

УДК 539.3

## ДВУМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

*А.В. Земсков, Д.В. Тарлаковский*

### Аннотация

Рассмотрена двумерная нестационарная задача для изотропной упругой полуплоскости с учётом диффузии. Использована локально равновесная модель упругой диффузии, включающая в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса. Решение найдено в интегральной форме с помощью преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате. Обращение преобразования Лапласа искомым функций сведено к вычислению оригиналов рациональных функций. Для обращения преобразования Фурье использованы квадратурные формулы.

**Ключевые слова:** механодиффузия, упругая диффузия, нестационарные задачи, полуплоскость, преобразование Лапласа.

### Введение

В работе рассматривается двумерная нестационарная задача для упругой полуплоскости с учётом диффузии. Среда – твердый однокомпонентный раствор, в котором при определённых условиях возникает явление самодиффузии, то есть случайное перемещение частиц среды без изменения её химического состава. Для математического описания указанных выше процессов используется локально равновесная модель упругой диффузии, включающая в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса.

Решение задачи ищется в интегральной форме, которая представляет собой свёртку функций Грина с правыми частями граничных условий. Используются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам. При этом основную сложность здесь представляет вопрос, связанный с обращением трансформант Лапласа. Эта проблема является общей для целого класса нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела. Сложность решения возрастает по мере увеличения размерности задач, а также за счёт учёта связанности полей различной физической природы. В ряде случаев возможно построение решений вышеназванных задач с помощью синус- и косинус-преобразований Фурье. В этом случае, как показано в работах [1–3], трансформанты Лапласа являются дробно-рациональными функциями, что существенно упрощает вопрос, связанный с их обращением.

Ниже приводится решение одной из задач данного класса.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается однородная упругая изотропная полуплоскость, ограниченная прямой  $x_2 = 0$ , где  $Ox_1x_2x_3$  – прямоугольная декартова система координат.

Полагается, что физико-механические процессы в нем без учёта температурных эффектов не зависят от координаты  $x_3$  и описываются следующим уравнением [1–4]:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \alpha \operatorname{grad} \eta, \quad D \Delta \eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Lambda \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}),$$

где  $t$  – время;  $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0\}$  – вектор перемещений;  $\eta = n - n_0$  – приращение объёмной концентрации веществ  $n$  относительно начальной концентрации  $n_0$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ламе;  $\rho$  – плотность среды;  $\alpha$  – коэффициент объёмного расширения, связанного с массопереносом;  $D$  – коэффициент диффузии;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – температура среды;  $\Lambda = n_0 D \alpha / (RT_0)$ .

На границах полуплоскости задано касательное напряжение  $\sigma_{12}$  и перемещение  $u_2$ , а также диффузионный поток  $J_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{12}|_{x_2=0} = f_1(x_1, t), \quad u_2|_{x_2=0} = f_2(x_1, t), \quad J_2|_{x_2=0} = f_3(x_1, t), \\ \sigma_{12} = O(1), \quad u_2 = O(1), \quad J_2 = O(1) \quad (x_2 \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \alpha \delta_{ij} \eta, \quad J_i = \Lambda \delta_{il} \delta_{jk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} - D \delta_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

В начальный момент времени полуплоскость находится в невозмущённом состоянии.

Далее везде будут использоваться следующие безразмерные параметры (при одинаковом написании они обозначены штрихом, который в дальнейшем изложении опущен):

$$\begin{aligned} x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \eta' = \frac{\eta}{n_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\rho C^2}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\rho C^2}, \\ \alpha' = \frac{n_0 \alpha}{\rho C^2}, \quad D' = \frac{D}{CL}, \quad \Lambda' = \frac{\Lambda}{CLn_0}, \quad f'_1 = \frac{f_1}{\mu}, \quad f'_2 = \frac{f_2}{L}, \quad f'_3 = \frac{f_3}{CDn_0}, \end{aligned}$$

