5 класс

1. Две улитки ползут наперегонки. Первая проползает 7 метров за каждые 8 часов, а вторая — 8 метров за каждые 9 часов. Какая улитка ползет быстрее?

Ответ: *вторая.*
Решение. За 72 часа первая улитка проползает $7 \cdot 9 = 63$ метра, а вторая — $8 \cdot 8 = 64$ метра.
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

2. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в два раза больше, чем синих, синих в два раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 30? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

Ответ: 4, 2, 1, 23 *или* 8, 4, 2, 16.
Решение. По условию количество белых шариков не меньше 11, значит, остальных шариков не более чем $30 - 11 = 19$. Обозначим количество зелёных шариков через x, тогда количество синих шариков — $2x$, а количество красных — $4x$. Поскольку красных, синих и зелёных шариков не более 19, получаем $4x + 2x + x \le 19$ или $7x \le 19$, то есть $x \le 2$. Если $x = 1$, то $2x = 2$ и $4x = 4$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 4, 2 и 1, тогда белых шариков $30 - (4 + 2 + 1) = 23$. Если же $x = 2$, то $2x = 4$ и $4x = 8$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 8, 4 и 2, тогда белых шариков $30 - (8 + 4 + 2) = 16$.
Критерии. За каждый правильный набор чисел — по 2 балла. Доказано, что других наборов нет — ещё 3 балла.

3. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян размерами доски и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья делает ходы, как и обычная ладья, но только длиной в *одну* или *три* клетки (вперёд, назад, влево или вправо). Может ли эта ладья обойти все клетки доски 7×7, *побывав* на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку?

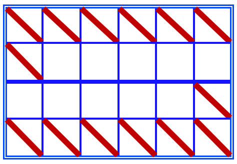
Ответ: *не может.*
Решение. Раскрасим клетки марсианской доски 7×7 в «шахматном» порядке. Отметим, что каждым ходом длиной в одну или три клетки ладья *меняет цвет* клетки, на которой стоит. Значит, если ладья возвращается в исходную клетку, то количество её ходов (то есть пройденных клеток) чётно. Но количество клеток на такой доске равно 49, то есть нечётно. Значит, обойти все клетки она не может.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечено, что каждым ходом ладьи меняется цвет клетки — 2 балла.

4. На деревьях, расположенных по кругу, сидят 50 чижей (на каждом дереве по одному), некоторые из них жёлтого цвета. Оказалось, что рядом с каждым чижом обязательно сидит хотя бы один жёлтый чиж. Какое наименьшее число жёлтых чижей может быть на деревьях?

Ответ: 17.
Решение. Если в каком-нибудь месте сидят три нежёлтых чижа подряд, то для «среднего» чижа этой тройки нарушается условие задачи. Значит, в любой тройке чижей есть хотя бы один жёлтый. Так как всего чижей 50, то меньше, чем 17 жёлтых чижей быть не может. Ясно, что 17 жёлтых чижей хватит, чтобы выполнялось условие. Для этого посадим их на деревья с номерами 3, 6, 9, … , 48 и 1. Тогда условие задачи будет выполнено.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Приведен правильный пример — 3 балла. Оценка без примера — 3 балла.

5. Прямоугольник 4×6 разбит прямыми на 24 одинаковые квадратные клетки. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

Ответ: 14.



Решение. В каждом прямоугольнике 4×6 можно провести не более 7 диагоналей: на его «средней» линии всего восемь узлов, а каждая диагональ имеет один из них своим концом. Значит, в исходном прямоугольнике 4×6 можно провести не более $7 \cdot 2 = 14$ диагоналей. Осталось привести пример прямоугольника с 14-ю диагоналями (см. рисунок).

Замечание. Возможны и другие примеры расположения диагоналей.

Критерии. Только пример — 3 балла. Доказана оценка — 4 баллов.

