Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 10, с. 53–64 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

П.Г. СУРКОВ

ОТСЛЕЖИВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ ДЛЯ ОБЩЕГО КЛАССА УПРАВЛЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается задача управления параболическим уравнением с памятью. Она заключается в нахождении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который позволяет отслеживать решение заданного уравнения с неизвестным входным воздействием. В данной работе для указанной задачи предложены два алгоритма, основанные на методе экстремального сдвига, один — для случая непрерывного измерения фазовых координат, второй — для дискретного.

Ключевые слова: системы с распределенными параметрами, системы с запаздыванием, управление.

УДК: 517.977

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $(V, |\cdot|_V)$ — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, плотно и непрерывно вложенное в гильбертово пространство $(H, |\cdot|_H)$. Если отождествить H со своим сопряженным H^*, то справедливы включения $V \subset H \subset V^*$. Символом $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать двойственность между V и V^*, а также скалярное произведение в H.

Рассматривается задача отслеживания решения уравнения

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^t f(t-s)Ax(s)\,ds = Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1.1}$$

где $x \in H$, H — фазовое пространство; $x(0) = x_0 \in V$ — начальное состояние; функция памяти $f(\cdot) \in W_2^1(T, \mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}), \dot{f}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R})\}$; B — линейный, непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U (пространство управлений) с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ в пространство H. Производная $\dot{x}$ понимается в смысле распределений ([1], с. 14), а оператор $A : V \to V^*$ удовлетворяет условиям:

(A1) A хеминепрерывен, т. е. отображение $t \to (A(u+tv), w)$ непрерывно на T для всех $u, v, w \in V$;

(A2) A сильно монотонный, т. е. существует $\omega > 0$ такое, что для всех $u, v \in V$ выполнено неравенство $(Au - Av, u - v) \geq \omega|u - v|_V^2$;

(A3) существует $b_1 > 0$ со свойством $\|Av\|_{V^*} \leq b_1|v|_V$ для всех $v \in V$.

Замечание. Уравнения вида (1.1) исследовались в работах [2], [3], а также в [4], [5], где обсуждались вопросы существования, единственности и регулярности решений. Важность

Поступила 18.03.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке УрО РАН № 15-7-1-22.

таких исследований связана с тем фактом, что известное в теории материалов с памятью уравнение

$$\dot{x}(t,\eta) + \Delta x(t,\eta) + \int_0^t f(t-s)\Delta x(s,\eta)\,ds = u(t,\eta), \quad x|_\Gamma = 0,$$

где $\eta \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T$, является частным случаем уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) будем называть эталонным. Управление $u(\cdot) \in L^2(T;U)$, а также отвечающее ему решение $x(\cdot) = x(\cdot;x_0,u(\cdot))$ заранее неизвестны. Через $L^2(T;U)$ обозначим множество всех измеримых по Бохнеру [1] функций $f \in (T \to U)$, для которых

$$\int_T |f(t)|_U^2\,dt < \infty.$$

В дальнейшем будем полагать, что для заданных A и $f(\cdot)$, а также неизвестного входа $u(\cdot)$ существует единственное решение уравнения (1.1) со следующим свойством: $x(\cdot) \in W(T;V) = \{x(\cdot) \in L^2(T;V), \dot{x}(\cdot) \in L^2(T;V^*)\}$. Как следует из теоремы 1.17 ([1], с. 177), ввиду компактности интервала T можно считать, что $x \in C(T;H)$.

Рассматриваемая в данной работе задача состоит в следующем. Пусть наряду с эталонным уравнением имеется еще одно уравнение

$$\dot{z}(t) + Az(t) + \int_0^t f(t-s)Az(s)\,ds = Bv(t), \quad z(0) = z_0 \in V. \tag{1.2}$$

Это уравнение подвержено воздействию некоторого выбираемого управления $v(\cdot) \in L^2(T;U)$. Начальные состояния уравнений (1.1) и (1.2) удовлетворяет неравенству

$$|z_0 - x_0|_V \le h. \tag{1.3}$$

Здесь величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Пусть для каждого h выбрано равномерное разбиение отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_i^h\}_{i=0}^{m_h} \quad (\tau_0^h = 0, \quad \tau_m^h = \vartheta, \quad \tau_{i+1}^h = \tau_i^h + \delta), \tag{1.4}$$

где шаг разбиения $\delta = \delta(h)$, причем $\delta(h) \to 0$ при $h \to 0$, $m_h \in \mathbb{N}$, $\vartheta = m_h\delta$. В моменты времени τ_i^h измеряется состояние $x(\tau_i^h) = x(\tau_i^h;x_0,u(\cdot))$ эталонного уравнения, а также состояние $z(\tau_i^h) = z(\tau_i^h;z_0,v(\cdot))$ уравнения (1.2). Состояния $x(\tau_i^h)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений $\xi_i^h \in H$ удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_i^h) - \xi_i^h|_H \le h. \tag{1.5}$$

Требуется указать алгоритм формирования управления $v = v^h$, позволяющего синхронно с развитием процесса осуществлять отслеживание решения $x(\cdot)$ эталонного уравнения решением $z(\cdot)$ уравнения (1.2). Таким образом, рассматриваемая задача состоит в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x(\tau_i^h)$ и $z(\tau_i^h)$ в режиме “реального времени” формирует управление $v = v^h(\cdot)$ по принципу обратной связи такое, что отклонение $z(\cdot) = z(\cdot;z_0,v^h(\cdot))$ от $x(\cdot) = x(\cdot;x_0,u(\cdot))$ в метрике пространства $C(T;H) \cap L^2(T;V)$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

В случае, когда управления u и v стеснены мгновенными ограничениями, $u,v \in P$, $P \subset U$ — заданное ограниченное и замкнутое множество, поставленная задача может быть решена с помощью метода экстремального сдвига, предложенного Н.Н. Красовским [6].