Соответствующий безразмерный аналог указанной выше начально-краевой задачи записывается в виде (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 = \Delta_{1\mu}(u_1) + L_{12}(u_2) - L_{13}(\eta), \quad \ddot{u}_2 = L_{12}(u_1) + \Delta_{\mu 1}(u_2) - L_{23}(\eta), \\ \dot{\eta} = -L_{31}(u_1) - L_{32}(u_2) + \Delta_{DD}(\eta); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_1(u_1, u_2)|_{x_2=0} = f_1(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=0} = f_2(x_1, \tau), \\ M_2(u_1, u_2, \eta)|_{x_2=0} = f_3(x_1, \tau), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_1(u_1, u_2) = O(1), \quad u_2 = O(1), \quad M_2(u_1, u_2, \eta) = O(1) \quad (x_2 \rightarrow \infty); \\ u_i|_{\tau=0} = \dot{u}_i|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad L_{12} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{i3} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{3i} = \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \\ M_1(u_1, u_2) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad M_2(u_1, u_2, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_2} [\gamma M_1(u_1, u_2) - \eta], \quad \gamma = \frac{\Lambda}{D}. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Метод решения

Пусть  $G_{im} = u_i$  и  $G_{3m} = \eta$  ( $m = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2$ ) – функции Грина задачи (1)–(3), а именно решения задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$M_1(G_{1m}, G_{2m})|_{x_2=0} = \delta_{m1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{2m}|_{x_2=0} = \delta_{m2} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$M_2(G_{1m}, G_{2m}, G_{3m})|_{x_2=0} = \delta_{m3} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$M_1(G_{1m}, G_{2m}) = O(1), \quad G_{2m} = O(1), \quad M_2(G_{1m}, G_{2m}, G_{3m}) = O(1) \quad (x_2 \rightarrow \infty),$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид (звездочки обозначают свертки по времени  $\tau$  и координате  $x_1$ ):

$$u_i = \sum_{m=1}^3 G_{im} * * f_m, \quad \eta = \sum_{m=1}^3 G_{3m} * * f_m. \quad (5)$$

Применим теперь к задаче (1)–(3) преобразование Лапласа по времени и Фурье по переменной  $x_1$  ( $s$  – параметр преобразования Лапласа, индекс “ $L$ ” обозначает его трансформанту;  $\omega$  – параметр преобразования Фурье, индекс “ $F$ ” обозначает его трансформанту):

$$\begin{aligned} l_{11}(u_1^{FL}) - i\omega(\lambda + \mu)l_{12}(u_2^{FL}) + i\omega\alpha\eta^{FL} &= 0, \\ -i\omega(\lambda + \mu)l_{12}(u_1^{FL}) + l_{22}(u_2^{FL}) + \alpha l_{12}(\eta^{FL}) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$i\omega l_{31}(u_1^{FL}) + l_{12}[l_{31}(u_2^{FL})] + l_{33}(\eta^{FL}) = 0;$$

$$m_1(u_1^{FL}, u_2^{FL})|_{x_2=0} = f_1^{FL}(\omega, s), \quad u_2^{FL}|_{x_2=0} = f_2^{FL}(\omega, s), \quad (7)$$

$$m_2(u_1^{FL}, u_2^{FL}, \eta^{FL})|_{x_2=0} = f_3^{FL}(\omega, s);$$

$$m_1(u_1^{FL}, u_2^{FL}) = O(1), \quad u_2^{FL} = O(1), \quad m_2(u_1^{FL}, u_2^{FL}, \eta^{FL}) = O(1) \quad (x_2 \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Здесь (штрих здесь и далее означает производную по переменной  $x_2$ )

$$l_{11}(u) = \kappa_1(\omega, s)u - \mu u'', \quad l_{22}(u) = \kappa_2(\omega, s)u - u'', \quad l_{12}(u) = u',$$

$$l_{31}(u) = \Lambda(u'' - \omega^2 u), \quad l_{33}(u) = \kappa_3(\omega, s)u - Du'',$$

$$\kappa_1(\omega, s) = \omega^2 + s^2, \quad \kappa_2(\omega, s) = \mu\omega^2 + s^2, \quad \kappa_3(\omega, s) = D\omega^2 + s,$$

$$m_1(u_1, u_2) = u_1' + i\omega u_2, \quad m_2(u_1, u_2, \eta) = \gamma(u_2' + i\omega u_1) - \eta'.$$

