МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра высшей математики и математического моделирования

Направление: 050201.65 – математика и информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА О ПРОЧНЫХ ШТАБЕЛЯХ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Работа завершена:

Студент 05-904 группы

"___"_________ 2014 г. ______________________ (М.Р. Галеева)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
Кандидат физ.-мат. наук, доцент

"___"_________ 2014 г. ______________________ (М.И. Киндер)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат.наук, профессор

"___"_________ 2014 г. ______________________ (Ю.Г. Игнатьев)

Казань-2014

Оглавление

Введение

Работа посвящена обзору основных результатов теории производящих функций и приложению этой теории к решению задачи о прочных штабелях.

Цель дипломной работы: изучить свойства производящих функций и научиться применять их в задачах перечисления некоторых комбинаторных объектов, в частности, при подсчете количества прочных разбиений натуральных чисел.

Задачи:

1) Изучить свойства производящей функции. Привести примеры использования производящих функций в задачах генерации комбинаторных объектов.
2) Решить задачу о подсчете числа прочных разбиений с помощью производящих функций.

Глава 1. Производящие функции и действия над ними.

1.1. Определение производящих функций

Наиболее подходящим языком для решения перечислительных задач оказывается язык производящих рядов. Операции с комбинаторными объектами очень естественно выражаются в терминах производящих функций. Однако перечислительная комбинаторика не сводится к производящим функциям – привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа или теории групп) дает новый взгляд на перечислительные задачи и позволяет находить неожиданные подходы к их решению.

Определение 1. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией* (производящим рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + +a_2 s^2 + \cdots,$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \qquad (1).$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом.* Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Производящую функцию вида (1) , как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots \qquad (2)$$

Две производящие функции равны в том и только в том случае, если у них совпадают коэффициенты при каждой степени переменной. Поэтому мы часто будем проверять равенство производящих функций или решать уравнения на них, последовательно сравнивая коэффициенты при

s^0, s^1, s^2 и т.д.

Замечание 1. Производящая функция не является функцией в обычном понимании. Например, мы не можем сказать, чему равно значение A(1) производящей функции A в точке 1. Для этого нам пришлось бы сосчитать сумму бесконечного ряда $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$. Изучение производящих функций не требует суммирования бесконечных числовых рядов. Переменная s является *формальной*, и сумма ряда $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ смысла не имеет. Однако верны утверждения $A(0) = a_0$, $A'(0) = a_1$, $A''(0) = 2a_2$ и т.д.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином “производящая функция” мы будем также пользоваться термином “формальный степенной ряд”.

Определение 2. *Суммой* двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots.$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots.$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \cdots \quad (3)$$

Определение 3. *Произведением* производящих функций A и B называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \cdots \quad (4)$$

Операции сложения и умножения производящих функций коммутативны ($A + B = B + A$; $AB = BA$) и ассоциативны ($(A + B) + C = A + (B + C)$;$(AB)C = =A(BC)$); кроме того, выполняется дистрибутивный закон ($A(B + C) = AB + +AC$).

1.2. Упражнения по теме «Элементарные производящие функции»

1. Сколькими различными способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно n?

2. Докажите эти равенства и найдите произведение

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(1 - x).$$

3. Верно ли тождество $\ln(\exp x) = x$?

4. Верно ли тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

5. Вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{m}.$$

6. Найти число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = n.$$

7. Как велико количество a_n способов представить неотрицательное целое число n в виде суммы чисел 1 и 2?

1.3. Решение некоторых комбинаторных задач с помощью производящих функций

1.3.1. Задача о расстановке чёрных и белых шаров

Сколькими различными способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно n?

В этой задаче есть один параметр — это общее число шаров n. Решением такого рода комбинаторных задач считается формула (или какой-либо эффективный алгоритм), позволяющая получить ответ для любого заданного n (в данном случае $n \geq 0$). Этот ответ будем обозначать символом a_n.

Белый шар обозначим символом *Б*, а чёрный — *Ч*. Любое расположение шаров можно записать в виде последовательности этих символов *Б* и *Ч*. Нулевое количество шаров будем обозначать $\emptyset$. При решении комбинаторных задач с параметром, если ответ не очевиден, необходимо пытаться получить его для небольших значений этого параметра. Например, при $n = 2$ найдется всего 4 способа: *ББ, БЧ, ЧБ* и *ЧЧ*. При $n = 1$ таких способов два: *Б* и *Ч*.

Что делать, когда $n = 0$? Единственный способ не располагать в линию ничего — это ничего не делать, причём ничего не делать можно одним способом. Если угодно, такое решение задачи с нулевым количеством шаров можно считать договором, который в будущем, когда мы получим общие представления о решении задачи, должен согласоваться с этими общими представлениями. Достаточно удобно считать, что отсутствие чего-то можно наблюдать одним способом.

Действительно, в математике существует много таких примеров, когда нужно выполнить действие с нулевым количеством объектов. Например, число перестановок n различных объектов равно $n!$, при этом $0! = 1$ (ничего не переставлять можно одним способом). Число способов выбрать k объектов из n различных есть число сочетаний $\binom{n}{k}$, причём $\binom{n}{0} = 1$ (ничего не выбрать можно одним способом).

Рассмотрим случай n = 3. В этом случае можно взять самый левый шар белым, и закончить комбинацию $Б$ четырьмя способами, а можно взять его чёрным, закончив комбинацию $Ч$ также четырьмя способами. Значит $a_3 = 2a_2$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $a_n = 2a_{n-1}$(для $n \geq 1$), это означает, что $a_n = 2^n$.

Ответом к поставленной задаче являются степени числа 2: 1,2,4,8,16, ... Заметьте, что наш вывод о том, что a_0=1. согласуется с полученной формулой. Действительно, 2^0=1.

Производящая функция.

«Просуммируем» все возможные комбинации следующим образом:

$$A = \emptyset + \text{Б} + \text{Ч} + \text{ББ} + \text{ЧБ} + \text{БЧ} + \text{ЧЧ} + \text{БББ} + \cdots$$

Здесь мы будем складывать и перемножать последовательности шаров. Сложение последовательностей в этой сумме вполне понятно — «суммируются» все допустимые способы, причем каждый по одному разу. Что означает умножение? Интуитивно понятно, что расположения шаров можно перемножать. Так, перемножив *БЧ* и *ЧБ*, мы получим *БЧЧБ*, но обратите внимание на то, что операция умножения здесь некоммутативна *(Б·Ч≠Ч·Б*), так как перемножение тех же разбиений в другом порядке может дать другое разбиение: *ЧБ·БЧ=ЧББЧ*. Отметим, что пустое разбиение $\emptyset$ в операции умножения играет роль мультипликативной единицы, например, *ЧБ*·$\emptyset$=$\emptyset$·*ЧБ*=*ЧБ*.