В данной работе рассматривается случай, когда отсутствует информация об управлениях u и v, сужающая их класс, т.е. допустимым управлением может быть любая функция из пространства $L^2(T;U)$. Для решения этой задачи используется модификация принципа экстремального сдвига, основанная на идее его локальной регуляризации [7]. Для уравнения с отсутствующим слагаемым памяти $f(\cdot) \equiv 0$ поставленная задача рассмотрена в [8].

Наряду с измерением фазовых координат в дискретные моменты времени (1.4) рассматривается также случай непрерывных измерений $x(t)$ и $z(t)$.

2. Вспомогательные построения

Прежде чем перейти к основной части статьи, приведем вспомогательные построения. Пусть $k(\cdot)$ — единственное решение интегрального уравнения

$$k(t) + f(t) + \int_0^t k(t-s)f(s)\,ds = 0, \quad t \in T,$$

причем $k(\cdot) \in W_2^1(T;\mathbb{R})$. Тогда ([2], теорема 1) эталонное уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + k(0)x(t) + g_x(t) = B\tilde{u}(t) + k(t)x_0, \tag{2.1}$$

т. е. решения одного являются решениями другого. Здесь введены обозначения $\widetilde{u}(t) = u(t) + \int\limits_0^t k(t-s)u(s)\,ds$, $g_x(t) = \int\limits_0^t \dot{k}(t-s)x(s)\,ds$. Уравнение (1.2) эквивалентно уравнению

$$\dot{z}(t) + Az(t) + k(0)z(t) + g_z(t) = B\widetilde{v}(t) + k(t)z_0, \tag{2.2}$$

где $\widetilde{v}(t) = v(t) + \int\limits_0^t k(t-s)v(s)\,ds$, $g_z(t) = \int\limits_0^t \dot{k}(t-s)z(s)\,ds$. Согласно лемме 1 из [2] управления v^h и $\widetilde{v}^h$ связаны соотношением

$$v^h(t) = \widetilde{v}^h(t) + \int_0^t f(t-s)\widetilde{v}^h(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{2.3}$$

Лемма 1. *Пусть оператор* $A : V \to V^*$ *удовлетворяет условиям* (A1)–(A3), $f(\cdot) \in W_2^1(T,\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{L}(U,H)$, $u(\cdot) \in L^2(T;U)$. *Тогда существует единственное решение* x *уравнения* (2.1), *при этом* $x \in W(T;V) \subset C(T;H)$.

Доказательство. Положим $X = L^2(T;V)$, тогда сопряженным к X пространством X^* будет $L^2(T;V^*)$. Следуя ([1], с. 239), скалярное произведение элементов $\varphi \in X^*$ и $\psi \in X$ зададим формулой

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_T (\varphi(t), \psi(t))\,dt.$$

Рассмотрим оператор Вольтерра $\widetilde{A} : X \to X^*$, определяемый формулой

$$\widetilde{A}x(t) = Ax(t) + k(0)x(t) + \int_0^t \dot{k}(t-s)x(s)\,ds, \quad t \in T.$$

Покажем, что оператор Вольтерра $\widetilde{A} + \lambda I$, $\lambda \geq 0$, монотонный, т. е. для произвольных элементов $u, v \in V$ выполнено неравенство $\langle \widetilde{A}u + \lambda u - \widetilde{A}v - \lambda v, u - v \rangle > 0$. Учитывая сильную монотонность (A2) оператора A, получаем

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{A}u - \widetilde{A}v + \lambda(u-v), u-v \rangle &= \int_0^\vartheta (Au(t) - Av(t) + (\lambda + k(0))(u(t)-v(t)), u(t)-v(t))\,dt + \\ &+ \int_0^\vartheta \left(\int_0^t \dot{k}(t-s)(u(s)-v(s))\,ds, u(t)-v(t) \right) dt \geq \\ &\geq (\omega + \lambda + k(0)) \int_0^\vartheta |u(t)-v(t)|_V^2\,dt + \int_0^\vartheta \int_0^t \Big(\dot{k}(t-s)(u(s)-v(s)), u(t)-v(t) \Big)\,ds\,dt. \end{aligned}$$

Для последнего слагаемого имеем цепочку оценок

$$\Big|\int_0^\vartheta\int_0^t \dot{k}(t-s)(u(s)-v(s),u(t)-v(t))\,ds\,dt\Big| \le \int_0^\vartheta\int_0^t |\dot{k}(t-s)|\,|(u(s)-v(s),u(t)-v(t))|\,ds\,dt \le$$
$$\le \|\dot{k}\|_{L_1(T;\mathbb{R})}\int_0^\vartheta\int_0^\vartheta |(u(s)-v(s),u(t)-v(t))|\,ds\,dt \le \vartheta c_1\int_0^\vartheta |u(t)-v(t)|_V^2\,dt,$$

где $c_1 = \|\dot{k}\|_{L_1(T;\mathbb{R})} \ge 0$. С другой стороны,

$$\int_0^\vartheta\left(\int_0^t \dot{k}(t-s)(u(s)-v(s))\,ds, u(t)-v(t)\right)dt \ge -\vartheta c_1\int_0^\vartheta |u(t)-v(t)|_V^2\,dt.$$

Осталось показать, что для некоторого $\lambda \ge 0$ выполнено соотношение

$$(\omega+\lambda+k(0))\int_0^\vartheta |u(t)-v(t)|_V^2\,dt - \vartheta c_1\int_0^\vartheta |u(t)-v(t)|_V^2\,dt > 0.$$

Если λ определить неотрицательным выражением $\lambda = \vartheta c_1 + |k(0)|$, то последнее неравенство справедливо, и тогда оператор $\widetilde{A}+\lambda I$ монотонный.