Решения  $u_i^{FL}$  и  $\eta^{FL}$  задачи (6)–(8) представляем в следующем виде:

$$u_i^{FL} = U_i + \varphi_i, \quad \eta^{FL} = H + \psi. \quad (9)$$

где функции  $\varphi_i$  и  $\psi$  выбираются таким образом, чтобы правые части граничных условий (7) были нулевыми и при этом выполнялись соотношения (8). Для этого во втором условии (7) полагаем

$$\varphi_2(\omega, x_2, s) = e^{-x_2} f_2^{FL}. \quad (10)$$

Тогда для функции  $\varphi_1$  и  $\psi$  из первого и третьего равенств в (7), (8) с учётом (10) получаем следующие соотношения:

$$(\varphi_1' + i\omega f_2^{FL} e^{-x_2})|_{x_2=0} = f_1^{FL}, \quad (i\omega\gamma\varphi_1' + \gamma f_2^{FL} e^{-x_2} - \psi')|_{x_2=0} = f_3^{FL}.$$

Удовлетворяя соотношениям (8), переписываем эти равенства следующим образом:

$$\varphi_1' + i\omega f_2^{FL} e^{-x_2} = f_1^{FL} e^{-x_2}, \quad i\omega\gamma\varphi_1' + \gamma f_2^{FL} e^{-x_2} - \psi' = f_3^{FL} e^{-x_2}.$$

Интегрируя их последовательно, получаем выражения для  $\varphi_1$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega, x_2, s) &= - (f_1^{FL} - i\omega f_2^{FL}) e^{-x_2}, \\ \psi(\omega, x_2, s) &= - [i\omega\gamma f_1^{FL} + \gamma(\omega^2 + 1) f_2^{FL} - f_3^{FL}] e^{-x_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно, уравнения (6) с учётом (9)–(11) принимают вид

$$\begin{aligned} l_{11}(U_1) - i\omega(\lambda + \mu)U_2' + i\omega\alpha H &= F_1, \\ -i\omega(\lambda + \mu)U_1' + l_{22}(U_2) + \alpha H' &= F_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$i\omega l_{31}(U_1) + l_{31}(U_2) + l_{33}(H) = F_3;$$

$$\begin{aligned} m_1(U_1, U_2)|_{x_2=0} = 0, \quad U_2|_{x_2=0} = 0, \quad m_2(U_1, U_2, H)|_{x_2=0} = 0, \\ m_1(U_1, U_2) = O(1), \quad U_2 = O(1), \quad m_2(U_1, U_2, H) = O(1) \quad (x_2 \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\kappa_1 - \alpha\gamma\omega^2 - \mu) f_1^{FL} + i\omega[\alpha\gamma(\omega^2 + 1) - \lambda - \kappa_1] f_2^{FL} - i\alpha\omega f_3^{FL}\} e^{-x_2}, \\ F_2 &= \{i\omega(\lambda + \mu - \alpha\gamma) f_1^{FL} + [1 + \lambda\omega^2 - s^2 - \alpha\gamma(\omega^2 + 1)] f_2^{FL} + \alpha f_3^{FL}\} e^{-x_2}, \\ F_3 &= \{i\omega\gamma s f_1^{FL} + [s\gamma(\omega^2 + 1) - \Lambda\omega^2(\omega^2 - 1)] f_2^{FL} + (D - \kappa_3) f_3^{FL}\} e^{-x_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для решения полученной системы уравнений используем синус- и косинус-преобразования Фурье (их изображениям соответствуют верхние индексы “C” и “S”):

$$\begin{aligned} U_1(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty U_1^C(\omega, p, s) \cos px_2 dp, \\ U_2(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty U_2^S(\omega, p, s) \sin px_2 dp, \\ H(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty H^C(\omega, p, s) \cos px_2 dp. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичным образом записываем и правые части уравнений в (12):

$$\begin{aligned} F_1(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty F_1^C(\omega, p, s) \cos px_2 dp, \\ F_2(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty F_2^S(\omega, p, s) \sin px_2 dp, \\ F_3(\omega, x_2, s) &= \int_0^\infty F_3^C(\omega, p, s) \cos px_2 dp, \end{aligned}$$