Теперь проведём с «рядом» A последовательность арифметических манипуляций:

$$\text{А} = \emptyset + \text{Б} + \text{Ч} + \text{ББ} + \text{ЧБ} + \text{БЧ} + \text{БББ} + \cdots =$$

$$= \emptyset + \text{Б} \cdot (\emptyset + \text{Б} + \text{Ч} + \cdots) + \text{Ч} \cdot (\emptyset + \text{Б} + \text{Ч} + \cdots) =$$

$$= \emptyset + \text{Б} \cdot \text{А} + \text{Ч} \cdot \text{А}.$$

Последняя часть равенства содержит каждое из разбиений ровно по одному разу, поэтому все проделанные манипуляции, по крайней мере, не являются абсурдными.

Разрешив уравнение относительно А, получим

$$(\emptyset - \text{Б} - \text{Ч})\text{А} = \emptyset,$$

$$\text{А} = \frac{\emptyset}{\emptyset - \text{Б} - \text{Ч}}.$$

Вспомним формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Заменив *Б* + *Ч* на x, а $\emptyset$ на 1, получим

$$\text{А} = \frac{\emptyset}{\emptyset - \text{Б} - \text{Ч}} = \frac{1}{1-x} = \emptyset + (\text{Б} + \text{Ч}) + (\text{Б} + \text{Ч})^2 + (\text{Б} + \text{Ч})^3 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\text{Б} + \text{Ч})^n.$$

В этой сумме также учтены все возможные разбиения в точности по одному разу. Например, разбиение *ББЧБ* встречается в $(\text{Б} + \text{Ч})^4$, а $\emptyset$ есть ни что иное как $(\text{Б} + \text{Ч})^0$. Далее воспользуемся формулой, известной как бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} (\text{Б} + \text{Ч})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Б}^k \text{Ч}^{n-k}.$$

Коэффициент при $\text{Б}^k\text{Ч}^{n-k}$, равный числу сочетаний из *n* по *k*, показывает общее количество последовательностей из *n* шаров *Б* и *Ч*, содержащих *Б* в количестве k и *Ч* в количестве $n-k$. Таким образом, общее число расположений *n* шаров (не важно, каких сколько) есть сумма по всем возможным значениям *k*:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Связь с определением.

По определению производящая функция (2) имеет вид:

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots.$$

В нашей задаче не важно, какой шар, на каком месте стоит, важно, что их общее количество равно n. По этой причине можно законно заменить оба символа — $Ч$ и $Б$ — одной буквой s и записать равенство:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\text{Б}^k\text{Ч}^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^n.$$

Теперь очень хорошо видно, в чём связь последней суммы с исходным определением производящей функции. Коэффициент, стоящий при s^n, равен значению a_n (по исходному определению) и равен сумме всех биномиальных коэффициентов. Поэтому справедливо записать

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Откуда здесь взялось 2^n? Во-первых, известно, что сумма биномиальных коэффициентов всей строки с номером n равна 2^n, а, во-вторых, эту величину можно получить, если вспомнить запись нашей производящей функции в свёрнутом виде и снова сделать шары неразличимыми:

$$A = \frac{\emptyset}{\emptyset - \text{Б} - \text{Ч}} = \frac{\emptyset}{\emptyset - s - s} = \frac{1}{1-2s} = 1 + (2s) + (2s)^2 + (2s)^3 + \cdots,$$

откуда видно, что коэффициент, стоящий перед s^n, равен 2^n.

1.3.2. Задача о некоммутативном разбиении

Как велико количество a_n способов представить неотрицательное целое число n в виде суммы чисел 1 и 2? Причём способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются различными (то есть 3 = 1+2 и 3 = 2+1 — разные способы; именно поэтому разбиение называется некоммутативным). Как и в предыдущей задаче, здесь есть один параметр — это число n, поэтому сначала научимся решать задачу для небольших значений n.

Например, при n=3 можно получить 3 суммы: 3 = 1+1+1, 3 = 1+2 и 3 = 2+1. При n = 2 имеются всего две суммы: 2 = 1+1 и 2 = 2. Когда n = 1, есть всего один вариант разбиения на одно слагаемое, равное 1.

Возникает интуитивное подозрение, что $a_n = n$, но оно становится ошибочным уже при n = 0. Единственный способ представить число 0 в виде суммы слагаемых 1 и 2 — это не брать эти слагаемые совсем, причём сделать это можно одним способом.

Рассмотрим ещё одно значение n = 4. В этом случае можно либо взять самое левое из слагаемых равным 1, либо считать его равным 2. Тогда в первом случае разбиение числа 4 = 1 + … можно завершить a_3 способами, а во втором — разбиение числа 4 = 2 + … можно завершить a_2 способами, поэтому $a_4 = a_3 + a_2 = 5$. Рассуждая аналогично, получим, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (для $n \geq 2$). Таким образом, мы случайно решили задачу (предложив рекуррентное соотношение для a_n), исходя из чисто комбинаторных рассуждений.

Ответом к поставленной задаче являются числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Традиционно числа Фибоначчи начинаются от 0: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (для $n \geq 2$), поэтому ответом к нашей задаче с заданным параметром n является (n+1)-е число Фибоначчи: $a_n = f_{n+1}$.

Производящая функция.

Представим наши слагаемые 1 и 2, на которые нужно разбить число n, с помощью символов ① и②. Любое разбиение можно записать в виде последовательности этих символов. Так, если n = 1+2+2+1+1, можно записать ①②②①① . Символ ∅ будет играть роль нулевого количества слагаемых. Теперь запишем все возможные способы разбить числа $n \geq 2$ на сумму слагаемых ① и ②:

$$A = \emptyset + ① + ①① + ② + ①①① + ①② + ②① + \cdots$$

Обратим внимание на то, что операция умножения здесь снова некоммутативна (①·②≠②·①), Пустое разбиение $\emptyset$ в операции умножения играет роль единицы, например, $\emptyset$·①② = ①②·$\emptyset$ = ①②.