Поскольку оператор A хеминепрерывный (A1), то нетрудно убедиться в том, что оператор $\widetilde{A}+\lambda I$ радиально непрерывный, т. е. отображение $s \to \langle(\widetilde{A}+\lambda I)(u+sv), v\rangle$ непрерывно на T при любых фиксированных $u, v \in V$. Далее, пользуясь следствием к теореме 1.3 ([1], с. 251), завершаем доказательство леммы. □

3. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения координат

В данном случае измерения решений уравнений (2.1) и (2.2) происходят непрерывно, т. е. в каждый момент времени $t \in T$ производятся измерения фазовых состояний, что определяет измеримые по Лебегу функции $z(t)$ и $\xi^h(t) \in H$ со свойством

$$|x(t)-\xi^h(t)|_H \le h, \quad t \in T. \tag{3.1}$$

Фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1] \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Управление $\widetilde{v}_\alpha^h(t)$ в уравнении (2.2) зададим по формуле

$$\widetilde{v} = \widetilde{v}_\alpha^h(t) = \alpha^{-1}B^*(\xi^h(t) - z_\alpha^h(t)), \tag{3.2}$$

где B^* обозначает линейный оператор $\mathcal{L}(H;U)$, сопряженный к оператору B, а $z_\alpha^h(\cdot)$ — решение уравнения (2.2) с правой частью $\widetilde{v} = \widetilde{v}_\alpha^h(\cdot)$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha = \alpha(h) = h^\gamma$, $0 < \gamma \le 1-\beta/2$, $\beta \in (0,1)$. Тогда можно указать в явном виде постоянную $d > 0$, не зависящую от $h \in (0,1)$, такую, что справедливо неравенство*

$$|z_\alpha^h(t)-x(t)|_H^2 + 2\omega\int_0^t |z_\alpha^h(s)-x(s)|_V^2\,ds \le d(h^\beta + h^\gamma), \quad t \in T.$$

Доказательство. Из определения управления (3.2), получаем оценки

$$|\widetilde{v}_\alpha^h(t)|_U^2 \le \alpha^{-2}|B^*(\xi^h(t)-z_\alpha^h(t))|_U^2 = \alpha^{-2}b^2|\xi^h(t)-z_\alpha^h(t)|_H^2 =$$
$$= \alpha^{-2}b^2|\xi^h(t)-x(t)+x(t)-z_\alpha^h(t)|_H^2 \le$$
$$\le \alpha^{-2}b^2(|\xi^h(t)-x(t)|_H + |x(t)-z_\alpha^h(t)|_H)^2 \le 2\alpha^{-2}b^2(h^2+|\mu_\alpha^h(t)|_H^2), \quad t \in T,$$

где $\mu^h_\alpha(t) = x(t) - z^h_\alpha(t)$ и $b = \|B^*\|_{\mathcal{L}(H;U)}$. Тогда имеем неравенство

$$\int_0^t |\widetilde{v}^h_\alpha(s)|^2_U\,ds \le 2\alpha^{-2}b^2\int_0^t |\mu^h_\alpha(s)|^2_H\,ds + 2\alpha^{-2}b^2h^2\vartheta. \tag{3.3}$$

Следующее неравенство получим, используя соотношение (3.1):

$$\begin{aligned}(B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), x(t) - z^h_\alpha(t)) &= (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), x(t) - \xi^h(t) + \xi^h(t) - z^h_\alpha(t)) = \\ &= (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), x(t) - \xi^h(t)) + (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), \xi^h(t) - z^h_\alpha(t)) \le \\ &\le (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), \xi^h(t) - z^h_\alpha(t)) + bh(|\widetilde{u}(t)|_U + |\widetilde{v}^h_\alpha(t)|_U) \quad \text{при п.в. } t \in T. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим разность двух уравнений (2.1) и (2.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - \dot{z}^h_\alpha(t) + Ax(t) - Az^h_\alpha(t) + k(0)(x(t) - z^h_\alpha(t)) = B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)) +& \\ + k(t)(x_0 - z_0) + \int_0^t \dot{k}(t-s)(z^h_\alpha(s) - x(s))\,ds.&\end{aligned} \tag{3.5}$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\mu^h_\alpha(t)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d|\mu^h_\alpha(t)|^2_H}{dt} + (Ax(t) - Az^h_\alpha(t), \mu^h_\alpha(t)) + k(0)|\mu^h_\alpha(t)|^2_H = (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), \mu^h_\alpha(t)) +& \\ + (k(t)(x_0 - z_0), \mu^h_\alpha(t)) + \left(\int_0^t \dot{k}(t-s)\mu^h_\alpha(s)\,ds, \mu^h_\alpha(t)\right).&\end{aligned}$$