6 класс

1. Из числа 87654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 6. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

Ответ: 876432 *или* 765432.
Решение. Искомое число делится на 6, а значит, делится на 2 и на 3. Цифру 1 надо обязательно вычеркнуть, оставшееся число 8765432 имеет сумму цифр 35 и по признаку делимости не делится на 3. Таким образом, надо вычеркнуть ещё хотя бы одну цифру так, чтобы сумма оставшихся цифр делилась на 3. Этого можно добиться, вычёркивая только цифры 5 или 8. В результате получим кратное шести число 876432 или число 765432.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в три раза больше, чем синих, синих в три раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 40? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

Ответ: 9, 3, 1, 27 *или* 18, 6, 2, 14.
Решение. По условию количество белых шариков не меньше 11, значит, остальных шариков не более чем $40 - 11 = 29$. Обозначим количество зелёных шариков через x, тогда количество синих шариков — $3x$, а количество красных — $9x$. Поскольку красных, синих и зелёных шариков не более 29, получаем $9x + 3x + x \le 29$ или $13x \le 29$, то есть $x \le 2$. Если $x = 1$, то $3x = 3$ и $9x = 9$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 9, 3 и 1, тогда белых шариков $40 - (9 + 3 + 1) = 27$. Если же $x = 2$, то $3x = 6$ и $9x = 18$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 18, 6 и 2, тогда белых шариков $40 - (18 + 6 + 2) = 14$.
Критерии. За каждый правильный набор чисел — по 2 балла. Доказано, что других наборов нет — ещё 3 балла.

3. Найдите наименьшую несократимую положительную дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{11}{333}$ и $\frac{33}{555}$ получаются целые числа.

Ответ: $\frac{11}{37}$.
Решение. Обозначим искомую дробь через x / y, где x и y — натуральные взаимно простые числа. Разделим её на каждую из данных дробей:

$$\frac{x}{y} : \frac{11}{333} = \frac{333x}{11y} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} : \frac{33}{555} = \frac{555x}{33y} = \frac{185x}{11y}.$$

Эти дроби должны быть целыми числами, поэтому $333x$ делится на $11y$, а $185x$ делится на $11y$. Поскольку числа x и y — взаимно простые, отсюда следует, что x делится на 11, а y делит числа 333 и 185, то есть является их общим делителем. Искомая дробь x / y будет наименьшей, если её числитель — наименьший, а знаменатель — наибольший из всех возможных. Следовательно,

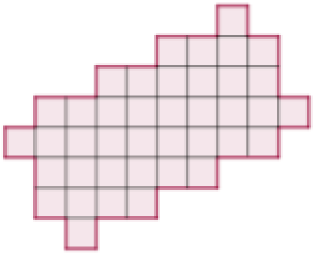
$$x = 11, \quad y = \text{НОД}(333, 185) = 37.$$

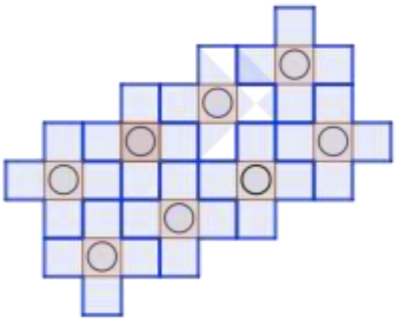
Критерии. Правильный ответ — 4 балла. Ответ в виде сократимой дроби — 3 балла. Доказано, что полученная дробь наименьшая — ещё 3 балла.

4. В наборе из 6 гирек ровно одна гирька имеет массу 3 *г* и ровно одна гирька — массу 6 *г*, масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 47 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