Снова попытаемся свести «ряд» к самому себе:

$$A = \emptyset + ① + ①① + ② + ①①① + ①② + ②① + \cdots =$$
$$= \emptyset + ①\big(\emptyset + ① + ①① + ② + \cdots\big) + ②\big(\emptyset + ① + ①① + ② + \cdots\big) =$$
$$= \emptyset + ①A + ②A.$$

Разрешив уравнение относительно А, получим

$$A = \frac{\emptyset}{\emptyset - ① - ②}.$$

Отметим, что ①① = ② (равенство понимается в том смысле, что 1+1 = 2). Поэтому, заменив ① на z, а $\emptyset$ на 1, получим

$$A = \frac{\emptyset}{\emptyset - ① - ②} = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Так мы получили второй вариант записи производящей функции. Забегая вперёд, отметим, что коэффициенты разложения этой функции в ряд по степеням z будут давать искомую последовательность (a_0, a_1, a_2, ...):

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \cdots.$$

Более того, точная формула для чисел Фибоначчи f_n имеет вид:

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big(\big(1+\sqrt{5}\big)^n - \big(1-\sqrt{5}\big)^n\Big),$$

а искомое значение $a_n = f_{n+1}$.

Вспомним формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Заменив ①+② на x, а $\emptyset$ на 1, получим

$$A = \frac{\emptyset}{\emptyset - ① - ②} = \frac{1}{1-x} = \emptyset + \big(① + ②\big) + \big(① + ②\big)^2 + \big(① + ②\big)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(① + ②\big)^n.$$

В этой сумме также учтены все возможные разбиения в точности по одному разу. Например, разбиение ①①②① встречается в $(① + ②)^4$. Далее воспользуемся биномом Ньютона:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \big(① + ②\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ①^k ②^{n-k}.$$

Таким образом, коэффициент при $①^k ②^{n-k}$, равный числу сочетаний из n по k, показывает общее количество разбиений из n слагаемых ① и ②, содержащих ① в количестве k и ② в количестве $n - k$. Таким образом, общее количество разбиений числа n есть

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Эта же сумма равна числу Фибоначчи f_{n+1}, то есть числа Фибоначчи могут быть легко выражены и через биномиальные коэффициенты.

1.3.3. Задача о коммутативном разбиении

Рассмотрим предыдущую задачу с той разницей, что перестановка элементов разбиения не учитывается, то есть задачу со следующей формулировкой: как велико количество a_n способов представить неотрицательное целое число n в виде суммы чисел 1 и 2? Способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми (то есть 3 = 1 + 2 и 3 = 2 + 1 — одинаковые способы; именно поэтому разбиение называется коммутативным).

Как и прежде, рассмотрим ответы для некоторых небольших значений параметра n:

n	0	1	2	3	4
a_n	1	1	2	2	3

Вернёмся к нашим обозначениям: 1 = ① и 2 = ②. Работая с производящими функциями, нужно завести какие-нибудь абстрактные символы, из которых можно сконструировать пересчитываемый объект, а затем попытаться все эти возможные объекты просуммировать. В данном случае суммировать удобно по частям. Пусть

$$T = \emptyset + ① + ①① + ①①① + \cdots = \emptyset + T \cdot ① -$$

разбиения, состоящие только из единиц, тогда

$$A = T + T② + T②② + \cdots = T + A \cdot ② -$$

все возможные разбиения. Заметим, что в предыдущих манипуляциях мы строго следим за порядком умножения. Из этих уравнений получаем:

$$T = \frac{\emptyset}{\emptyset - ①},$$

$$A = \frac{T}{\emptyset - ②}.$$

Подставляя T из первого уравнения во второе, получаем:

$$A = \frac{\emptyset}{\emptyset - ①} \cdot \frac{\emptyset}{\emptyset - ②},$$

Вспомним, что ①①=②, и, обозначив ① через z, а $\emptyset$ через 1, получим

$$A = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}.$$

Сейчас запишем ответ:

$$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1+z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right) z^n.$$

Откуда $a_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Глава 2. Прочные разбиения

2.1. Основная задача о прочных штабелях

Рассмотрим следующую задачу.

Сколько способов составить прочный штабель весом N кг из K коробок?

Будем считать каждый штабель состоящим в точности из K коробок, которые расположены друг над другом. Каждая коробка весит целое число килограммов, общий вес штабеля должен составлять N килограммов. Чтобы стоящие внизу коробки не расплющились, потребуем, чтобы вес каждой коробки был не меньше суммарного веса всех находящихся над ней коробок. Штабель, удовлетворяющий этому условию, будем называть *прочным*.

Например, для N = 7 существуют два прочных штабеля из K = 3 коробок: 7 = 1+2+3+4 и 7 = 1+1+5. В каждом равенстве первое слагаемое – это вес верхней коробки, второе – вес второй коробки, и, наконец, третье слагаемое указывает вес нижней коробки.

Разбиение $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ с $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$ называют *прочным*, если $p_1 + \cdots + p_j \leq p_{j+1}$ для $1 \leq j \leq k - 1$.

Нам дано n коробок, пронумерованных числами 1, 2..., n. Для i = 1..., n, *коробка* i весит i килограммов и может выдержать общую массу в i килограммов. Найти количество различных способов $f(n)$ построить штабель, в котором ни одна из коробок не будет раздавлена коробками, стоящими над ней. Например, f (4) = 14, так как мы можем сформировать следующие штабели:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\
\emptyset, & 1, & 2, & 3, & 4, & 2, & 3, & 4, & 3, & 4, & 4, & 3, & 4, & 4
\end{array}$$

Другие два возможных штабеля:

$$\begin{array}{cc}
 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 3 \\
4 & 4
\end{array}$$

Поскольку 2 + 3 > 4, коробка 4, разрушится в обоих случаях.

Если коробки в штабеле обозначены (от вершины) p_1, p_2,..., p_j, штабель не разрушится тогда и только тогда, когда разбиение прочное. Здесь коробки должны иметь разные нумерации и их суммы не могут превысить $\binom{n+1}{2}$. Поэтому f (n) равно общему количеству разбиения чисел от 0 до $\binom{n+1}{2}$, которые являются (i) прочными, (ii) имеют различные части, и (iii) не включают части, больше, чем n.

2.2. Прочные разбиения

Пусть $a(n)$ — количество прочных разбиений числа n. Как показали Хиршхорн и Селлерс [5], $a(n)$ равно количеству двоичных разбиений числа n, то есть, количеству разбиений числа n по степеням 2. Например, число 4 можно представить в виде суммы степеней 2 ровно четырьмя способами:

$$4 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Количество прочных разбиений числа 4 тоже равно 4, так как

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 +2.$$

На самом деле Хиршхорн и Селлерс доказали более общий результат. Пусть $s \geq 2$ целое. Разбиение (5) является s–прочным, если

$$(s-1)(p_1 + \cdots + p_j) \leq p_{j+1} \text{ для } 1 \leq j \leq k-1\,. \tag{7}$$

Если p_j – вес j-ой коробки в штабеле, то это неравенство означает, что j-ая коробка выдерживает $(s-1)$-кратный вес всех коробок, расположенных над ней. Определенное выше прочное разбиение, является в этом смысле 2-прочным.

