} \tag{35}$$

Выберем в (35) $y = xw\sqrt{N\ln n/Q}$:

$$F_p^0\left(xw\sqrt{N\ln n/Q}\right) = \mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\,x^2w^2\ln n + C_{35}\,\frac{x^3w^3\ln^{1/2}n}{\sqrt{p/N}\,N^{1/2-\varepsilon}}\right) + \right.$$
$$\left. + C_{36}\sqrt{p/N}\,\exp\left(-C_{26}\,Q\right)\right).$$

Отсюда, так как $x \geq 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n}\,\ln^{-2}N\right)\right)$, то

$$F_p^0\left(xw\sqrt{N\ln n/Q}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{xn^w} + \sqrt{p/N}\,\exp\left(-C_{26}\,Q\right)\right).$$

Аналогично при $x \geq 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n}\,\ln^{-2}N\right)\right)$, имеем

$$1 - F_p^0\left(-x\,w\sqrt{N\ln n/Q}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{xn^w} + \sqrt{p/N}\,\exp\left(-C_{26}\,Q\right)\right).$$

Лемма 6 доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы. Величины $\widehat{\eta}_k$, $k = 1, \ldots, p$, удовлетворяют условиям:

1. $\operatorname{mes}\{\,t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \widehat{\eta}_k < x\} = \operatorname{mes}\{\,t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \eta_k < x\}$,
2. $\displaystyle\int\limits_{\overline{\Omega}_d} \exp\left(\frac{i\,l}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\,\sum_{k=1}^{p}\widehat{\eta}_k\right)dt = \prod_{k=1}^{p}\int\limits_{\overline{\Omega}_d}\exp\left(\frac{i\,l}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\,\widehat{\eta}_k\right)dt.$

Поэтому к функции $\widehat{F}_p(x) = \operatorname{mes}\left\{t:\, t \in \overline{\Omega}_d,\ \dfrac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\,\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\widehat{\eta}_k > x\right\}$ мы можем применить теорему о больших уклонениях для независимых и одинаково распределенных слагаемых:

$$\widehat{F}_p(x) = (1 - \varPhi(x))\exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(Q)}\left(x/\sqrt{p}\,\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(x/\sqrt{p}\,\right)\right) \tag{36}$$

для всех x из $\left[1, \sqrt{p}\,/(w(p)\sqrt{\ln Q})\right]$.

Из леммы 3 работы [2] следует, что

$$|\,f_p(l) - \widehat{f}_p(l)\,| \leq C_{37}\sqrt{p/Q}\,\exp\left(-C_{38}\,N\right). \tag{37}$$

Используя (37), оценим разность $\widehat{F}_p(x) - F_p(x)$. Процедура оценки аналогична оценке разности $\widehat{F}_p^{\,0}(x) - \widehat{F}_p(x)$ (см. (25)–(33)). Расстояние $L(F_p, \widehat{F}_p)$ по метрике Леви между F_p и $\widehat{F}_p$ оценивается по формуле

$$L(F_p, \widehat{F}_p) \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^U \left|\,f_p(l) - \widehat{f}_p(l)\,\right|\,\frac{d\,l}{l} + 2e\,\frac{\ln U}{U}.$$

Обозначим $\sqrt{p/Q}\,\exp(-C_{38}N) = \alpha_2$ и выберем $U = \alpha_2^{-1}$. Затем, используя (37) и тривиальную оценку $\left|f_p(l) - \widehat{f}_p(l)\right| \le C_{39}\,l^2$, получим, что $L(F_p, \widehat{F}_p) = \mathrm{O}(\alpha_2)$. Из этой оценки и равенства (36) следует

$$F_p(x) = \widehat{F}_p(x) + \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{p}{Q}}\exp(-C_{38}N) + (1-\varPhi(x))\exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(Q)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\right)\frac{x}{\sqrt{p}}\right). \tag{38}$$

Далее, оценим погрешность, возникающую при замене в (38) $F_p(x)$ на

$$\mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}}\sum_{k=1}^{n} f(tW^k) > x\right\}.$$

Имеем

$$F_p(x+\alpha_3) + 2\theta_1\,\mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\left|\zeta_p^0\right| > \alpha_3\right\} \le$$
$$\le \mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}}\sum_{k=1}^{n} f(tW^k) > x\right\} \le$$
$$\le F_p(x-\alpha_3) + 2\theta_2\,\mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\left|\zeta_p^0\right| > \alpha_3\right\}, \tag{39}$$

где $\alpha_3 = xw\sqrt{N\ln n/Q}$, $|\theta_1|,\ |\theta_2| \le 1$.

По лемме 6

$$\mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}}\left|\zeta_p^0\right| > \alpha_3\right\} = \mathrm{O}\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{x\,n^w} + \sqrt{p/N}\,\exp(-C_{24}Q)\right),$$

если $x \ge 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n}\,\ln^{-2}N\right)\right)$. Поэтому, применив формулу (38), мы получим из (39):

$$\mathrm{mes}\left\{t:\ t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}}\sum_{k=1}^{n} f(tW^k) > x\right\} =$$
$$= (1-\varPhi(x+\theta_3\alpha_3))\exp\left(\frac{(x+\theta_3\alpha_3)^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(Q)}\left(\frac{x+\theta_3\alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{x+\theta_3\alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right) +$$
$$+ \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{p}{Q}}\exp(-C_{38}N) + (1-\varPhi(x))\exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(Q)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\right)\frac{x}{\sqrt{p}} +\right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{p}{N}}\exp(-C_{24}Q) + \frac{\exp(-x^2/2)}{xn^w}\right), \tag{40}$$

равномерно относительно x, $x \ge 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n},\ \sqrt{p}\,/\left(\sqrt{\ln n}\,\ln^2 N\right)\right)\right)$.