Ввиду сильной монотонности $(A2)$ оператора A имеем

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d|\mu^h_\alpha(t)|^2_H}{dt} - k(0)|\mu^h_\alpha(t)|^2_H + (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), \mu^h_\alpha(t)) + (k(t)(x_0 - z_0), \mu^h_\alpha(t)) +& \\ + \int_0^t (\dot{k}(t-s)\mu^h_\alpha(s), \mu^h_\alpha(t))\,ds \ge \omega|\mu^h_\alpha(t)|^2_V.&\end{aligned}$$

Используя соотношение (3.4), преобразуем полученное неравенство к виду

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d|\mu^h_\alpha(t)|^2_H}{dt} + k(0)|\mu^h_\alpha(t)|^2_H + \omega|\mu^h_\alpha(t)|^2_V \le& \\ \le |k(t)|\,|(x_0 - z_0, \mu^h_\alpha(t))| + \int_0^t |\dot{k}(t-s)|\,|(\mu^h_\alpha(s), \mu^h_\alpha(t))|\,ds +& \\ + (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t)), \xi^h(t) - z^h_\alpha(t)) + bh(|\widetilde{u}(t)|_U + |\widetilde{v}^h_\alpha(t)|_U).&\end{aligned}$$

Для интеграла в последнем выражении применим неравенство Коши–Буняковского, тогда

$$\begin{aligned}\frac{d|\mu^h_\alpha(t)|^2_H}{dt} + 2k(0)|\mu^h_\alpha(t)|^2_H + 2\omega|\mu^h_\alpha(t)|^2_V \le& \\ \le 2c_2|x_0 - z_0|^2_H|\mu^h_\alpha(t)|^2_H + 2c_1|\mu^h_\alpha(t)|_H\int_0^t |\mu^h_\alpha(s)|_H\,ds +& \\ + 2(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h_\alpha(t), B^*(\xi^h(t) - z^h_\alpha(t)))_U + 2bh(|\widetilde{u}(t)|_U + |\widetilde{v}^h_\alpha(t)|_U),&\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $c_2 = \|k\|_{C(T;\mathbb{R})}$. В зависимости от знака множителя $k(0)$ возможны два случая: первый $k(0) = -f(0) \ge 0$ и второй $k(0) < 0$. Схема доказательства в обоих случаях совпадает, а выкладки при $k(0) \geq 0$ проще, поэтому приведем ее для второго случая ($k(0) < 0$). Принимая во внимание (1.3), неравенство (3.6) приведем к виду

$$\frac{d|\mu_\alpha^h(t)|_H^2}{dt} + 2\omega|\mu_\alpha^h(t)|_V^2 + \alpha(|\widetilde{v}_\alpha^h(t)|_U^2 - |\widetilde{u}(t)|_U^2) \leq 2(c_2h^2 - k(0))|\mu_\alpha^h(t)|_H^2 +$$
$$+ 2c_1|\mu_\alpha^h(t)|_H \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H\, ds + 2bh(|\widetilde{u}(t)|_U + |\widetilde{v}_\alpha^h(t)|_U) + \alpha(|\widetilde{v}_\alpha^h(t)|_U^2 - |\widetilde{u}(t)|_U^2) +$$
$$+ 2(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}_\alpha^h(t), B^*(\xi^h(t) - z_\alpha^h(t)))_U. \quad (3.7)$$

Способ нахождения управления (3.2) равносилен тому, что $\widetilde{v}_\alpha^h(t)$ вычисляется по формуле

$$\widetilde{v}_\alpha^h(t) = \arg\min\{\alpha|\widetilde{v}|_U^2 - 2(B^*(\xi^h(t) - z_\alpha^h(t)), \widetilde{v})_U : \widetilde{v} \in U\}.$$

С учетом последнего выражения неравенство (3.7) можно переписать в форме

$$\varepsilon_h(t) \leq \varepsilon_h(0) + 2c_1 \int_0^t |\mu_\alpha^h(\tau)|_H \int_0^\tau |\mu_\alpha^h(s)|_H\, ds d\tau + 2(c_2h^2 - k(0)) \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H^2\, ds +$$
$$+ 2bh \int_0^t (|\widetilde{v}_\alpha^h(s)|_U + |\widetilde{u}(s)|_U)\, ds, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_h(t) = |\mu_\alpha^h(t)|_H^2 + 2\omega\int\limits_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_V^2\, ds + \alpha\int\limits_0^t (|\widetilde{v}_\alpha^h(s)|_U^2 - |\widetilde{u}(s)|_U^2)\, ds$. Для повторного интеграла в формуле (3.8) справедлива оценка

$$2\int_0^t |\mu_\alpha^h(\tau)|_H \int_0^\tau |\mu_\alpha^h(s)|_H\, ds d\tau \leq \int_0^t \int_0^t (|\mu_\alpha^h(\tau)|_H^2 + |\mu_\alpha^h(s)|_H^2)\, ds\, d\tau \leq 2\vartheta \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H^2\, ds. \quad (3.9)$$