Теорема 1 (Хиршхорн и Селлерс [5].) Количество a (n) s-прочных разбиений числа n равно количеству “s-ичных” разбиений числа n, то есть равно количеству разбиений числа n по степеням s.

Приведем доказательство этого результата, основанное на идее взаимно однозначного соответствия между двумя значениями.

Пусть $a'_s(n)$ — количество разбиений числа n по степеням s, для некоторого целого числа $s \geq 2$. Предположим, что

$$n = s^{e_1} + s^{e_2} + \cdots + s^{e_l}$$

— произвольное s-ичное разбиение числа $n \geq s$. Если хотя бы одна из частей равна 1, мы можем удалить ее и получить разбиение $n - 1$ по степеням s; в противном случае все e_i больше, чем 0, и мы можем также разделить на s и получить разбиение $\frac{n}{s}$. Поэтому $a'_s(n)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$a'_s(n) = a'_s(n-1) \text{ для } n \not\equiv 0 \ (mod\ s),$$

$$a'_s(n) = a'_s(n-1) + a'_s\left(\frac{n}{s}\right) \text{ для } n \equiv 0 \ (mod\ s), \qquad (8)$$

для $n \geq s$. Самое маленькое число n, для которого есть разбиение больше, чем с одной частью, является s, таким образом, мы имеем начальное условие

$$a'_s(0) = a'_s(1) = \cdots = a'_s(s-1) = 1. \qquad (9)$$

С другой стороны, пусть

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k, \quad \text{где } 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k, \qquad (10)$$

будет s-прочным разбиением, где $n \geq s$.

Если самая большая часть p_k строго больше, чем $\frac{(s-1)n}{s}$, тогда сумма других частей строго меньше, чем $\frac{n}{s}$, и мы можем вычесть 1 из самой большой части и получить s-прочное разбиение числа $n - 1$.

Если самая большая часть равна $\frac{(s-1)n}{s}$, (допущение $n \equiv 0 \ mod\ s$),то мы можем её также удалить, при этом получится s-прочное разбиение числа $\frac{n}{s}$. Поэтому $a_s(n)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$a_s(n) = a_s(n-1), \text{ если } n \not\equiv 0 \ (mod\ s),$$

$$a_s(n) = a_s(n-1) + a_s(n/s), \text{ если } n \equiv 0 \ (mod\ s), \qquad (11)$$

для $n \geq s$.

Самое маленькое число n, для которого есть разбиение больше, чем с одной частью, является s, и удовлетворяет начальным условиям

$$a_s(n) = a_s(1) = \cdots = a_s(s-1) = 1. \qquad (12)$$

Сравнивая формулы (8), (9) с (11), (12), мы получаем, что $a'_s(n) = a_s(n)$ для всех $n \geq 0$ и всех $s \geq 2$ (см. [5]).

Вышеупомянутое доказательство связывает каждое разбиение с разбиением меньшего числа. Поэтому мы можем организовать разбиение в каждой части корневого дерева, с пустым разбиением 0 как узел корня. Рисунки 1 и 2 показывают начало двух деревьев для случая s = 2. Каждый узел имеет два потомка и (кроме корня) один предок. Мы можем обозначить края из ведущие от разбиения $\frac{n}{s}$ к разбиению n с 0 (такие края отображаются в виде ломаных линий в рисунках 1 и 2) и края, ведущие от разбиения числа $n - 1$ к разбиению n с 1(отображаются сплошными линиями).

Это связывает уникальную двоичную строку каждого разбиения в любом дереве. Разбиение числа n в одном дереве получает ту же двоичную строку, как и соответствующее разбиение числа n в том же положении в другом дереве. Таким образом, мы получаем каноническую нумерацию для s прочного разбиения, канонической нумерации для разбиений по степеням s и биекции между ними.

Таблица 1: Биекция между s прочным разбиением $P(u)$ и s-ичным разбиением $Q(u)$; n-индекс (пишется как двоичное число), и n — это число, которое является разбиваемым.

u	$P(u)$	$Q(u)$	n
0	$\emptyset$	$\emptyset$	0
1	1	1	1
10	$s-1, 1$	s	s
11	2	$1, 1$	2
100	$s(s-1), s-1, 1$	s^2	s^2
101	$s, 1$	$s, 1$	$s+1$
110	$2(s-1), 2$	s, s	$2s$
111	3	$1, 1, 1$	3
1000	$s^2(s-1), s(s-1), s-1, 1$	s^3	s^3
1001	$s^2-s+1, s-1, 1$	$s^2, 1$	s^2+1
1010	$s^2-1, s, 1$	s^2, s	s^2+s
1011	$s+1, 1$	$s, 1, 1$	$s+2$
1100	$2s(s-1), 2(s-1), 2$	s^2, s^2	$2s^2$
1101	$2s-1, 2$	$s, s, 1$	$2s+1$
1110	$3(s-1), 3$	s, s, s	$3s$
1111	4	$1, 1, 1, 1$	4
10000	$s^3(s-1), s^2(s-1), s(s-1), s-1, 1$	s^4	s^4
10001	$s^3-s^2+1, s(s-1), s-1, 1$	$s^3, 1$	s^3+1
10010	$(s-1)(s^2+1), s^2-s+1, s-1, 1$	s^3, s	s^3+s
10011	$s^2-s+2, s-1, 1$	$s^2, 1, 1$	s^2+2
10100	$s(s^2-1), s^2-1, s, 1$	s^3, s^2	s^3+s^2
10101	$s^2, s, 1$	$s^2, s, 1$	s^2+s+1

Таблица 1

В таблице 1 показано начало биекции. Первый столбец дает u двоичную строку, второй столбец дает соответствующее s-прочное разбиение $P(u)$, третий столбец дает соответствующее s-ичное разбиение $Q(u)$ и последний столбец дает число $n = n(u)$, равное сумме $P(u)$ и $Q(u)$.