где в соответствии с (13)

$$\begin{aligned}
 F_1^C(\omega, p, s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_1(\omega, x_2, s) \cos px_2 dx_2 = \frac{2}{\pi(p^2+1)} \times \\
 &\quad \times \{(\kappa_1 - \alpha\gamma\omega^2 - \mu) f_1^{FL} + i\omega [\alpha\gamma(\omega^2+1) - \lambda - \kappa_1] f_2^{FL} - i\alpha\omega f_3^{FL}\}, \\
 F_2^S(\omega, p, s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_2(\omega, x_2, s) \sin px_2 dx_2 = \frac{2p}{\pi(p^2+1)} \times \\
 &\quad \times \{i\omega(\lambda + \mu - \alpha\gamma) f_1^{FL} + [1 + \lambda\omega^2 - s^2 - \alpha\gamma(\omega^2+1)] f_2^{FL} + \alpha f_3^{FL}\}, \quad (15) \\
 F_3^C(\omega, p, s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_3(\omega, x_2, s) \cos px_2 dx_2 = \frac{2}{\pi(p^2+1)} \times \\
 &\quad \times \{i\omega\gamma s f_1^{FL} + [s\gamma(\omega^2+1) - \Lambda\omega^2(\omega^2-1)] f_2^{FL} + (D - \kappa_3) f_3^{FL}\}.
 \end{aligned}$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 k_1 U_1^C - ip\omega(\lambda + \mu) U_2^S + i\omega\alpha H^C &= F_1^C, \\
 ip\omega(\lambda + \mu) U_1^C + k_2 U_2^S - \alpha p H^C &= F_2^S, \\
 -\Lambda k_4 (i\omega U_1^C + p U_2^S) + k_3 H^C &= F_3^C,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_1(\omega, p, s) &= \kappa_1 + p^2\mu, \quad k_2(\omega, p, s) = \kappa_2 + p^2, \\
 k_3(\omega, p, s) &= \kappa_3 + Dp^2, \quad k_4(\omega, p) = \kappa_1(\omega, p).
 \end{aligned}$$

В силу формул (12) функции  $U_1^C$ ,  $U_2^S$ ,  $H^C$  как решения этой системы есть линейные комбинации функций  $f_m^{FL}$ . Следовательно, согласно (9)–(11) таковыми являются и функции  $u_i^{FL}$  и  $\eta^{FL}$ , и равенства (5) с учётом свойств преобразований Лапласа и Фурье приобретут вид

$$\begin{aligned}
 u_1^{FLC} &= \sum_{m=1}^3 G_{1m}^{FLC} f_m^{FL}, \quad u_2^{FLS} = \sum_{m=1}^3 G_{2m}^{FLS} f_m^{FL}, \quad \eta^{FLC} = \sum_{m=1}^3 G_{3m}^{FLC} f_m^{FL}, \\
 G_{lm}^{FLC}(\omega, p, s) &= \frac{P_{lm}(\omega, p, s)}{\pi P(\omega, p, s)}, \quad l = 1, 3, \quad G_{2m}^{FLS}(\omega, p, s) = \frac{P_{2m}(\omega, p, s)}{\pi P(\omega, p, s)},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 P(\omega, p, s) &= [s^2 + \mu(\omega^2 + p^2)] \Pi[k_4(\omega, p), s], \\
 \Pi(x, s) &= s^3 + Dxs^2 + xs + (D - \alpha\Lambda)x^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{11}(\omega, p, s) &= -2\mu(k_2 k_3 - \alpha p^2 k_4), \quad P_{13}(\omega, p, s) = -2iD\alpha\omega [p^2(\lambda + \mu) - k_2], \\
 P_{12}(\omega, p, s) &= -2i\omega [p^2(\lambda + \mu)(\alpha k_4 - k_3) - k_2(\alpha k_4 - \lambda k_3)], \\
 P_{21}(\omega, p, s) &= 2i\mu\omega p [k_3(\lambda + \mu) - \alpha k_4], \quad P_{23}(\omega, p, s) = 2\alpha Dp [k_1 - \omega^2(\lambda + \mu)], \\
 P_{22}(\omega, p, s) &= 2p [-2\mu\alpha\omega^2 k_4 + k_1(k_3 - \alpha k_4) - \omega^2(\lambda + \mu)(\alpha k_4 - \lambda k_3)],
 \end{aligned}$$

$$P_{31}(\omega, p, s) = 2i\mu\omega k_4 [p^2(\lambda + \mu) - k_2], \quad P_{33}(\omega, p, s) = -2D [p^2\omega^2(\lambda + \mu)^2 - k_1 k_2],$$

$$P_{32}(\omega, p, s) = -2k_4 [\omega^2(\lambda + \mu)^2 - k_2\lambda\omega^2 - k_1(p^2 - k_2)].$$