Ответ: 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г*, 24 *г*.
Решение. В наборе обязательно должна быть гирька массой 1 *г*, иначе вес в 1 *г* взвесить будет невозможно. Поскольку с помощью гирек можно также взвесить вес в 2 *г*, масса «следующей» гирьки набора равна либо 1 *г*, либо 2 *г*. Второй случай невозможен, иначе вес в 3 *г* можно будет взвесить двумя способами: 1 + 2 и 3. Таким образом, известны массы трёх гирек набора — 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, с помощью которых можно взвесить любой вес от 1 *г* до 1 + 1 + 3 = 5 *г* единственным образом.
Для взвешивания 6 граммов понадобится ещё одна гиря массой 3 *г* или 6 *г*. Масса в 3 *г* для 4-й гири не подходит, так как массы следующих гирь будут не более 9 *г* и 18 *г*, суммарный вес всех гирь — не более 1 + 1 + 3 + 3 + 9 + 18 = 35 *г,* и значит, массу в 47 *г* будет взвесить невозможно. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 11 *г*.
Для взвешивания 12 граммов нужна гиря массой 6 *г* или 12 *г*. В первом случае легко определяется масса 6-й гири: 47 – (11 + 6) = 30 *г*, при этом будет невозможно взвесить массы от 18 *г* до 29 *г*. Значит, масса 5-й гирьки 12 *г*. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 23 *г*. (Действительно, массы от 1 *г* до 11 *г* взвешиваются ровно одним способом с помощью первых 4- гирь, а массы от 12 *г* до 23 *г* получаются добавлением гири 12 *г* к соответствующему весу 1 *г* до 11 *г*.) Добавив к ним гирю массой в 47 – 23 = 24 *г,* получаем требуемый набор из 6 гирь 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г*, 24 *г* общей массой 47 *г*.
Критерии. Указан правильный набор гирь — 1 балл. Проверено, что можно получить любой требуемый вес от 1 *г* до 47 *г* — ещё 3 балла. Доказано, что других наборов нет, — 3 балла.

5. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян формой доски (см. рисунок) и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья ходит так же, как и обычная ладья, — по вертикали и по горизонтали — но только на одну клетку (вперёд, назад, влево или вправо). Какое *наименьшее* число марсианских ладей нужно расставить на марсианской шахматной доске так, чтобы они били все остальные клетки доски?





Ответ: 8 *ладей*.
Решение. Разобьём марсианскую доску на 8 равных «крестов» из пяти клеток (крестообразное пентамино) (рис. 1,*а*). В каждом таком «кресте» должна стоять хотя бы одна марсианская ладья, в противном случае его центральная клетка не бьётся никакой другой ладьей. Значит, общее число ладей не меньше 8 (*оценка*).
С другой стороны, восьми ладей будет достаточно, если в центр каждого «креста» поставить одну ладью, как это показано на рисунке 1,*а*. Тогда каждая клетки доски окажется под боем одной из марсианских ладей (*пример*).

Критерии. Приведены только правильный ответ и расположение ладей (*пример*) — 3 балла. Доказано, что количество ладей не меньше 8 (*оценка*) — ещё 4 балла.

7 класс

1. Из числа 987654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 12. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

Ответ: 9876432 *или* 9765432.
Решение. Искомое число делится на 12, а значит, на 3 и на 4. Цифру 1 надо обязательно вычеркнуть, оставшееся число 98765432 делится на 4, имеет сумму цифр 44 и по признаку делимости не делится на 3. Таким образом, надо вычеркнуть ещё хотя бы одну цифру так, чтобы сумма оставшихся цифр делилась на 3. Этого можно добиться, вычёркивая только цифры 5 или 8. В результате получим кратное 12 число 9876432 или число 9765432.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. В наборе из 6 гирек есть две гирьки массой 3 *г*, а масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 35 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

Ответ: 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 18 *г*.
Решение. В наборе обязательно должна быть гирька массой 1 *г*, иначе вес в 1 *г* взвесить будет невозможно. Поскольку с помощью гирек можно также взвесить вес в 2 *г*, масса «следующей» гирьки набора равна либо 1 *г*, либо 2 *г*. Второй случай невозможен, иначе вес в 3 *г* можно будет взвесить двумя способами: 1 + 2 и 3.
Таким образом, известны массы 4-х гирек набора — 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, с помощью которых, как легко убедиться, можно взвесить любой вес от 1 *г* до 1 + 1 + 3 + 3 = 8 *г* единственным образом. Для взвешивания 9 граммов нужна гиря массой 3 *г* или 9 *г*. В первом случае легко определяется масса 6-й гири: 35 – (8 + 3) = 24 *г*, при этом будет невозможно взвесить массы от 12 *г* до 23 *г*. Значит, масса 5-й гирьки 12 *г*. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 17 *г*. (Действительно, массы от 1 *г* до 8 *г* взвешиваются ровно одним способом с помощью первых 4-х гирь, а массы от 9 *г* до 17 *г* получаются добавлением гири 9 *г* к соответствующему весу 1 *г* до 8 *г*.) Добавив к ним гирю массой в 18 *г*, получаем требуемый набор из 6 гирь 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 18 *г* общей массой 35 *г*.
Критерии. Указан правильный набор гирь — 1 балл. Проверено, что можно получить любой вес от 1 *г* до 35 *г* — ещё 3 балла. Доказано, что других наборов нет, — 3 балла.