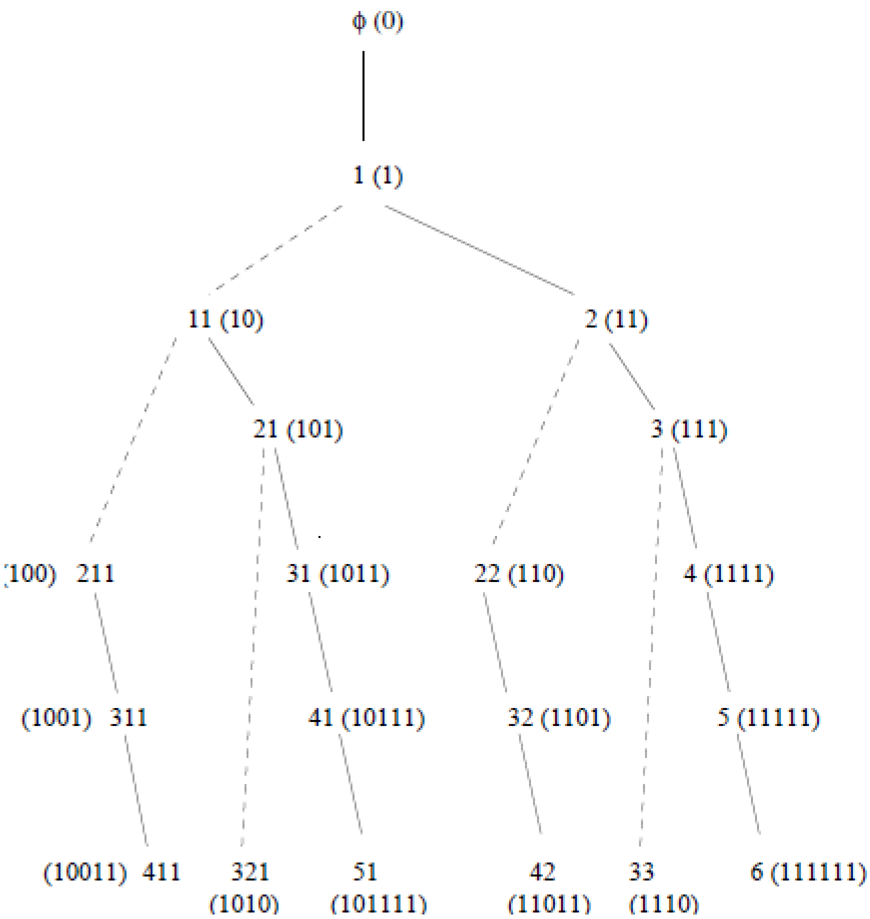

Рис. 1

Рисунок 1: Прочные разбиения чисел 0, ..., 6 расположены в древовидной структуре. Двойные значения указаны в круглых скобках. (Каждый узел имеет степень 2, но показаны только края между разбиениями 0..., 6.)

Отмечаем без доказательства следующие свойства биекции.

(i) для ненулевого значения строки u, количество деталей $P(u)$ равно 1 плюс число 0-ых в u, и количество частей в $Q(u)$ равен числу 1 в u.

(ii) рассматривая теперь u как целое число в двоичной строке, число $n = n(u)$ (указано в последнем столбце таблицы) равно сумме $P(u)$ и $Q(u)$.

$n(0) = 0; n(2u) = sn(u)$ для $u \geq 1, n(2u+1) = n(u) + 1$ для $u \geq 0$

(iii) $P(u) = Q(u)$, тогда и только тогда, когда $u = \frac{(4^k - 1)}{3}$ для некоторых $k \geq 1$ (то есть, если u является двоичной строкой 10101... 01).

Легко перейти от двойного вектора к разбиениям, и наоборот. Для получения s-прочного разбиения $P(u)$, соответствующего двоичному вектору u, мы начинаем с пустого разбиения $P(u) = \emptyset$, затем просматриваем u слева направо (т.е. начиная с самого старшего разряда):

— если мы видим 1, то при $P(u) = \emptyset$ множество $P(u) = 1$, в противном случае добавляем 1 к самой большой части $P(u)$;

— если мы видим 0, то при $P(u) = \emptyset$ множество $P(u) = 0$, в противном случае совпадают с $P(u)$ частью, равной $s - 1$-кратной сумме частей $P(u)$.

Пример: для $s = 3$. Пусть $u = 10110$. Последовательно вычисляя, получаем для $P(u)$:

$$\emptyset, 1, 21, 31, 41, 1041 .$$

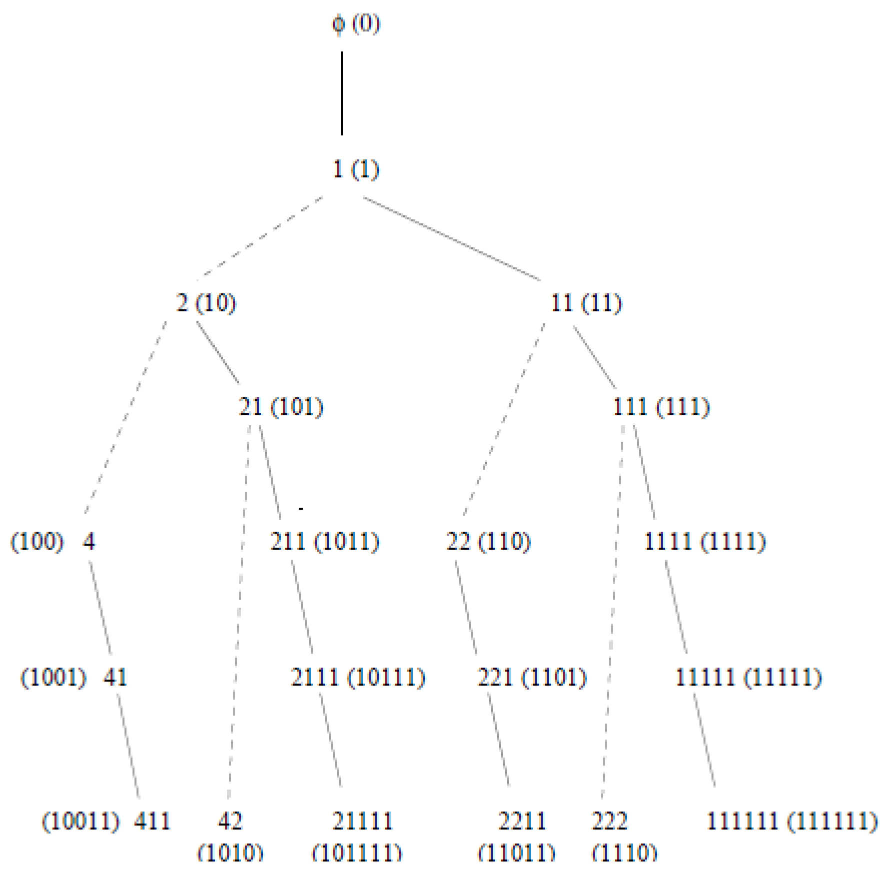

Рис. 2.

Рисунок 2: Двоичные разбиения чисел 0, ..., 6 показаны в виде дерева, их двоичные значения записаны в скобках. (Каждый узел имеет степень 2, но показаны только ребра для разбиений чисел 0..., 6.)

Аналогичным образом, чтобы получить разбиение $Q(u)$ по степеням s, снова мы начинаем с пустого разбиения $Q(u) = \emptyset,$ и двигаемся вдоль u слева направо:

— если мы видим 1, добавляем части размера 1 к $Q(u)$

— если мы видим значение 0, то с $Q(u) = \emptyset$ ничего не делать, иначе все части $Q(u)$ умножить на s.

