

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор
Проректор по научной деятельности

«26»

Д.А. Токарский

2025 г.



Программа кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Цель и задачи кандидатского экзамена по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Цель:

Кандидатские экзамены являются составной частью аттестации научных и научно-педагогических кадров. Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателей ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе. Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени.

Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки соискателя, знание общих концепций и методологических вопросов соответствующей науки, истории её формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

Задачами является выявление:

- теоретических и практических знаний и их применение в профессиональной деятельности;
- уровня владения понятийным аппаратом и умения им пользоваться при ответе;
- навыков систематизации полученных знаний, способности четко, логично и аргументированно излагать материал по избранной тематике.

Основные требования:

Основным требованием допуска к сдаче кандидатского экзамена является наличие подписанного заявления и утвержденной дополнительной программы кандидатского экзамена.

Сдача кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с календарным учебным графиком и индивидуальным учебным планом аспиранта. Кандидатские экзамены у прикрепленных лиц принимаются в период, установленный приказом ректора КФУ. В случае представления диссертации в совет по защите на соискание ученой степени кандидата наук, возможен прием кандидатских экзаменов вне сроков сессии.

Порядок проведения кандидатского экзамена:

Кандидатский экзамен по специальности проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете 2 вопроса по основной программе и 1 вопрос по дополнительной программе. Дополнительная программа утверждается на Ученом совете Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского для каждого аспиранта персонально со списком вопросов по теме диссертационного исследования аспиранта. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 5 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов; демонстрирует знание источников литературы, понятийного аппарата и умение ими пользоваться при ответе.

Оценка «хорошо» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логичностью, четкостью, знанием понятийного аппарата и литературы по теме вопроса при незначительных упущениях при ответах.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если аспирант дает неполные и слабо аргументированные ответы на вопросы, демонстрирующие общее представление и элементарное понимание существа поставленных вопросов, понятийного аппарата и обязательной литературы.

Ответ оценивается «неудовлетворительно», если аспирант не понимает существа экзаменационных вопросов и не дает ответа на вопросы.

Вопросы программы кандидатского экзамена по научной специальности (1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Мера, измеримые функции, интеграл

Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

2. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования

Дифференцирование монотонной функции. Функция с ограниченным измерением. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стильеса.

3. Пространства суммируемых функций

Пространства L_p . Ортогональные системы функций в L_2 . Ряды по ортогональным системам.

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.

Условия сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2 . Теорема Планшереля. Преобразования Лапласа. Преобразование Фурье—Стильеса.

5. Дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы

Дифференцируемые многообразия. Дифференциальные формы. Формула Стокса.

2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. Полиномы Фабера. Разложение аналитических функций в ряды по полиномам Фабера, скорость сходимости.

3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых

функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса), Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1. Метрические и топологические пространства

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах.

2. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана—Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных, ограниченных операторов. Компактные(вполне непрерывные) операторы.

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов

Теория ограниченных операторов. Пространства l_2 и L_2 . Неограниченные операторы.

5. Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производная и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

6. Обобщенные функции

Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).

Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена в аспирантуру по научной специальности (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Основная литература (не ранее 2020 года)

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс - 3-е изд., испр. и доп. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2020. -756 с.

2. Евграфов, М. А. Аналитические функции : учебное пособие / М. А. Евграфов. — 4-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-0809-2. — Текст :

электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210101> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие для вузов / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 272 с. — ISBN 978-5-507-50594-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/448622> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Избранные задачи по вещественному анализу : учебное пособие / Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов. — Москва : МЦНМО, 2025. — 560 с. — ISBN 978-5-4439-3818-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/507411> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 7-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 560 с. — ISBN 978-5-507-47771-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/426227> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9392-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/193364> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

7. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях : учебное пособие / М. Спивак. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 5-8114-0646-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210152> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

8. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебник / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 6-е эл.изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2025. — 303 с. — ISBN 978-5-93208-849-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/472685> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

9. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2024. -560 с.

10. ТФФА- лекции для аспирантов / под ред. акад. Б.С. Кашина.- 2-е изд. - М.: Изд-во МГУ, 2024, -430 с.

Дополнительная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Изд. 7-е . М.: Физматлит, 2006. – 570 с.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. — Санкт-Петербург: Лань, 2004. – 336 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, доп. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Изд. 6-е., стер. – Москва: Физматлит, 2001. – 591 с.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – Изд.14-е, стер. – М.: Высш.шк., 1999. – 432с.
6. Лаврентьев И.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Изд. 5-е, испр. – Москва: Наука, 1987. – 688с.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – Изд. 3-е. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 480с.
8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. – 319 с.

9. Шабунин М.И. Сидоров Ю.В. - Теория функций комплексного переменного. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. - 248с. // http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42610
10. Конспект лекций по математическому анализу: Учебное пособие/ А.Н. Шерстнев. - Казань:2009.-374с.:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf>.
11. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учебник для вузов .—Изд. 5-е, стереотип..—Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008.—560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284
12. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов.—Издание 6-е, стереотипное.—Москва: Физматлит, 2010.—336 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48167
13. Евграфов М.А. Аналитические функции. Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 448 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=134
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2009. – 572 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 272 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245
16. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2014. -560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56415
17. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. Изд. 2-е. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. --158 с.
18. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – Изд. 2-е. – М.: Наука; т.1. 1967. – 486с., т.2. 1968. – 624с.
19. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир. Т.1: Функциональный анализ. – 1977. – 357с.

Информационное обеспечение

1. Сайт Научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского <http://kpfu.ru/library>
2. Сайт кафедры математического анализа КФУ <https://kpfu.ru/math/strctre/mathdep/ma>
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ <http://lib.mexmat.ru/>
4. Поисковик электронных книг <http://www.poiskknig.ru>
5. eLIBRARY.RU - Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU Подробности: http://kpfu.ru/main_page?p_sub=8226 Любое использование материалов допускается только при наличии гиперссылки на портал КФУ (kpfu.ru)
6. Фонд знаний Ломоносов <http://www.lomonosov-fund.ru>