Ввиду включения $\widetilde{u}(\cdot) \in L^2(T; U)$ существует постоянная $c_u > 0$ такая, что

$$2bh \int_0^\vartheta |\widetilde{u}(s)|_U\, ds \leq c_u h.$$

Используя последнюю формулу, оценку (3.9) и применяя неравенство Коши ([9], с. 2), преобразуем (3.8) к виду

$$\varepsilon_h(t) \leq \varepsilon_h(0) + 2(c_1\vartheta - k(0) + c_2h^2) \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H^2\, ds + c_u h + bh^\beta + h^{2-\beta} \int_0^t |\widetilde{v}_\alpha^h(s)|_U^2\, ds.$$

Отсюда в силу (3.3) и неравенства $\varepsilon_h(0) \leq h^2$ получаем

$$\varepsilon_h(t) \leq h^2 + c_u h + bh^\beta + 2\alpha^{-2}\vartheta b^2 h^{4-\beta} + 2(c_1\vartheta - k(0) + c_2h^2 + \alpha^{-2}b^2h^{2-\beta}) \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H^2\, ds. \quad (3.10)$$

Последнее соотношение и включение $\widetilde{v}_\alpha^h(\cdot) \in L^2(T; U)$ приводят к оценке

$$|\mu_\alpha^h(t)|_H^2 \leq c_u h + bh^\beta + c_v\alpha + 2\alpha^{-2}\vartheta b^2 h^{4-\beta} + 2(c_1\vartheta - k(0) + c_2h^2 + \alpha^{-2}b^2h^{2-\beta}) \int_0^t |\mu_\alpha^h(s)|_H^2\, ds.$$

Используя лемму 2.2 ([10], с. 151), имеем

$$|\mu_\alpha^h(t)|_H^2 \leq (c_u h + bh^\beta + c_v\alpha + 2\alpha^{-2}\vartheta b^2 h^{4-\beta}) c_e \exp(2t(c_2h^2 + \alpha^{-2}b^2h^{2-\beta})).$$

Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы неравенства

$$\alpha^{-2}h^{2-\beta} \leq \text{const}, \quad |\mu_\alpha^h(t)|_H^2 \leq c_3 h^\beta + c_4\alpha.$$

Преобразуя (3.10) с учетом последних формул, получаем оценку

$$\varepsilon_h(t) \le c_5 h^\beta + c_6 \alpha^{-2} h^{4-\beta} + (c_7 + c_6 \alpha^{-2} h^{2-\beta})(c_3 h^\beta + c_4 \alpha),$$

откуда следует справедливость теоремы. □

4. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения координат

Приведем алгоритм решения задачи в случае дискретного измерения фазовых координат. Пусть $l(\cdot) : W(T;H) \cap L^2(T;V) \to \mathbb{R}^+$ определяется формулой

$$l(y(\cdot)) = |y(\cdot)|_{C(T;H)} + |\dot{y}(\cdot)|_{L^2(T;H)} + |y(\cdot)|_{L^2(T;V)},$$

где $W(T;H) = \{x(\cdot) \in L^2(T;H), \dot{x}(\cdot) \in L^2(T;H)\}$. Доказательство следующей леммы может быть проведено стандартным образом (например, [11]; [12], с. 204).

Лемма 2. *Пусть $D \subset V$ — ограниченное множество. Тогда можно указать число $K = K(\omega, D, |B|_{\mathcal{L}(H;U)})$ такое, что равномерно по всем $x_0 \in D$, $u(\cdot) \in L^2(T;U)$ выполняется неравенство*

$$l(x(\cdot; x_0, u(\cdot))) \le K(1 + |u(\cdot)|_{L^2(T;U)}).$$

Пусть взято семейство разбиений (1.4) отрезка T. До начала работы алгоритма фиксируем величину h и соответствующее ей разбиение Δ_h. Работа алгоритма заключается в $m-1$ однотипных шагах. На промежутке времени $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$ осуществляется i-й шаг, при котором выполняются следующие операции. В момент времени τ_i^h вычисляется элемент

$$\widetilde{v}_i^h = \widetilde{v}(\tau_i^h, \xi_i^h, z(\tau_i^h)) = \alpha^{-1} B^* (\xi_i^h - z^h(\tau_i^h)), \tag{4.1}$$

и определяется функция

$$\widetilde{v}^h(t) = \widetilde{v}_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h). \tag{4.2}$$

Далее на вход уравнения (1.2) подается управление $v^h(t)$, определяемое формулой (2.3) при $t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$. Под действием этого управления система переходит из реализованного состояния $z^h(\tau_i^h) = z(\tau_i^h; \tau_{i-1}^h, z^h(\tau_{i-1}^h), \widetilde{v}_{i-1}^h)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1}^h) = z(\tau_{i+1}^h; \tau_i^h, z^h(\tau_i^h), \widetilde{v}_i^h)$. Работа алгоритма заканчивается в момент времени ϑ.

Теорема 2. *Пусть семейство разбиений Δ_h отрезка T и функция $\alpha(h)$ таковы, что*

$$h\delta^{-1}(h) \le C_1, \quad \alpha^{-2}(h)\delta(h) \le C_2, \quad \alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0, \quad \text{при} \quad h \to +0, \tag{4.3}$$

где C_1, $C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от h. Тогда равномерно по всем $h \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$\lambda^h(t) = |x(t) - z^h(t)|_H^2 + 2\omega \int_0^t |x(s) - z^h(s)|_V^2 \, ds \le d(h + \alpha(h) + \delta(h)), \quad t \in T. \tag{4.4}$$

Здесь $d = \mathrm{const} > 0$ не зависит от h, $\alpha(h)$ и $\delta(h)$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\mu^h(t) = z^h(t) - x(t), \quad \nu(t) = \widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h(t),$$

и для краткости будем писать $v_i = \widetilde{v}_i^h$, $\xi_i = \xi_i^h$, $x_i = x(\tau_i^h)$, $z_i^h = z^h(\tau_i^h)$, $\mu_i = z_i^h - x_i$, $\tau_i = \tau_i^h$.

