*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2011, №8, с. 69–76* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0085*

*М. ТУХТАСИНОВ, У. ИБРАГИМОВ*

# ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЯ

*Аннотация.* В данной работе рассматривается вопрос об инвариантности множества относительно системы с распределенными параметрами. Система описывается уравнением теплопроводности, в правой части которого в аддитивной форме находится управление. Относительно исходных параметров получены достаточные условия для сильной и слабой инвариантности множества, которое представляет график данного многозначного отображения.

*Ключевые слова*: управление, слабая инвариантность, сильная инвариантность, сосредоточенные параметры.

*УДК*: 517.977

*Abstract.* In this paper we study the invariance of given sets with respect to a system with distributed parameters. The considered system is described by a heat conductivity equation whose right-hand side written in the additive form contains a control. For the initial data we obtain sufficient conditions for the strong and weak invariance of the set that represents the graph of a given multivalued mapping.

*Keywords*: control, weak invariance, strong invariance, concentrated parameters.

**1. Введение.** Цель изучения инвариантных множеств сводится к тому, чтобы как можно дольше удержать траекторию движения объекта в пределах заданного множества (области выживаемости). В ранее изученных задачах достигнуты впечатляющие успехи, в основном, для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1]–[6].

Существуют теоретические и практические вопросы в управляемых системах с распределенными параметрами, не поддающиеся решению с помощью известных методов. Примерами задач такого типа являются: сохранение температуры в допустимых пределах в заданном объеме, уклонения от нежелательных состояний и др.

В данной работе изучены слабая и сильная инвариантность данного множества относительно системы, описываемой уравнениями в частных производных. Получены достаточные условия для инвариантности множества, когда на управление наложено интегральное ограничение.

Ограниченная область $\Omega(\subset R^n)$ называется областью с кусочно-гладкой границей, если границу $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ области $\Omega$ можно представить в виде $\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{N} \overline{\Gamma}_j$, где $\Gamma_j \subset \Gamma$ — множество, открытое относительно топологии, индуцируемой на $\Gamma$ топологией $R^n$. Каждая

Поступила 27.04.2010

$\Gamma_j$ — связная поверхность класса $C^1$, т. е. для каждой точки $x_0 \in \Gamma_j$ можно указать шар $U_\varepsilon(x_0)$ со столь малым радиусом $\varepsilon > 0$, что множество $\Gamma_j \bigcap U_\varepsilon(x_0)$ задается уравнением вида $x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, где $f_k(\cdot) \in C^1$, $k$ $(1 \le k \le n)$ — некоторый номер.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $R^n$ с кусочно-гладкой границей.Через $A$ обозначим дифференциальный оператор [7]–[11]

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right), \tag{1}$$

где функции $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ удовлетворяют условиям $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{2}$$

для любого $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$. Неравенство (2) называется условием равномерной эллиптичности оператора $A$ (1). В качестве области определения оператора $A$ берется пространство $\dot{C}^2(\Omega)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в некоторой граничной полоске (для каждой функции своя полоска) области $\Omega$.

В пространстве $\dot{C}^2(\Omega)$ вводится новое скалярное произведение, связанное с оператором $A$,

$$[\varphi, \psi]_A = (A\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in \dot{C}^2(\Omega), \tag{3}$$

где $(\cdot,\, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Легко проверяется, что (3) обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому можно произвести пополнение пространства $\dot{C}^2(\Omega)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_A = (A\varphi, \varphi)^{1/2}, \quad \varphi \in \dot{C}^2(\Omega),$$

порожденной скалярным произведением (3).