При этом для трансформант Фурье–Лапласа функций Грина в силу (14) справедливы равенства

$$G_{qm}^{FL}(\omega, x_2, s) = \int_0^\infty G_{qm}^{FLC}(\omega, p, s) \cos px_2 dp, \quad q = 1, 3,$$

$$G_{2m}^{FL}(\omega, x_2, s) = \int_0^\infty G_{2m}^{FLS}(\omega, p, s) \sin px_2 dp.$$
(16)

### 3. Оригиналы функций влияния

Оригиналы по Лапласу функций в (16) вычисляются по формулам

$$G_{qm}^F(\omega, x_2, \tau) = \int_0^\infty G_{qm}^{FC}(\omega, p, \tau) \cos px_2 dp, \quad q = 1, 3,$$

$$G_{2m}^F(\omega, x_2, \tau) = \int_0^\infty G_{2m}^{FS}(\omega, p, \tau) \sin px_2 dp.$$
(17)

Поскольку функции  $G_{qm}^{FLC}$  и  $G_{2m}^{FLS}$  являются правильными рациональными дробями аргумента  $s$ , переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов. Пользуясь тем, что в реальных материалах  $\alpha\Lambda \ll D < 1$ , с помощью критерия Рауса–Гурвица можно показать, что многочлен  $\Pi[k_4(\omega, p), s]$  имеют следующие нули:  $s_1 = \bar{s}_2 = \gamma + i\beta$ ,  $\gamma < 0$ ,  $s_3 < 0$ ,  $s_3 \in \mathfrak{R}$ , где  $i$  – мнимая единица. Для многочлена  $P(\omega, p, s)$  к ним добавляются чисто мнимые нули:  $s_4 = \bar{s}_5 = i\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2 = \mu k_4(\omega, p)$ . Следовательно, функции  $G_{qm}^{FC}$  и  $G_{2m}^{FS}$  имеют следующий вид (здесь штрих означает производную по параметру  $s$ ):

$$G_{qm}^{FC} = e^{\gamma\tau} (A_{qm}^1 \cos \beta\tau - A_{qm}^2 \sin \beta\tau) + A_{qm}^3 e^{s_3\tau} + A_{qm}^4 \cos \varepsilon\tau - A_{qm}^5 \sin \varepsilon\tau,$$

$$G_{2m}^{FS} = e^{\gamma\tau} (A_{2m}^1 \cos \beta\tau - A_{2m}^2 \sin \beta\tau) + A_{2m}^3 e^{s_3\tau} + A_{2m}^4 \cos \varepsilon\tau - A_{2m}^5 \sin \varepsilon\tau,$$
(18)

где

$$A_{lm}^1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \frac{P_{lm}(\omega, p, s_1)}{P(\omega, p, s_1)}, \quad A_{lm}^2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \frac{P_{lm}(\omega, p, s_1)}{P(\omega, p, s_1)}, \quad A_{lm}^3 = \frac{P_{lm}(\omega, p, s_3)}{\pi P(\omega, p, s_3)},$$

$$A_{lm}^4 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \frac{P_{lm}(\omega, p, s_4)}{P(\omega, p, s_4)}, \quad A_{lm}^5 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \frac{P_{lm}(\omega, p, s_4)}{P(\omega, p, s_4)}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Функции  $G_{32}^{FC}$  и  $G_{33}^{FC}$  в интегралах (17) имеют особенность при  $\tau \rightarrow 0$ . Это связано со следующей асимптотикой их изображений по Лапласу при  $s \rightarrow \infty$ :

$$G_{32}^{FLC}(\omega, p, s) \sim -\frac{2\Lambda}{\pi} k_4(\omega, p) s^{-1}, \quad G_{33}^{FLC}(\omega, p, s) \sim \frac{2D}{\pi} s^{-1}.$$

Поскольку оригиналом изображения  $s^{-1}$  является функция, равная 0 на отрицательной полуоси и 1 в остальных точках [5], в правой полукрестности точки  $\tau = 0$  функции  $G_{32}^{FC}$  и  $G_{33}^{FC}$  имеют разрыв первого рода. Для выделения этой особенности представляем функции  $G_{3m}^{FL}$  следующим образом ( $m = 2, 3$ ):

$$G_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) = S_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) + R_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s),$$

$$S_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) = \int_0^{\infty} S_{3m}^{FLC}(\omega, p, s) \cos px_2 dp,$$

$$R_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) = \int_0^{\infty} R_{3m}^{FLC}(\omega, p, s) \cos px_2 dp,$$

