

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор
Проректор по научной деятельности

_____ Д. А. Тагорский

« 26 » _____ 2025 г.



Программа кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Цель и задачи кандидатского экзамена по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Цель:

Кандидатские экзамены являются составной частью аттестации научных и научно-педагогических кадров. Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателей ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе. Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени.

Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки соискателя, знание общих концепций и методологических вопросов соответствующей науки, истории её формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

Задачами является выявление:

- теоретических и практических знаний и их применение в профессиональной деятельности;
- уровня владения понятийным аппаратом и умения им пользоваться при ответе;
- навыков систематизации полученных знаний, способности четко, логично и аргументированно излагать материал по избранной тематике.

Основные требования:

Основным требованием допуска к сдаче кандидатского экзамена является наличие подписанного заявления и утвержденной дополнительной программы кандидатского экзамена.

Сдача кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с календарным учебным графиком и индивидуальным учебным планом аспиранта. Кандидатские экзамены у прикрепленных лиц принимаются в период, установленный приказом ректора КФУ. В случае представления диссертации в совет по защите на соискание ученой степени кандидата наук, возможен прием кандидатских экзаменов вне сроков сессии.

Порядок проведения кандидатского экзамена:

Кандидатский экзамен по специальности проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете 2 вопроса по основной программе и 1 вопрос по дополнительной программе. Дополнительная программа утверждается на Ученом совете Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского для каждого аспиранта персонально со списком вопросов по теме диссертационного исследования аспиранта. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 5 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов; демонстрирует знание источников литературы, понятийного аппарата и умение ими пользоваться при ответе.

Оценка «хорошо» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логичностью, четкостью, знанием понятийного аппарата и литературы по теме вопроса при незначительных упущениях при ответах.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если аспирант дает неполные и слабо аргументированные ответы на вопросы, демонстрирующие общее представление и элементарное понимание существа поставленных вопросов, понятийного аппарата и обязательной литературы.

Ответ оценивается «неудовлетворительно», если аспирант не понимает существа экзаменационных вопросов и не дает ответа на вопросы.

Вопросы программы кандидатского экзамена по научной специальности (1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Мера, измеримые функции, интеграл

Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

2. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования

Дифференцирование монотонной функции. Функция с ограниченным измерением. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стильтьеса.

3. Пространства суммируемых функций

Пространства L_p . Ортогональные системы функций в L_2 . Ряды по ортогональным системам.

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.

Условия сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2 . Теорема Планшереля. Преобразования Лапласа. Преобразование Фурье—Стилтьеса.

5. Дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы

Дифференцируемые многообразия. Дифференциальные формы. Формула Стокса.

2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. Полиномы Фабера. Разложение аналитических функций в ряды по полиномам Фабера, скорость сходимости.

3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых

функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолиственности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса), Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1. Метрические и топологические пространства

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах.

2. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана—Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных, ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы.

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов

Теория ограниченных операторов. Пространства l_2 и L_2 . Неограниченные операторы.

5. Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производная и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

6. Обобщенные функции

Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).

Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена в аспирантуру по научной специальности (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Основная литература (не ранее 2020 года)

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс - 3-е изд., испр. и доп. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2020. -756 с.

2. Евграфов, М. А. Аналитические функции : учебное пособие / М. А. Евграфов. — 4-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-0809-2. — Текст :

- электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210101> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие для вузов / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 272 с. — ISBN 978-5-507-50594-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/448622> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Избранные задачи по вещественному анализу : учебное пособие / Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов. — Москва : МЦНМО, 2025. — 560 с. — ISBN 978-5-4439-3818-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/507411> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 7-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 560 с. — ISBN 978-5-507-47771-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/426227> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9392-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/193364> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях : учебное пособие / М. Спивак. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 5-8114-0646-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210152> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
8. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебник / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 6-е эл.изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2025. — 303 с. — ISBN 978-5-93208-849-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/472685> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
9. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2024. -560 с.
10. ТФФА- лекции для аспирантов / под ред. акад. Б.С. Кашина.- 2-е изд. - М.: Изд-во МГУ, 2024, -430 с.

Дополнительная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Изд. 7-е . М.: Физматлит, 2006. — 570 с.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. — Санкт-Петербург: Лань, 2004. — 336 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, доп. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. — Изд. 6-е., стер. — Москва: Физматлит, 2001. — 591 с.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — Изд.14-е, стер. — М.: Высш.шк., 1999. — 432с.
6. Лаврентьев И.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — Изд. 5-е, испр. — Москва: Наука, 1987. — 688с.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — Изд. 3-е. — Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 480с.
8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. — 319 с.

9. Шабунин М.И. Сидоров Ю.В. - Теория функций комплексного переменного. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. - 248с. // http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42610
10. Конспект лекций по математическому анализу: Учебное пособие/ А.Н. Шерстнев. - Казань:2009.-374с.:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf.
11. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учебник для вузов .—Изд. 5-е, стереотип.—Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008.—560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284
12. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов.—Издание 6-е, стереотипное.—Москва: Физматлит, 2010.—336 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48167
13. Евграфов М.А. Аналитические функции. Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 448 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=134
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2009. – 572 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 272 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245
16. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2014. -560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56415
17. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. Изд. 2-е. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. --158 с.
18. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – Изд. 2-е. – М.: Наука; т.1. 1967. – 486с., т.2. 1968. – 624с.
19. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир. Т.1: Функциональный анализ. – 1977. – 357с.

Информационное обеспечение

1. Сайт Научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского <http://kpfu.ru/library>
2. Сайт кафедры математического анализа КФУ <https://kpfu.ru/math/strctre/mathdep/ma>
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ <http://lib.mexmat.ru/>
4. Поисковик электронных книг <http://www.poiskknig.ru>
5. eLIBRARY.RU - Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU Подробности: http://kpfu.ru/main_page?p_sub=8226 Любое использование материалов допускается только при наличии гиперссылки на портал КФУ (kpfu.ru)
6. Фонд знаний Ломоносов <http://www.lomonosov-fund.ru>