Пусть $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. В дискретном случае равенство (3.5) остается справедливым, если в нем заменить z^h_α на z^h и $\widetilde{v}^h_\alpha$ на $\widetilde{v}^h$, тогда, используя условие сильной монотонности $(A2)$ оператора A, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + \omega|\mu^h(t)|^2_V + k(0)|\mu^h(t)|^2_H \leq (B\nu(t), \mu^h(t))_H + (k(t)(x_0 - z_0), \mu^h(t))_H + \\ + \left(\int_0^t \dot{k}(t-s)\mu^h(s)\,ds, \mu^h(t)\right)_H.$$

Для скалярных произведений из последней формулы нетрудно получить следующие оценки:

$$(B\nu(t), x(t) - z^h(t))_H = (B\nu(t), x(t) - \xi_i + \xi_i + x_i - x_i + z^h_i - z^h_i - z^h(t))_H = \\ = (B\nu(t), x(t) - \xi^h_i)_H + (B\nu(t), \xi_i - z^h_i)_H + (B\nu(t), x(t) - x_i)_H + \\ + (B\nu(t), z^h_i - z^h(t))_H \leq (B\nu(t), \xi_i - z^h_i)_H + \rho_i(t,h), \quad (4.5)$$

где $\rho_i(t,h) = b(|\widetilde{u}(t)|_U + |\widetilde{v}^h_\alpha|_U)\Big(h + \int\limits_{\tau_i}^{t}(|\dot{z}^h(s)|_H + |\dot{x}(s)|_H)\,ds\Big)$, а также

$$\left(\int_0^t \dot{k}(t-s)\mu^h(s)\,ds, \mu^h(t)\right)_H \leq c_1|\mu^h(t)|_H \int_0^t |\mu^h(s)|_H\,ds. \quad (4.6)$$

Без ограничения общности полагаем $k(0) = -f(0) < 0$. В случае, когда $k(0) \geq 0$, выкладки упрощаются. С учетом оценок (4.5) и (4.6) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + \omega|\mu^h(t)|^2_V \leq (B(\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}^h(t)), \xi_i - z^h_i)_H + (k(t)(x_0 - z_0), \mu^h(t))_H - k(0)|\mu^h(t)|^2_H + \\ + c_1|\mu^h(t)|_H \int_0^t |\mu^h(s)|_H\,ds + \rho_i(t,h).$$

Последнее неравенство преобразуем к следующему виду:

$$\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + 2\omega|\mu^h(t)|^2_V + \alpha(|\widetilde{v}^h(t)|^2_U - |\widetilde{u}(t)|^2_U) \leq \alpha|\widetilde{v}^h(t)|^2_U - 2(B\widetilde{v}^h(t), \xi_i - z^h_i)_H - \alpha|\widetilde{u}(t)|^2_U + \\ + 2(B\widetilde{u}(t), \xi_i - z^h_i)_H + 2c_1|\mu^h_\alpha(t)|_H \int_0^t |\mu^h(s)|_H\,ds + 2(c_2h^2 - k(0))|\mu^h(t)|^2_H + 2\rho_i(t,h).$$

Из правила нахождения управления $\widetilde{v}^h(\cdot)$ (4.1) и (4.2) следует равенство

$$\widetilde{v}^h(t) = \arg\min\{\alpha|\widetilde{v}|^2_U - 2(B^*(\xi_i - z^h_i), \widetilde{v})_U, \widetilde{v} \in U\}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

которое приводит к оценке

$$\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + 2\omega|\mu^h(t)|^2_V + \alpha(|\widetilde{v}^h(t)|^2_U - |\widetilde{u}(t)|^2_U) \leq \\ \leq 2c_1|\mu^h(t)|_H \int_0^t |\mu^h(s)|_H\,ds + 2(c_2h^2 - k(0))|\mu^h(t)|^2_H + 2\rho_i(t,h). \quad (4.7)$$

Введем обозначение $\varepsilon_h(t) = |\mu^h(t)|_H^2 + 2\omega \int\limits_0^t |\mu^h(s)|_V^2\, ds + \alpha \int\limits_0^t (|\widetilde{v}^h(s)|_U^2 - |\widetilde{u}(s)|_U^2)\, ds$, тогда неравенство (4.7) можно переписать в виде

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(\tau_i) + 2c_1 \int_{\tau_i}^t |\mu^h(s)|_H \int_0^s |\mu^h(\zeta)|_H\, d\zeta ds + 2(c_2h^2 - k(0)) \int_{\tau_i}^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds + \\ + 2\int_{\tau_i}^t \rho_i(s,h)\, ds, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (4.8)$$

Учитывая обозначение $\rho_i(t,h)$, имеем

$$2\int_{\tau_i}^t \rho_i(s,h)\, ds = 2b \int_{\tau_i}^t h(|\widetilde{u}(s)|_U + |\widetilde{v}^h(s)|_U)\, ds + I_2(t,\tau_i), \quad (4.9)$$