где

$$S_{32}^{FLC}(\omega, p, s) = -\frac{2\Lambda k_4(\omega, p)}{\pi k_3(\omega, p, s)}, \quad S_{33}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{2D}{\pi k_3(\omega, p, s)},$$

$$R_{32}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{T_{32}(\omega, p, s)}{\pi k_3(\omega, p, s) P(\omega, p, s)}, \quad R_{33}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{T_{33}(\omega, p, s)}{\pi k_3(\omega, p, s) P(\omega, p, s)},$$

$$T_{32}(\omega, p, s) = k_3(\omega, p, s) P_{32}(\omega, p, s) + 2\Lambda k_4(\omega, p) P(\omega, p, s),$$

$$T_{33}(\omega, p, s) = k_3(\omega, p, s) P_{33}(\omega, p, s) - 2DP(\omega, p, s),$$

Оригиналы преобразования Лапласа, а также синус- и косинус-преобразований для функций  $S_{3m}^{FLC}$  имеют вид [6]:

$$S_{32}^F(\omega, x_2, \tau) = -\Lambda \sqrt{\frac{1}{\pi\tau D}} \left( \omega^2 + \frac{2D\tau - x_2}{4D^2\tau^2} \right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{4D\tau}\right),$$

$$S_{33}^F(\omega, x_2, \tau) = \sqrt{\frac{D}{\pi\tau}} \exp\left\{-\left(D\omega^2\tau + \frac{x_2^2}{4D\tau}\right)\right\}.$$

Обращение преобразования Лапласа коэффициентов  $R_{3m}^{FLC}$  как рациональных функций проводится аналогично (18) с учётом того, что появляется дополнительный полюс  $s_6 = -Dk_4(\omega, p)$ . Для обращения изображений Фурье удобнее сначала найти свёртки (6) по времени с функциями (18). Далее оригиналы трансформант Фурье находятся по формулам (звёздочка обозначает свёртку по времени):

$$\Phi(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_1} d\omega \int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} G_{qm}^{FC} \\ G_{2m}^{FS} \end{matrix} \right\} * f_m^F \left\{ \begin{matrix} \cos px_2 \\ \sin px_2 \end{matrix} \right\} dp, \quad (19)$$

где  $\Phi$  – любая из искоемых функций  $u_i, \eta$ .

Интеграл (19) находится численно с помощью квадратурных формул. Для этого удобно воспользоваться следующим представлением. Внутренний интеграл запишем в виде

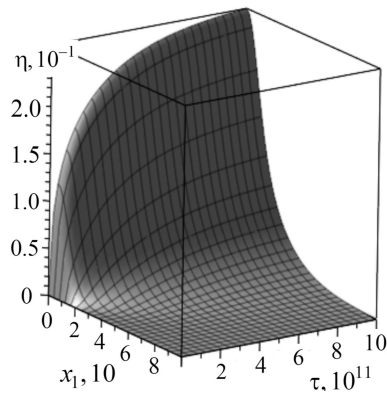
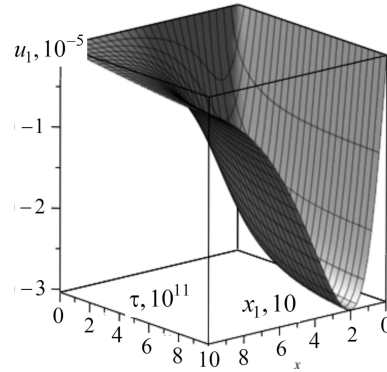
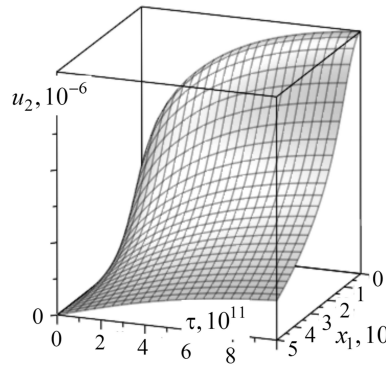
$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} G_{qm}^{FC} \\ G_{2m}^{FS} \end{matrix} \right\} * f_m^F \left\{ \begin{matrix} \cos px_2 \\ \sin px_2 \end{matrix} \right\} dp =$$

$$= \int_0^a \left\{ \begin{matrix} G_{qm}^{FC} \\ G_{2m}^{FS} \end{matrix} \right\} * f_m^F \left\{ \begin{matrix} \cos px_2 \\ \sin px_2 \end{matrix} \right\} dp + \int_a^{\infty} \left\{ \begin{matrix} G_{qm}^{FC} \\ G_{2m}^{FS} \end{matrix} \right\} * f_m^F \left\{ \begin{matrix} \cos px_2 \\ \sin px_2 \end{matrix} \right\} dp,$$

где  $a$  – некоторая промежуточная точка.