Полученное пространство обозначают через $H_A$ и называют энергетическим пространством оператора $A$ ([7], с. 64). Показывается, что энергетическое пространство $H_A$ состоит как из элементов пространства $\dot{C}^2(\Omega)$, так и из элементов, полученных при пополнении. Энергетическое пространство оператора $A$ вкладывается в исходное пространство $L_2(\Omega)$ вполне непрерывно [7]. Поэтому обобщенный спектр оператора $A$ дискретен. Последнее означает, что имеются бесконечная последовательность $\{\lambda_i\}$ собственных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и последовательность $\{\varphi_n\}$ собственных элементов, полная в пространстве $L_2(\Omega)$. Не умаляя общности, можем считать, что

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Тогда имеем

$$\|\varphi_i\|_A = \sqrt{(\varphi_i, A\varphi_i)} = \sqrt{(\varphi_i, \lambda_i\varphi_i)} = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{(\varphi_i, \varphi_i)} = \sqrt{\lambda_i}.$$

Поэтому последовательность $\left\{\frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ составляет нормированную, полную систему в $H_A$.

С оператором $A$ можно связать следующие пространства:

$$l_r = \left\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty\right\},$$

$$H_r = \left\{f \in L_2(\Omega) : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi_i, \quad \alpha \in l_r\right\},$$

где $r \geq 0$ — действительное число. В пространствах $l_r$, $H_r$ вводятся скалярные произведения и нормы следующим образом:

$$(\alpha, \beta)_r = (f, g)_r = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \|\alpha\|_r = \|f\|_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in l_r$, $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i$, $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i \in H_r$.

Очевидно, выполнены следующие соотношения: $H_0 = L_2(\Omega)$, $H_r \subset H_s$ при $r \geq s$.

Далее, также через $A$ обозначим ограниченный оператор, действующий из пространства $H_{r+1}$ в $H_r$ по правилу

$$A\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \varphi_i.$$

Так как

$$\|Af\|_r^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \varphi_i \right\|_r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{r+2} \alpha_i^2 = \|f\|_{r+2}^2, \quad f \in H_{r+2},$$

то

$$\|Af\|_r = \|f\|_{r+2}.$$

**2. Вспомогательные утверждения.** Рассмотрим задачу теплообмена

$$\dot{z}(t) + Az(t) = u(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$z(0) = z^0, \tag{5}$$

где $z(\cdot)$, $u(\cdot)$ — абстрактные функции, т. е. при каждом $t \geq 0$ являются единственными элементами пространств $H_1$, $H_0 = L_2(\Omega)$ соответственно, отсюда $z^0 \in H_1$.

**Теорема 1.** *Пусть $u(\cdot) \in L_2([0, T], H_0)$, $z^0 \in H_1$. Тогда задача (4), (5) имеет единственное решение $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, принадлежащее пространству $C([0, T], H_1)$, удовлетворяющее интегральному равенству*

$$-\int_0^T \int_\Omega z(t)\dot{\vartheta}(t) dx\, dt + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial z(t)}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta(t)}{\partial x_j} dx\, dt =$$

$$= \int_\Omega z(0)\vartheta(0) dx + \int_0^t \int_\Omega u(t)\vartheta(t) dx\, dt \tag{6}$$

*при любом $\vartheta(\cdot) \in C^1\big([0, T], H_1\big)$ с условием $\vartheta(x, T) = 0$.*

*Доказательство.* Так как $u(t), z^0 \in L_2(\Omega)$, то их можно представить в виде рядов Фурье

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k, \quad z^0 = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^0 \varphi_k \tag{7}$$

с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(\cdot)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k^0|^2 < \infty. \tag{8}$$

Искомое решение задачи (4), (5) представим в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \varphi_k. \tag{9}$$

Подставляя разложения (7), (9) в (4), (5) и приравнивая коэффициенты при $\varphi_k$ с одинаковыми номерами, получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = u_k(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{10}$$

$$z_k(0) = z_k^0, \tag{11}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ . Из (10), (11) имеем

$$z_k(t) = e^{-\lambda_k t} z_k^0 + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} u_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Теперь проверим, что функция (9), построенная по коэффициентам (12), действительно является решением задачи (4), (5). Из (12) имеем

$$|z_k(t)| \leq e^{-\lambda_k t}|z_k^0| + \sqrt{\int_0^t e^{-2\lambda_k (t-\tau)} d\tau \int_0^t u_k^2(\tau) d\tau} \leq$$

$$\leq e^{-\lambda_k t}|z_k^0| + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}} \sqrt{\int_0^t u_k^2(\tau) d\tau}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