где $I_2(t,\tau_i) = 2b \int\limits_{\tau_i}^t (|\widetilde{u}(s)|_U + |\widetilde{v}^h(s)|_U) \int\limits_{\tau_i}^s (|\dot{z}^h(\zeta)|_H + |\dot{x}(\zeta)|_H)\, d\zeta ds$. Оценим первое слагаемое, стоящее в правой части (4.9). Применяя неравенство Шварца–Буняковского, а также $2ab \le a^2 + b^2$, получаем

$$2b\int_{\tau_i}^t h(|\widetilde{u}(s)|_U + |\widetilde{v}^h(s)|_U)\, ds \le 2b\bigg(\int_{\tau_i}^t h^2\, ds\bigg)^{1/2}\bigg(\bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{u}(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2} + \bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2}\bigg) \le \\ \le 2bh\delta^{1/2}\bigg(\bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{u}(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2} + \bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2}\bigg) \le b\bigg(h^2 + \delta\int_{\tau_i}^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds\bigg).$$

Используя неравенство Шварца–Буняковского, находим

$$I_2(t,\tau_i) \le 2b\int_{\tau_i}^t (|\widetilde{u}(s)|_U + |\widetilde{v}^h(s)|_U)\, ds \int_{\tau_i}^t (|\dot{z}^h(s)|_H + |\dot{x}(s)|_H)\, ds \le \\ \le 2b\delta\bigg(\bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{u}(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2} + \bigg(\int_{\tau_i}^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds\bigg)^{1/2}\bigg)\bigg(\bigg(\int_{\tau_i}^t |\dot{z}^h(s)|_H^2\, ds\bigg)^{1/2} + \bigg(\int_{\tau_i}^t |\dot{x}(s)|_H^2\, ds\bigg)^{1/2}\bigg) \le \\ \le b\delta\int_{\tau_i}^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds + b\delta\int_{\tau_i}^t (|\dot{x}(s)|_H^2 + |\dot{z}^h(s)|_H^2)\, ds.$$

В результате имеем оценку

$$2\int_{\tau_i}^t \rho_i(s,h)\, ds \le bh^2 + 2b\delta\int_{\tau_i}^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds + b\delta\int_{\tau_i}^t (|\dot{x}(s)|_H^2 + |\dot{z}^h(s)|_H^2)\, ds.$$

Просуммируем левые и правые части соотношения (4.8) по i и, принимая во внимание неравенства $2ab \le a^2 + b^2$ и $\varepsilon_h(0) \le h^2$, получаем

$$\varepsilon_h(t) \le h^2 + 2c_1 t\int_0^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds + 2(c_2h^2 - k(0))\int_0^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds + bh^2\delta^{-1}\vartheta + \\ + b\delta\int_0^t (|\dot{x}(s)|_H^2 + |\dot{z}^h(s)|_H^2)\, ds + 2b\delta\int_0^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds.$$

Далее, воспользовавшись леммой 2 при $t \in T$, находим

$$\varepsilon_h(t) \le c_3 h^2 \delta^{-1} + 2(c_1\vartheta + c_2 h^2 - k(0)) \int_0^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds + 2b\delta \int_0^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds +$$
$$+ b\delta K^2 \Bigg(\Bigg(1 + \Bigg(\int_0^t |\widetilde{u}(s)|_U^2\, ds\Bigg)^{1/2}\Bigg)^2 + \Bigg(1 + \Bigg(\int_0^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds\Bigg)^{1/2}\Bigg)^2\Bigg).$$

С учетом неравенства $2ab \le a^2 + b^2$ полученное выражение преобразуется к виду

$$\varepsilon_h(t) \le c_3 h^2 \delta^{-1} + c_4 \int_0^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds + c_5\delta + c_6\delta \int_0^t (|\widetilde{u}(s)|_U^2 + |\widetilde{v}^h(s)|_U^2)\, ds, \tag{4.10}$$

где $c_4 = 2(c_1\vartheta + c_2 h^2 - k(0)) > 0$.

Ввиду (4.1) и (4.2) для управления $\widetilde{v}^h(\cdot)$ справедлива оценка

$$\int_0^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds = \sum_{j=0}^{i(t)-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds + \int_{\tau_j}^t |\widetilde{v}^h(s)|_U^2\, ds \le \gamma_\delta^h(t).$$

где $i(t)$ — целая часть числа t/δ, $\gamma_\delta^h(t) = \delta \sum\limits_{j=0}^{i(t)} |v_j|_U^2$. Воспользуемся включением $u(\cdot) \in L^2(T;U)$. Тогда неравенство (4.10) примет вид

$$\varepsilon_h(t) \le c_3 h^2 \delta^{-1} + c_7\delta + c_8\delta\gamma_\delta^h(t) + c_4 \int_0^t |\mu^h(s)|_H^2\, ds.$$

Используя обозначение $\lambda^h(t)$ в (4.4), из последней формулы получаем

$$\varepsilon_h(t) = \lambda^h(t) + \alpha \int_0^t (|\widetilde{v}^h(s)|_U^2 - |\widetilde{u}(s)|_U^2)\, ds \le c_3 h^2\delta^{-1} + c_7\delta + c_8\delta\gamma_\delta^h(t) + c_4 \int_0^t \lambda^h(s)\, ds.$$