3. На конференцию по вопросам магии и волшебства приехало 900 фей и ведьм. Среди участниц конференции есть и феи, и ведьмы. Все они были рассажены за круглым столом. На вопрос «Верно ли, что рядом с вами сидит одна фея и одна ведьма?» все дружно ответили «Нет». Ведьмы всегда лгут, а феи всегда говорят правду. Сколько фей могло участвовать в конференции?

Ответ: 300.
Решение. Рядом с каждой феей сидят две феи (Ф**Ф**Ф) или две ведьмы (В**Ф**В). В первом случае рядом с каждой из фей должны сидеть тоже феи — ФФ**Ф**ФФ, но тогда и *все* участницы конференции обязательно феи, что невозможно. Во втором случае у каждой ведьмы с одной стороны сидит фея, а с другой — ведьма, то есть имеем ВВ**Ф**ВВ. Но тогда легко определяется положение остальных участниц конференции:

...ВВ**Ф**ВВ**Ф**ВВ**Ф**ВВ...,

Другими словами, каждая третья участница конференции — фея, и значит, общее количество фей 900 : 3 = 300.

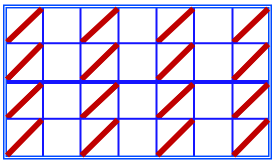
Критерии. Только ответ – 0 баллов. Ответ и правильное расположение без объяснений — 3 балла. Правильное пояснение, но пропущен случай …ФФФ… — 5 баллов. Только разобран случай …ФФФ… — 2 балла.

4. На отрезке AB отметили точку X, а затем построили два равносторонних треугольника AXY и BXZ по одну сторону от AB. Чему равен угол XYZ, если $AX = 1$ и $XB = 2$?

Ответ: 90°.
Решение. Треугольники AXY и BXZ — равносторонние, поэтому $XY = 1$ и $XZ = 2$, причём угол YXZ между этими отрезками равен 60°. Через точку Y проведём прямую, параллельную AB, до пересечения с XZ в точке T. Поскольку углы TYX и YXA равны как накрест лежащие, получаем $\angle TYX = \angle YXA = 60°$, то есть треугольник TYX — равносторонний, и значит, $YT = XT = XY = 1$. Отсюда $TZ = XZ - XT = 1$, и значит, треугольник YTZ — равнобедренный ($YT = TZ$), причём угол при вершине T, смежный с углом $\angle YTX = 60°$, равен 120°. Отсюда $\angle YZT = \angle TYZ = 30°$. Следовательно, $\angle XYZ = \angle XYT + \angle TYZ = 90°$.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Использовано дополнительное построение, связанное с равносторонним треугольником XYT или аналогичным ему, — 3 балла.

5. Прямоугольник 4×7 разбит прямыми на 28 одинаковых квадратных клеток. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

Ответ: 16.
Решение. В каждом прямоугольнике 2×7 можно провести не более 8 диагоналей: на его «средней» линии всего восемь узлов, а каждая диагональ имеет один из них своим концом. Значит, в исходном прямоугольнике 4×7 можно провести не более $8 \cdot 2 = 16$ диагоналей. Осталось привести пример прямоугольника с 16-ю диагоналями (см. рисунок).



Замечание. Возможны и другие примеры расположения диагоналей.
Критерии. Только пример — 3 балла. Доказана оценка — 4 баллов.