откуда

$$|z_k(t)|^2 \leq 2|z_k^0|^2 + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t u_k^2(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Умножив соотношение (13) на $\lambda_k$ и суммируя по $k$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_k^2(t) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k^0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t u_k^2(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отсюда имеем

$$\|z(t)\|_1^2 \leq 2\|z^0\|_1^2 + \|u(\cdot)\|_{L_2([0,1],H_0)}^2.$$

Если учитывать (8), то последнее неравенство означает, что $z(t) \in H_1$ для каждого $t \in [0, T]$.

Теперь проверим ее непрерывность по $t$ в норме пространства $H_1$. Для этого рассмотрим выражение

$$\|z(t+h) - z(t)\|_1^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k |z_k(t+h) - z_k(t)|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k |z_k(t+h) - z_k(t)|^2,$$

где числа $h > 0$ и $N$ выбираются далее по заданному $\varepsilon > 0$. В силу (12) имеем

$$z_k(t+h) - z_k(t) = z_k^0 e^{-\lambda_k t}(e^{-\lambda_k h} - 1) + \int_0^t u_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} (e^{-\lambda_k h} - 1) d\tau +$$

$$+ \int_t^{t+h} u_k(\tau) e^{-\lambda_k (t+h-\tau)} d\tau.$$

Так как $e^{-\lambda_k t} \le 1$, то

$$\|z(t+h)-z(t)\|_1^2 \le 3\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\big|e^{-\lambda_k h}-1\big|^2\left(\big|z_k^0\big|^2+\left|\int_0^t u_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right|^2\right)+$$
$$+\,3\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k\left(\big|z_k^0\big|^2+\left|\int_0^t u_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right|^2\right)+$$
$$+\,3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\int_t^{t+h} u_k(\tau)e^{-\lambda_k(t+h-\tau)}d\tau\right|^2. \quad (14)$$

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. В силу (8) и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\int_0^t u_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^t|u_k(\tau)|^2d\tau\int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)}d\tau =$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-2\lambda_k t})\int_0^t|u_k(\tau)|^2d\tau \le \|u(\cdot)\|^2$$

выбором числа $N$ можно сделать среднее слагаемое (14) меньше $\varepsilon^2/3$. Следовательно, выбором положительного числа $h$ можно сделать первое слагаемое также меньше $\varepsilon^2/3$.

Для третьего слагаемого получим оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\int_t^{t+h} u_k(\tau)e^{-\lambda_k(t+h-\tau)}d\tau\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_t^{t+h}u_k^2(\tau)d\tau\int_t^{t+h}e^{-2\lambda_k(t+h-\tau)}d\tau =$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{1-e^{-2\lambda_k h}}{2\lambda_k}\int_t^{t+h}u_k^2(\tau)d\tau \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_t^{t+h}u_k^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\|u(\cdot)\|^2_{L_2([t,t+h];\,H_0)}.$$

Отсюда следует, что выбором числа $h$ можно сделать третье слагаемое суммы (14) также меньше $\varepsilon^2/3$. Из этих оценок получим неравенство $\|z(t+h)-z(t)\|_1 < \varepsilon$, которое означает непрерывность функции $z(t)$, $0 \le t \le T$.