Перенесем интеграл от разности квадратов норм управлений в правую часть, тогда

$$\lambda^h(t) \le c_9(h^2\delta^{-1} + \alpha + \delta + \delta\gamma_\delta^h(t)) + c_4 \int_0^t \lambda^h(s)\, ds.$$

Применив лемму 2.2 ([10], с. 151) к полученному неравенству, находим

$$\lambda^h(t) \le c_9(h^2\delta^{-1} + \alpha + \delta + \delta\gamma_\delta^h(t)) + c_4 \int_0^t c_9(h^2\delta^{-1} + \alpha + \delta + \delta\gamma_\delta^h(s)) \exp(c_4(t-s))\, ds.$$

Поскольку функция $t \to \gamma_\delta^h(t)$ является неубывающей, последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\lambda^h(t) \le c_{10}(h^2\delta^{-1} + \alpha + \delta + \delta\gamma_\delta^h(t)). \tag{4.11}$$

Из условия (1.5) и определения $\widetilde{v}_i^h$ (4.1) следует оценка

$$|v_i|_U^2 = \alpha^{-2}|B^*(\xi_i - z_i^h)|_U^2 = \alpha^{-2}|B^*(\xi_i + x_i - x_i - z_i^h)|_U^2 \le b^2(h^2 + s_i^h)\alpha^{-2},$$

где $s_i^h = |x_i - z_i^h|_H^2$ и $b = \|B^*\|_{\mathcal{L}(H;U)}$. Используя неравенство $s_i^h \le \lambda_i^h = \lambda^h(\tau_i)$, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ получаем

$$\gamma_\delta^h(t) \le b^2\alpha^{-2}\delta \sum_{j=0}^{i(t)} (h^2 + \lambda_j^h),$$

откуда выводим соотношение

$$\gamma_\delta^h(\tau_i) \le b^2\alpha^{-2}\delta\sum_{j=0}^{i}(h^2+\lambda_j^h). \tag{4.12}$$

В результате из (4.11) имеем

$$\lambda_i^h \le c_{10}(h^2\delta^{-1}+\alpha+\delta)+b^2h^2\vartheta\alpha^{-2}\delta+b^2\alpha^{-2}\delta^2\sum_{j=0}^{i}\lambda_j^h. \tag{4.13}$$

Применяя дискретное неравенство Гроноулла ([13], с. 311) для (4.13), находим

$$\lambda_i^h \le (c_{10}(h^2\delta^{-1}+\alpha+\delta)+b^2h^2\alpha^{-2}\delta\vartheta)\exp(b^2\alpha^{-2}\delta\vartheta).$$

Учитывая условия согласования h, $\alpha(h)$ и $\delta(h)$ в (4.3), полученное выражение представим в виде

$$\lambda_i^h \le c_{11}(h+\alpha+\delta), \quad i=\overline{0,m}.$$

Последнее соотношение в совокупности с (4.12) приводит к формуле

$$\gamma_\delta^h(\tau_i) \le c_{12}(h+\alpha+\delta), \quad i=\overline{0,m}.$$

Тогда из (4.11) следует оценка

$$\lambda^h(t) \le c_{13}(h^2\delta^{-1}+\alpha+\delta+\delta\gamma_\delta^h(\vartheta)) \le c_{14}(h+\alpha+\delta). \qquad \square$$

Литература

[1] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).

[2] Васильева Е.В., Максимов В.И. *О динамической реконструкции управлений в дифференциальном уравнении с памятью*, Дифференц. уравнения **35** (6), 813–821 (1999).

[3] Grimmer R.C. and Pritchard A.J. *Analytic resolvent operators for integral equations in Banach space*, J. Differ. Equat. **50**(2), 234–259 (1983).

[4] Oka H. *Abstract quasilinear Volterra integrodifferential equations*, Nonlinear Anal., № 28, 1019–1045 (1997).

[5] Coleman B.D. and Gurtin M.E. *Equipresence and constitutive equations for rigid head conductors*, Z. Angew. Math. Phys., № 18, 199–208 (1967).

[6] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры* (Наука, М., 1974).

[7] Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О моделировании управления в динамической системе*, Изв. АН СССР. Технич. кибернетика, № 2, 51–68 (1975).

[8] Максимов В.И. *Об отслеживании решения параболического уравнения*, Изв. вузов. Матем., № 1, 40–48 (2011).

[9] Vrabie I.I. *Compactness methods for nonlinear evolutions* (Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987).

[10] Барбашин Е. А. *Введение в теорию устойчивости* (Наука, М., 1967).

[11] Barbu V. *Optimal control of variational inequalities* (Pitman Advanced Publishing Program, London, 1984).

[12] Максимов В. И. *Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем* (Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2000).

[13] Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем* (Наука, М., 1971).

П.Г. Сурков

Уральский федеральный университет имени Б.Н. Ельцина,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

`e-mail:` platon.surkov@gmail.com

P.G. Surkov

Tracking of solution to parabolic equation with memory for general class of controls

Abstract. We consider a control problem for parabolic equation with memory. It consists in constructing an algorithm for finding a feedback control such that a solution to a given equation should track a solution to another equation generated by an unknown right-hand side. We propose two noise-resistant solution algorithms for this problem which are based on the method of extremal shift. The first algorithm is applicable in the case of continuous measurements of phase states, whereas the second one presumes discrete measurements.

Keywords: systems with distributed parameters, retarded systems, control.

P.G. Surkov

Ural Federal University named after B.N. Yel'tsin,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

`e-mail:` platon.surkov@gmail.com