Из оценки (29) следует, что при $x \le C_{40}(N\ln n/Q)^{-1/4}$

$$\varPhi(x+\theta_3\alpha_3) - \varPhi(x) = \mathrm{O}\left(x\sqrt{N\ln n/Q}\,\exp(-x^2/2)\right). \tag{41}$$

По лемме 5 $\lambda^{(Q)}(\tau) = \mathrm{O}\left(1/Q^{1/2-\varepsilon}\right)$, если $|\tau| \le \delta/\ln^2 Q$. Поэтому

$$\exp\left(\frac{(x+\theta_3\alpha_3)^3}{\sqrt{p}}\,\lambda^{(Q)}\left(\frac{x+\theta_3\alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right) = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon}}\right), \tag{42}$$

если $x \ge 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{p}\,\ln^2 Q,\, p^{1/6}\,Q^{1/6-\varepsilon}/w(p)\right)\right)$.

Используя (41), (42), из (40) получим:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mes}\left\{t:\, t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n} f(tW^k) > x\right\} = \\
&= (1-\Phi(x))\left(1+\mathrm{O}\left(x^2\sqrt{N\,\ln n/Q}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon}}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(x/\sqrt{p}\,\right)\right) + \\
&+\ \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{p}{Q}}\exp\left(-C_{38}\,N\right) + (1-\Phi(x))\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{x^4}{p\,Q^{1/2-\varepsilon}}\right) + \sqrt{\frac{p}{N}}\exp\left(-C_{24}\,Q\right) + \right.\\
&\left. + \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{xn^w}\right) = (1-\Phi(x))\Big(1+\mathrm{O}\Big(x^2\sqrt{N\,\ln n/Q} + \frac{x^3}{\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon}} + \frac{x}{\sqrt{p}} + \\
&+ \frac{1}{1-\Phi(x)}\sqrt{\frac{p}{Q}}\exp\left(-C_{38}\,N\right) + \frac{1}{1-\Phi(x)}\sqrt{\frac{p}{N}}\exp\left(-C_{24}\,Q\right) + \frac{1}{n^w}\Big)\Big),
\end{aligned} \tag{43}$$

где $x \ge 1$, $x = \mathrm{O}\left(\min\left(\sqrt{\dfrac{N}{\ln n}}, \left(\dfrac{Q^{1/4}}{N\ln n}\right)^{1/4}, \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\ln n}\,\ln^2 N}, \dfrac{p^{1/6}Q^{1/6-\varepsilon}}{w(p)}\right)\right)$.

Далее, при $x \le \sqrt{\exp\left(-C_{38}N\right)}$ имеем оценки

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{p/Q}\ \exp\left(-C_{38}\,N\right)}{1-\Phi(x)} &= \mathrm{O}\left(\sqrt{p/Q}\,x\,\exp\left(-C_{38}\,N/2\right)\right),\\
\frac{\sqrt{p/N}\ \exp\left(-C_{24}\,Q\right)}{1-\Phi(x)} &= \mathrm{O}\left(\sqrt{p/N}\,x\,\exp\left(-C_{24}\,Q/2\right)\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

Выберем $N = [\,n^{1/4}\,]$, $Q = [\,n^{3/4}\ln^2 n\,]$, а p – из условия

$$|\,n - p\,(Q+N)\,| \le p. \tag{45}$$

Затем подставим в (43) выбранные N, p, Q и оценки (44). В результате получим, что равномерно относительно x, $x \ge 1$, $x = \mathrm{o}\,(n^{1/8}\ln n)$

$$\mathrm{mes}\left\{t:\, t\in\overline{\Omega}_d,\ \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n} f(tW^k) > x\right\} = (1-\Phi(x))\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{x\ln n}{n^{1/8}}\right)\right). \tag{46}$$

Из условия (45) следует, что $(n/(p\,Q))^{1/2} = 1 + \mathrm{O}\,(N/Q)$. Используя эту оценку и оценку $\sigma(Q) = \sigma(1+\mathrm{O}\,(1/Q))$, заменим в равенстве (46) $\sigma(Q)$ на σ и $p\,Q$ на n. Таким образом, получили формулу

$$1 - F_n(x) = (1-\Phi(x))\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{x\ln n}{n^{1/8}}\right)\right),$$

где $x \ge 1$, $x = \mathrm{o}\left(n^{1/8}/\ln n\right)$.

Для вывода формулы

$$F_n(-x) = \Phi(-x)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{x\ln n}{n^{1/8}}\right)\right),$$

где $x \geq 1$, $x = \mathrm{o}\left(n^{1/8}/\ln n\right)$, достаточно заменить $f(tW^k)$ на $-f(tW^k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Теорема доказана. $\square$

Summary

V.T. Dubrovin. Large Deviations in the Central Limit Theorem for Endomorphisms of Euclidean Space.

Let W be such a nonsingular integer matrix that $|\det W| > 1$; f is a real-valued periodic for every argument Lipschitz-continuous function defined on the unit hypercube from R^d. For a sequence $(f(tW^n))$, we prove the central limit theorem with large deviations within the interval $[1; \mathrm{o}\,(n^{1/8}/\ln n)]$.

Key words: limit theorem, endomorphisms, large deviations.

Литература

1. *Дубровин В.Т.* Центральная предельная теорема для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 54–65.
2. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
3. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
4. *Петров В.В.* Обобщение предельной теоремы Крамера // Усп. матем. наук. – 1954. – Т. 9, № 4. – С. 195–202.
5. *Золотарев В.М.* Несколько новых вероятностных неравенств, связанных с метрикой Леви // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 190, № 5. – С 1019–1021.

Поступила в редакцию
06.09.10

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Vyacheslav.Dubrovin@ksu.ru*