Пример для $s = 3$. Снова берем $u = 10110$. Последовательно вычисляя, получаем для $Q(u)$

$$\emptyset, 1, 3, 31, 311, 933.$$

Таким образом, биекция связывает эти два разбиения: $P(u) = 1041$ и $Q(u) = 933$.

Отметим, что последовательность $a_s(n)$ имеет производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_s(n)x^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{s^i}} \,. \tag{13}$$

2.3. Прочные разбиения, состоящие из различных частей

В этом параграфе мы рассматриваем только случай $s = 2$, то есть, прочные разбиения, при этом рассматриваются только ***различные*** части. Обозначим количество прочных разбиений числа n на различные части через $b(n)$. Первые несколько значений $b(n)$ для $n = 0, 1, 2...$ равны

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 18, 19, 24, 25, 31, 32, 40, 41, 50,… (14)

Теорема 2. Количество $b(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered} b(0) = b(1) = 1\,, \\ b(2m) = b(2m - 1) + b(m) - 1 \text{ для } m \geq 1, \\ b(2m + 1) = b(2m) + 1 \text{ для } m \geq 1\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Производящая функция $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$ удовлетворяет равенству

$$B(x) = \frac{1}{1-x} B(x^2) - \frac{x^2}{1-x^2}, \tag{16}$$

и может быть выражена явно в виде

$$B(x) = 1 + \frac{x}{1-x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{3\cdot 2^{i-1}}}{\prod_{j=0}^{i}(1-x^{2^j})}. \tag{17}$$

Доказательство. Прочное разбиение с различными частями для нечетного числа $2m + 1$ получается присоединением части размера $2m + 1 - j$ к разбиению j, для некоторых $j = 0, 1..., m$ (так как $2m + 1 - j > j$, они действительно прочные). Аналогично получается прочное разбиение числа $2m$ путем присоединения слагаемого $2m - j$ к разбиению j, для некоторого $j = 0, 1..., m,$ за исключением того, что при $j = m$ мы не можем присоединить слагаемое m к разбиению, состоящему из одного числа m. Таким образом, мы имеем равенства

$$b(0) = b(1) = 1 ,$$
$$b(2m + 1) = b(0) + b(1) + \cdots + b(m) \text{ для } m \geq 1 ,$$
$$b(2m) = b(0) + b(1) + \cdots + b(m) - 1 \text{ для } m \geq 1, \tag{18}$$

из них очевидным образом получаются равенства (15). Для производящей функции $B(x)$ с помощью равенств (15) и несложных алгебраических преобразований получаем

$$B(x) = xB(x) + B(x^2) - \frac{x^2}{1+x}, \tag{19 }$$

отсюда после перестановки слагаемых приходим к (16). Заменяя x на x^2, запишем (16) в следующем виде:

$$B(x^2) = \frac{1}{1-x^2} B(x^4) - \frac{x^4}{1-x^4} ,$$

и так далее. Следовательно,

$$B(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^i}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2^i}}{\prod_{j=0}^{i-1}(1-x^{2^j}) \cdot (1+x^{2^{i-1}})} =$$

$$= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^i}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2^i}}{\prod_{j=0}^{i-2}(1-x^{2^j}) \cdot (1-x^{2^i})} . \tag{20}$$

Для упрощения используем тождество, где $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ положительные целые, затем

$$1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{x^{m_j}}{(1-x^{m_1})(1-x^{m_2}) \cdots (1-x^{m_j})} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^{m_j}} . \tag{21}$$

Применяя это к сумме в (20) и упрощая, мы окончательно приходим к (17).

Следствие 1. Последовательность $\{b(n)\}$ обладает свойством, что и последовательность частичных сумм

$$1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32, 41, 51, 64, 78, 96, 115, 139, 164, \dots \quad (22)$$

совпадает с подпоследовательностью $b(1)$, $b(3)$, $b(5)$, ... с нечётными номерами. Подпоследовательность $b(2)$, $b(4)$, $b(6)$ ... с четными номерами получается добавлением 1 к числам из (22).

Доказательство. Утверждение эквивалентно алгебраическому соотношению

$$\frac{B(x)}{1-x} = \frac{B\sqrt{x} - B(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \quad (23)$$

которое легко проверить, используя (19) и (20).

Следствие 2. Количество прочных разбиений $b(n)$ числа n на различные части равно количеству разбиений числа n по степеням 2 таким образом, что если все части равны 1 или, если самая большая часть равна $2^i > 1$, тогда имеется по крайней мере одна часть размером 2^{i-1}.Это утверждение следует из (15), оно также является непосредственным следствием (20).

Соответствия, удовлетворяющие $a_s(n)$ были изучены многими авторами (см. [5]). Здесь мы делаем запись только для одного такого результата $b(n)$.

Следствие 3: Для значений $b(n)$ справедливы следующие утверждения (все сравнения по *mod* 2):

$$b(0) \equiv 1, \quad (24)$$

$$\text{если } n \text{ - нечетное, } b(n) \equiv b(n-1) + 1, \quad (25)$$

$$b(8m + 2) \equiv 1,\ b(8m + 6) \equiv 0, \quad (26)$$

$$b(16m + 4) \equiv 0,\ b(16m + 12) \equiv 1, \quad (27)$$

$$\text{для } m > 0,\ b(16m) \equiv b(8m),\ b(32m + 8) \equiv 0,\ b(32m + 24) \equiv 1. \quad (28)$$

Доказательство. Равенство (25) следует из (15). Чтобы доказать первое утверждение в (26), мы неоднократно обращаемся к (15):

$$b(8\mathrm{m} + 2) \equiv b(8m + 1) + b(4m + 1) + 1 \equiv b(8m) + b(4m) + 1 \equiv b(8m - 1)$$
$$\equiv b(8m - 2) + 1 \equiv \ldots \equiv b(8i - 6) \equiv \ldots \equiv b(2) = 1.$$

Другие соотношения в (26) – (28) устанавливаются аналогично.

Таблица 2: Пусть $a(n, k)$ количество прочных разбиений числа n ровно на k частей.

	k				
n	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	1	2	1	0
5	0	1	2	1	0
6	0	1	3	2	0
7	0	1	3	2	0
8	0	1	4	4	1
9	0	1	4	4	1
10	0	1	5	6	2
11	0	1	5	6	2
12	0	1	6	9	4
13	0	1	6	9	4

Таблица 2

2.4. Прочные разбиения на заданное количество частей.

Пусть $a(n, k)$ — количество прочных разбиений числа n ровно на k частей. В таблице 2 даны начальные значения этой функции.

