Свою геометрию Лобачевский называл "воображаемой", имея в виду логическую возможность рассмотрения геометрических объектов, взаимоотношения которых связаны системой аксиом, на одну отличающейся от системы аксиом Евклида. Но он сам понимал, что нужно думать о возможности реального существования в природе или в моделях множества таких объектов, которые удовлетворяли бы его аксиомам. Его эксперименты с точными вычислениями сумм углов в треугольниках не увенчались успехов ввиду неизбежных ошибок измерений, и поэтому в его жизни этот вопрос остался нерешеным. Но уже в 1868 году возможность реализации геометрии, в которой сумма углов в геодезическом треугольнике была бы меньше π, была установлена Э.Бельтрами на примере псевдосферы. Этот пример, однако, относился не ко всей плоскости Лобачевского, а только к некоторой ее области. Следующий принципиально важный результат был получен Д. Гильбртом (1901), который доказал, что плоскость Лобачевского в целом не может быть реализована в R^3 как некоторая регулярная поверхность. У самого Гильберта этот результат получен в предположении аналитичности искомой поверхности, затем он был перенесен другими геометрами и на случай неаналитических поверхностей. Окончательное обобщение этого результата принадлежит Н.В. Ефимову, который в 1963 г. доказал, что в классе ^{2} гладкости в R^3 не существует полной поверхности не только с постоянной, но вообще с отделенной от нуля отрицательной кривизной. (но уже в классе гладкости $C^{1,1}$ такие поверхности существуют, Э.Р.Розендорн, 1962). Заметим, что в C^1-классе плоскость Лобачевского реализуема по теореме Нэша-Кейпера в R^3 как гладкая поверхность, но эта поверхность не имеет кривизну в обычном смысле и говорить о совпадении на ней внешней и внутренней геометрии не приходится.

Но параллельно с вопросом о существование плоскости Лобачевского в том или ином виде в R^3 ставился и вопрос о реализации геометрии Лобачевского на поверхностях в пространствах большей размерности. По-видимому, первый результат в этом направлении принадлежит Л.Бибербаху (1932), который привел явный пример такой поверхности в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Эта поверхность замечательна тем, то на ней все движения плоскости Лобачевского реализуются движением в самом пространстве. Но в конечных размерностях таких поверхностей не может быть, это доказано в той же работе Бибербаха со ссылкой на Шмидта. Позже С.Б. Кадомцев доказал, что ни в какой конечной размерности плоскость Лобачевского не может быть реализована в виде поверхности вращения с полюсом. а также в виде поверхности, допускающей параллельный перенос по себе (как, например, это можно делать по цилиндру). Это значит, что изометрическое вложение или даже погружение плоскости Лобачевского в $R^n, n > 3$ надо искать в виде поверхностей сложного строения, без большой симметрии. Этим объясняется, что успешные примеры изометрических погружений плоскости Лобачевского в $R^n, n > 3$, основаны на искусном искусственном подборе элементов искомых конструкций и до их пор ни в одной размерности нет явных примеров в аналитическом классе гладкости. Продвижения по размерности такие - известная наименьшая размерность для вложений - это в R^6, класс гладкости C^∞ (Блануша, 1955), для погружений - это в R^5, класс гладкости тоже C^∞ (Розендорн, 1960) с меньшей гладкостью - это в R^4, класс гладкости - кусочно-аналитичность, а в целом класс $C^{0,1}$ (С. (1989 и 2018).