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция, определяемая рядом (9), удовлетворяет интегральному равенству (6) для любых функций $\vartheta(\cdot)$ из пространства $C^1\big([0,T],H_1\big)$ с условием $\vartheta(x,T)=0$. □

Задачу (4), (5) рассмотрим с точки зрения управления, т.е. функции $u(\cdot)$ примем в качестве управляющих функций. Они удовлетворяют условиям $u(\cdot)\in L_2\left([0,T];\,H_1\right)$, $\|u(\cdot)\|\le\rho$, где $\rho$ — некоторое положительное число. Исходя из этого, введем множество

$$V=\big\{u(\cdot)\in L_2\left([0,T];\,H_1\right),\quad \|u(\cdot)\|\le\rho\big\},$$

элементы которого называются *допустимыми управлениями.*

**3. Основные результаты.**

**Определение 1.** Множество $W\subset R^1$ называется сильно инвариантным на отрезке времени $[0,T]$ относительно системы (4), если для любых $\|z^0\|_1\in W$ и $u(\cdot)\in V$ выполняется включение $\|z(\cdot)\|\in W$.

**Определение 2.** Множество $W\subset R^1$ называется слабо инвариантным на отрезке времени $[0,T]$ относительно системы (4), если для любого $\|z^0\|_1\in W$ существует $u(\cdot)\in V$ такое, что выполняется включение $\|z(\cdot)\|\in W$.

Рассмотрим сильную и слабую инвариантность множества вида $W=[0,b]$, где $b$ — некоторое положительно число.

Дальнейшая цель — нахождение соотношений между параметрами $T$, $b$, $\rho$ таким образом, чтобы обеспечить сильную или слабую инвариантность множества $W$ на отрезке времени $[0,T]$ относительно системы (4).

Пусть $z^0\in H_1$ — любой элемент, удовлетворяющий условию $\|z^0\|_1\in W$, т. е. $\|z^0\|_1\le b$, $u(\cdot)$ — любое допустимое управление.Тогда соответствующее решение уравнения (4) имеет вид

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(z_k^0e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right)\varphi_k,\quad 0\le t\le T,$$

отсюда

$$\|z(\cdot)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^T\left[z_k^0e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right]^2dt,$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $L_2([0,T];H_1)$.

Сначала рассмотрим подинтегральное выражение с суммой, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(z_k^0e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right)^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(z_k^0e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right)^2\le\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|z_k^0|^2e^{-2\lambda_k t}+2\lambda_k|z_k^0|e^{-\lambda_k t}\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau+\right.\\
&\qquad\left.+\lambda_k\int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)}d\tau\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau\right)\le\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|z_k^0|^2e^{-2\lambda_1 t}+2\lambda_k|z_k^0|e^{-\lambda_k t}\sqrt{\int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)}d\tau}\sqrt{\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau}+\frac{1-e^{-2\lambda_k t}}{2}\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau\right)\le\\
&\le\int_0^T\left(e^{-2\lambda_1 t}\|z^0\|_1^2+2e^{-\lambda_1 t}\sqrt{\frac{1-e^{-2\lambda_k t}}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}|z_k^0|\sqrt{\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau}+\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda_k t})\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau\right)dt\le\\
&\le\int_0^T\left(e^{-2\lambda_1 t}\|z^0\|_1^2+2e^{-\lambda_1 t}b\sqrt{\frac{1-e^{-2\lambda_1 t}}{2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t u_k^2(\tau)d\tau}+(1-e^{-\lambda_1 t})\rho^2\right)dt\le\\
&\le\int_0^T\left(e^{-2\lambda_1 t}b^2+2e^{-\lambda_1 t}b\rho\sqrt{1-e^{-\lambda_1 t}}+(1-e^{-\lambda_1 t})\rho^2\right)dt=\\
&=\int_0^T\left(e^{-2\lambda_1 t}b+\sqrt{1-e^{-\lambda_1 t}}\rho\right)^2dt.
\end{aligned}\tag{15}$$

Для исследования подинтегрального выражения введем функцию
$$\varphi(t) = e^{-2\lambda_1 t} b + \sqrt{1 - e^{-\lambda_1 t}}\rho, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что $\varphi(0) = b$. С помощью дифференциального исчисления легко показать, что
$$\sup_{t \geq 0} \varphi(t) = \begin{cases} \rho, & \text{если } \rho \geq 2b; \\ b + \frac{\rho^2}{4b}, & \text{если } \rho < 2b. \end{cases}$$

Отсюда и из (15) следует

**Теорема 2.** *Если либо* $2b \leq \rho$, $\rho\sqrt{T} \leq b$, *либо* $\rho < 2b$, $(b + \frac{\rho^2}{4b})\sqrt{T} \leq b$, *то множество* $W$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0, T]$ *относительно системы* (4).