Теорема 5. Количество *a(n,k)* удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$a(2m, k) = a(2m - 1, k) + a(m, k - 1) \text{ для } m \geq 1, k \geq 1,$$
$$a(2m + 1, k) = a(2m, k) \text{ для } m \geq 1, k \geq 1, \tag{29}$$

с начальными условиями

$a(0, 0) = 1$, $a(n, 0) = 0$ для $n \geq 1$, $a(n, k) = 0$ для $k > n$, $a(n, 1) = 1$ для $n \geq 1$.

В частности, каждая строка с нечетным номером (за исключением ряда 1) в таблице 2 является копией предыдущего ряда. Если повторяющиеся записи опущены, у k-й колонки есть производящая функция

$$\sum_{k-0}^{\infty} a(2m,k)x^m = \frac{x^{2^{k-2}}}{(1-x)\cdot\prod_{j=0}^{k-2}(1-x^{2^j})}, \quad (30)$$

в то время как, если они включены, мы получаем более простое выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(m,k)x^m = \frac{x^{2^{k-2}}}{\prod_{j=0}^{k-2}(1-x^{2^j})}. \quad (31)$$

Равенство (31) означает, что количество прочных разбиений числа n на k частей равно (i) количеству разбиений числа $n-2^{k-1}$ по степеням 2 на части, не превышающие 2^{k-1}, а также равно (ii) количеству двоичных разбиений числа n с самой большой частью 2^{k-1}.

Доказательство. Равенство (29) получается с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы для получения равенства (11).

Например, для $k = 3$ колонки выпишем последовательность чисел с четными номерами ($2m = 0, 2, 4, 6, \dots$) :

0, 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81... .

Эту последовательность можно определить также формулой

$$a(2m, 3) = \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$$

с производящей функции

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(m,k)x^m = \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}$$

2.5. Прочные разбиения на *k* различных частей

Пусть $b(n, k)$ — количество прочных разбиений числа n ровно на k различных частей. В таблице 3 представлены начальные значения этой функции.

Таблица 3: Количество $b(n, k)$ прочных разбиений числа n ровно на k различных частей.

n \ k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0
5	0	1	2	0	0
6	0	1	2	1	0
7	0	1	3	1	0
8	0	1	3	2	0
9	0	1	4	2	0
10	0	1	4	4	0
11	0	1	5	4	0
12	0	1	5	6	1
13	0	1	6	6	1
14	0	1	6	9	2
15	0	1	7	9	2
16	0	1	7	12	4
17	0	1	8	12	4

Таблица 3

Сравнивая эту таблицу с таблицей 2, предполагаем, что таблица 3 получена, перемещением k-ого столбца таблицы 2 (для $k \geq 2$) вниз на 2^{k-2} позиций. Это действительно так.

Теорема 6. Количество $b(n, k)$ удовлетворяют соотношению

$$b(n, 0) = a(n, 0) \text{ для } n \geq 0 ,$$

$$b(n, 1) = a(n, 1) \text{ для } n \geq 0 ,$$

$$b(n, k) = a(n - 2^{k-2}, k) \text{для } n \geq 0, k \geq 2 . \qquad (32)$$

Также

$$\sum_{k=0}^{\infty} b(n,k)x^n = \frac{x^{3\cdot 2^{i-1}}}{\prod_{j=0}^{i}(1-x^{2^j})} \text{ для } k \geq 2. \qquad (33)$$

Из равенства (32) следует, что количество прочных разбиений числа n на k различных частей равно количеству разложений числа $n - 3 \cdot 2^{k-2}$ по степени 2 с частями, не превышающими 2^{k-1}. (Доказательство см. [6])

2.6. Прочные разбиения с наибольшими частями, равными m

Пусть $c(n,\ k)$ — количество прочных разбиений числа n на различные части, самая большая из которых равна числу m. таблица 4 показывает начальные значения.

Таблица 4: пусть $c(n,\ k)$ количество прочных разбиений числа n на различные части, наибольшая из которых равна m (пустые записи равны 0).

	m												
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1	0	1											
2	0	0	1										
3	0	0	1	1									
4	0	0	0	1	1								
5	0	0	0	1	1	1							
6	0	0	0	1	1	1	1						
7	0	0	0	0	2	1	1	1					
8	0	0	0	0	1	2	1	1	1				
9	0	0	0	0	0	2	2	1	1	1			
10	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1		
11	0	0	0	0	0	0	3	2	2	1	1	1	
12	0	0	0	0	0	0	3	3	2	2	1	1	1

Таблица 4

Теорема 7 (i) Ненулевые значения $c(n,\ m)$ лежат в пределах определенного интервала:

$$c\ (n, m) = 0, \text{ если } m < \frac{n}{2} \text{ или если } n < m\ .$$

(ii) Для $m \leq n \leq 2m$,

$$c(n, m) = \sum_{i=0}^{m-1} c(n - m, i). \tag{39}$$

(iii) Для $m \leq n \leq 2m$,

$c(n, m) = b(n - m)$, *если* $n < 2m$;

$c(n, m) = b(n - m) - 1$, *если* $n = 2m$. (40)

Доказательство. (i) Прочное разбиение с различными частями, имеющее самый медленный рост, определяется равенством (35), поэтому у разбиения не может быть $n > 2m$. Второе утверждение следует из определения $c(n, m)$.

(ii) Это является следствием того факта, что удаление самой большой части оставляет разбиение с самой большой частью $\leq m - 1$.

(iii) Когда самая большая часть удалена, мы получаем прочное разбиение числа $n-m$ с различными частями. С другой стороны, учитывая прочные разбиения числа $n-m$ с различными частями, мы получаем разбиение числа n с самой большой частью, равной m, присоединением к части размера числа m, за исключением того, что мы не можем присоединить слагаемое m к разбиению, состоящему из единственного слагаемого m.

2.7. Решение задачи о прочных штабелях

В этом параграфе приведем еще одно решение задачи о прочных штабелях.

Теорема 8. Существует взаимно однозначное соответствие между прочным разбиением, в котором самая тяжелая коробка имеет вес n, и прочным разбиением числа $2n$ с различными частями, т.е.

$$f(n) - f(n - 1) = b(2n) . \quad (41)$$

Доказательство. Пусть

$$1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k = n$$

быть прочное разбиение, в котором самая тяжелая коробка имеет вес n. Пусть $r = p_1 + \cdots + p_{k-1}$($r = 0$ если $k = 1$). Тогда $r \leq p_k = n$. Если мы увеличим большую часть на число $n - r$, мы получаем прочное разбиение числа $2n$. С другой стороны предположим, что $1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ не является прочным разбиением числа $2n$ на различные части. Пусть $r = p_1 + \cdots + p_{k-1}$. Тогда $r + p_k = 2n$, $r < p_k$, отсюда следует, что $r < n < p_k$. Итак, мы можем уменьшить большую часть до n, получая прочный штабель с самой большой частью весом n.