Далее, первый интеграл вычисляется с помощью формулы средних прямоугольников. Второй интеграл заменой  $p = a^2/(a - \nu)$  переводится в интеграл по конечному промежутку  $[0, a]$ , после чего также вычисляется с помощью тех же квадратурных формул. Аналогичным образом находится внешний интеграл в (19).

**Замечание.** Функции  $G_{11}^{FC}, G_{22}^{FS}, G_{33}^{FC}, G_{23}^{FS}, G_{32}^{FC}$  являются чётными относительно  $\omega$ . Остальные функции – нечётные относительно  $\omega$ . Тогда если функции  $f_m^F$  также обладают свойством чётности (нечётности), то преобразование (19) сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье, что снижает объём вычислений.

Рис. 1. Зависимость изменения концентрации от  $x_1$  и  $\tau$  при  $x_2 = 0.5$ Рис. 2. Зависимость  $u_1$  от  $x_1$  и  $\tau$  при  $x_2 = 0.5$ Рис. 3. Зависимость  $u_2$  от  $x_1$  и  $\tau$  при  $x_2 = 0.5$ 

#### 4. Примеры

Полагаем, что материал слоя – алюминий, имеющий следующие характеристики:

$$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 5.50 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 3.50 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$T_0 = 773 \text{ К} \quad D = 6.70 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad L = 1 \text{ м}.$$

Им соответствуют следующие безразмерные параметры:

$$\mu = 0.279, \quad \lambda = 0.442, \quad D = 1.06 \cdot 10^{-9}, \quad \alpha = \cdot 10^{-4}, \quad \Lambda = 1.78 \cdot 10^{-6}.$$

Предполагается, что правые части граничных условий имеют вид

$$f_1(x_1, \tau) = f_2(x_1, \tau) \equiv 0, \quad f_3(x_1, \tau) = 10^{-3} e^{-0.01x_1^2} H(\tau),$$

Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 1–3. На них показаны зависимости перемещений  $u_i$  и приращений концентрации вещества  $\eta$  от времени  $\tau$  и координаты  $x_1$ . Расчёты проводились для  $N_y = 100$  точек разбиения при обращении синус- и косинус-преобразований Фурье и для  $N_x = 50$  точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье. Отметим, что при уменьшении вдвое шага разбиения графики практически совпадают.



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161-а) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

### Summary

*A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii.* Two-Dimensional Unsteady-State Problem of Elasticity with Diffusion for Isotropic One-Component Half-Plane.

A two-dimensional unsteady-state problem for the isotropic elastic half-plane with diffusion effect is investigated in this paper. In order to solve the problem, the local-equilibrium model of mechanical diffusion is used. This model consists of a system of equations, which describe the law of motion and mass transfer. The solution is found with the help of sine and cosine transformation of the space variable. Additionally, the Laplace transformation of the time variable is applied. The inverse Laplace transformation is reduced to the calculation of the originals of rational functions. Quadrature formulas are used for the inverse sine and cosine transformation.

**Keywords:** mechanical diffusion, elastic diffusion, unsteady-state problems, half-plane, Laplace transformation.

### Литература

1. *Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 4, ч. 1. – С. 52–59.
2. *Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V.* Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer // J. Math. Sci. – 2014. – V. 203, No 2. – P. 221–238.
3. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экол. вестн. науч. центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 2 – С. 31–38.
4. *Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V.* Dynamic processes in thermo-electro-magneto-elastic and thermo-elasto-diffusive media // Encyclopedia of Thermal Stresses. V. 2. – Dordrecht; Heidelberg; N. Y.; London: Springer, 2014. – P. 1064–1071.
5. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
6. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 586 с.

Поступила в редакцию  
19.08.15

---

**Земсков Андрей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическое моделирование», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

**Тарлаковский Дмитрий Валентинович** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией НИИ механики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)