Справедлива

**Теорема 3.** *Если* $1 \leq 2\lambda_1$, *то множество* $W$ *слабо инвариантно на любом отрезке* $[0, T]$ *относительно системы* (4).

*Доказательство теоремы* 3. Пусть $z^0$ — произвольный элемент пространства $H_1$ с условием $\|z^0\|_1 \leq b$. Положим $u(t) = 0$, $t \geq 0$. Тогда соответствующее решение уравнения (4) с учетом (9) имеет вид
$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} z_k^0 \varphi_k.$$

Значит,
$$\|z(\cdot)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T \left(e^{-\lambda_k t} z_k^0\right)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k^0|^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k T}}{2\lambda_k}. \tag{16}$$

Допустим, что выполнено условие теоремы. Тогда из (16) имеем
$$\|z(\cdot)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k^0|^2 \frac{1}{2\lambda_1} \leq \frac{b^2}{2\lambda_1} \leq b^2,$$
отсюда $\|z(\cdot)\| \in W$, т. е. $W$ слабо инвариантно. □

## Литература


[1] Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. *Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения*, ДАН СССР **303** (4), 794–796 (1988).

[2] Aubin J.-P. *A survey of viability theory*, SIAM. Control and Optim. **28** (4), 749–788 (1990).

[3] Feuer A., Heymann M. *Ω-invariance in control systems with bounded controls*, J. Math. Anal. Appl. **53** (2), 266–276 (1976).

[4] Фазылов А.З. *О существовании ядра выпуклого множества в линейных управляемых системах*, Узб. матем. журн., №1, 51–56 (1992).

[5] Фазылов А., Ибрагимов У.М. *О сильно инвариантных множествах линейных управляемых систем*, Наука и образов. Южного Казахстана. Респ. научн. журн. Сер. матем., информ., физ., №34, 130–133 (2003).

[6] Haddad G. *Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory*, Israel J. Math. **39** (1, 2), 83–100 (1981).

[7] Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных* (Высш. школа, М., 1977).

[8] Авдонин С.А., Иванов С.А. *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент* (УМКВО, Киев, 1989).

[9] Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. *Об игровых задачах для эволюционных уравнений второго порядка*, Изв. вузов. Матем., №1, 54–62 (2007).

[10] Осипов Ю.С. *К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами*, ДАН СССР **223** (6), 1314–1317 (1975).

[11] Тухтасинов М., Маматов М.Ш. *О задачах перехода в управляемых системах*, Дифференц. уравнения **45** (3), 425–430 (2009).

*М. Тухтасинов*

*заместитель декана по учебной работе, профессор,*
*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,*
*вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,*

e-mail: mumin51@mail.ru

*У.М. Ибрагимов*

*доцент, кафедра информатики,*
*Южно-Казахстанский государственный университет,*
*ул. Тауке хан, д. 5, г. Шымкент, 160019, Республика Казахстан,*

e-mail: us-ibr@rambler.ru

*M. Tukhtasinov*

*Deputy Dean in Education, Professor,*
*National University of Uzbekistan,*
*Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: mumin51@mail.ru

*U.M. Ibragimov*

*Associate Professor, Chair of Information Science,*
*South Kazakhstan State University,*
*5 Tauke khan str., Shymkent, 160019 Republic of Kazakhstan,*

e-mail: us-ibr@rambler.ru