Равенство (41) могло также быть получено из того, что

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\binom{n+1}{2}} \sum_{j=0}^{n} c(i,j) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{n} c(i,j) \ .$$

Следствие 4. Числа $f(n)$есть производящая функция

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \frac{B(x) - x}{(1-x)^2} \ , \tag{42}$$

где $B(x)$ дается в теореме 2. Кроме того, $F(x)$ удовлетворяет

$$F(x) = \frac{(1+x)^2}{1-x} F(x^2) - \frac{x(1-2x^2)}{(1-x)^2(1-x^2)} \ . \tag{43}$$

Доказательство. Из теоремы 8 мы знаем, что

$$f(n) = b(0) + b(2) + \cdots + b(2n),$$

таким образом

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \frac{B(\sqrt{x}) + B(-\sqrt{x})}{2}.$$

Таким образом, (42) будет следовать, если можно показать, что

$$\frac{2(B(x) - x)}{1-x} = B(\sqrt{x}) + B(-\sqrt{x}) \ .$$

Тем не менее, из (23) мы знаем, что

$$\frac{2\sqrt{x} B(x)}{1-x} = B(\sqrt{x}) - B(-\sqrt{x}).$$

Таким образом, мы должны показать, что

$$B(\sqrt{x}) = \frac{B(x) - x}{1-x} + \frac{\sqrt{x} B(x)}{1-x},$$

что сразу следует из (16). Равенство (43), тогда получается с помощью (19). Первые несколько значений $F(n)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ являются

1, 2, 4, 8, 14, 23, 36, 54, 78, 109, 149, 199, 262, 339, 434, 548, 686, . . . (44)

2.8. Прочные штабеля с заданным числом коробок

Пусть $f(n,\ k)$ — количество прочных штабелей ровно из k коробок, каждая из которых имеет вес не более n килограммов. В таблице 5 представлены начальные значения этой функции.

Таблица 5: количество штабелей $f(n,\ k)$, в которых имеется ровно k коробок и самая большая коробка имеет вес $\leq n$.

	k					
n	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	3	0	0
5	1	5	10	7	0	0
6	1	6	15	13	1	0
7	1	7	21	22	3	0
8	1	8	28	34	7	0
9	1	9	36	50	13	0
10	1	10	45	70	23	0
11	1	11	55	95	37	0
12	1	12	66	125	57	1

Таблица 5

Теорема 10. Справедливы следующие соотношения:

$f\,(n, 0) = 1$ для всех n, и для $n \geq 1$, $k \geq 1$,

$$f(n,k) = \sum_{p=0}^{min\{k-1,n-\gamma(k)\}} \sum_{m=p}^{n-\gamma(k)} (n-\gamma(k)+1-m)a(m,p). \quad (45)$$

Доказательство. Мы сначала определяем $f\ (n,\ k)\ -\ f\ (n\ -\ 1,\ k)$, где $1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k = 0$, причем самая большая часть разбиения не превосходит n. Пусть $q_i = p_i - \gamma(i)$ для $i = 1,..., k$ (из (35)), так, чтобы

$$0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_k = n - \gamma(k).$$

Некоторые из q_i могут быть нулевыми. Элементы $q_1, \ldots, q_{k-1}$, отличные от нуля (если таковые имеются), образуют прочное разбиение на p частей некоторого числа m, расположенного между 0 и q_k, где $0 \leq p \leq k - 1$.

Следовательно

$$f(n,k) - f(n-1,k) = \sum_{m \le n-\gamma(k)} \sum_{p \le k-1} a(m,p), \tag{46}$$

и так

$$f(n,k) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{\tau-k}^{n} \sum_{m=p}^{\tau-\gamma(k)} a(m,p). \tag{47}$$

Из этих равенств следует (45).

Глава 3. Применение пакета MAPLE для решения задачи о прочных штабелях

1. Прочные разбиения на различные части. $p_1 + \cdots + p_j \leq p_{j+1}$для всех $1 \leq j < k$ если части расположены в порядке возрастания и сумма частей не превышает данного числа. Например: разбиения cn = 1 по 6: 1; 2; 3 = 1 +2; 4 = 1 +3; 5 = 1 +4 = 2 +3; 6 = 1 +5 = 2 +4 = 1 +2 +3.

```
f := proc(n) option remember;
local t1, i; if n <= 2 then RETURN(1);
fi; t1 := add(f(i), i=0..floor(n/2));
if n mod 2 = 0 then RETURN(t1-1); fi; t1; end;
 t1 := 1 + x/(1-x);
t2 := add( x^(3*2^(k-1))/ mul( (1-x^(2^j)), j=0..k), k=1..10);
series(t1+t2, x, 256); # increase 10 to get more terms
```

2. Числа, расположенные в строках следующего треугольника, совпадают с количеством прочных разбиений числа *n* на *k* частей.

```
T:=proc(n) option remember;
If (n=0, 1, zip((x, y)->x+y, [T(n-1)], [0, T(floor(n/2))], 0)[])
end:
seq(T(n), n=0..25);
```

Здесь $T(n, \kappa)$ ($n \geq 0$, $0 \leq k \leq 1 + log_2 n$.

Заключение

Разобрана задача о прочных разбиениях натурального числа, рассмотрены ее вариации с различными ограничениями на количество частей, а также на размеры этих частей. Приведены программные реализации алгоритмов вычисления количества прочных разбиений в пакете MAPLE. Приведенные в квалификационной работе примеры можно использовать в кружковой работе, на факультативных занятиях со школьниками. Рассмотренные задачи можно также использовать в качестве тем или проектов исследовательских работ школьников или студентов.

Список литературы

1. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика.* — М.: Наука, 1990. — 504 с.
2. Иванов О. *Элементарная математика для школьников, студентов, преподавателей*. – М.: МЦМНО, 2009. — 384с.
3. Ландо С.К. *Введение в дискретную математику.* — М.:МЦНПО, 2012, 194с.
4. Ландо С.К. *Лекции о производящих функциях.* — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.
5. Hirschhorn M.D. and Sellers J.A. *A different view of m-ary partitions* //Australasian J. Combinatorics, 30 (2004), pp. 193-196.
6. Sloane N., Sellers J. *On non-squashing partitions* // Discrete Math., 294 (2005), P. 259-274. – (§ 4).
7. Rodseth O., Sellers J. *On m-ary partition function congruences //* J. of Number Theory 87, no. 2(2001), pp. 270-281.