Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №10, с. 80–85 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное Л.А. Аксентьевым

АН.АН. НОВИКОВ, З. ЭСКАНДАРИАН

ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ С ПОРЯДКОВЫМИ ЕДИНИЦАМИ ПО СТЕПЕННОМУ ПАРАМЕТРУ

Аннотация. В работе получен критерий ограниченности и обратимости измеримой функции f как эквивалентности двух норм в пространствах с порядковыми единцами f^α и f^β, где $\alpha > \beta > 0$. Показано, что предел упорядоченных векторных пространств с порядковыми единицами f^α при α, стремящемся к бесконечности, естественно определить как прямую сумму одного индуктивного и одного проективного пределов. Также получен ряд свойств соответствующих предельных топологий.

Ключевые слова: индуктивный предел, проективный предел, инициальная топология, финальная топология, пространства с порядковой единицей, измеримые функции, банахово пространство, пространство Фреше, локально выпуклое пространство.

УДК: 517.982

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой μ, $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех измеримых вещественнозначных функций на Ω, определенных с точностью до почти всюду. Как обычно, $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство почти всюду ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty \equiv \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \bigm| |f(x)| < \lambda$ почти всюду$\}$. Всюду далее подразумевается, что функции определены с тончостью до почти всюду, соответственно все равенства и неравенства выполняются почти всюду.

1. Предварительные результаты

Пусть $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$. Множество

$$I(f) = \{g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) | \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : -\lambda f \le g \le \lambda f\}$$

является вещественным векторным пространством. Отображение $p_f(g) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda f \le g \le \lambda f\}$ определяет норму на $I(f)$ и $I(\mathbf{1}) = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ [1]–[4].

Предложение 1. *Если $f > 0$ почти всюду на Ω ($f \ge 0$, $\mu\{x \in \Omega | f(x) = 0\} = 0$), то $u : g \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \mapsto fg \in I(f)$ — изометрический изоморфизм $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ на $I(f)$.*

Легко видеть, что $u(L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)) \subset I(f)$. Из-за того, что $f > 0$ почти всюду, существует $f' = \frac{1}{f}$, причем f' измерима и определена с точностью до почти всюду на Ω. Верно, что

$$\begin{aligned} f'I(f) &= \{f'g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \exists \lambda \ -\lambda f \le g \le \lambda f,\ g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)\} = \\ &= \{f'g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \exists \lambda \ -\lambda f' f \le f'g \le \lambda f' f,\ g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)\} \subset L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu). \end{aligned}$$

Поступила 29.03.2016

Поэтому $I(f) = ff'I(f) \subset fL_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subset I(f)$.

Кроме того, $p_f(fg) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | -\lambda f'f \leq f'fg \leq \lambda f'f\} = \|g\|_\infty$ для всех $g \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Для множеств $A,\ B \subset \Omega$ и функций $f : A \mapsto \mathbb{R}$, $g : B \mapsto \mathbb{R}$ ситуация

$$h(x) \equiv \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus B; \\ g(x), & x \in B \setminus A; \\ f(x) + g(x), & x \in A \cap B, \end{cases}$$

обозначается как $h \equiv f \oplus g$.

Следствие 1. Пусть $\Sigma' = \{A \cap \Omega \setminus \ker f | A \in \Sigma\}$, $\mu' = \mu|_{\Sigma'}$. Отображение $U : g \in L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu') \mapsto f|_{\Omega \setminus \ker f} g \in I(f)$ осуществляет изометрический изоморфизм $L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu')$ на $I(f)$.

Очевидно, $\ker f \subset \ker g$ для любого $g \in I(f)$. Раскладывая Ω на две части $\Omega = (\Omega \setminus \ker f) \sqcup \ker f$, получаем, что g существенно определяется только первой частью ($g = g|_{\Omega \setminus \ker f} \oplus \mathbf{0}|_{\ker f}$), причем $f|_{\Omega \setminus \ker f}(x) > 0$ для всех $x \in \Omega \setminus \ker f$. Легко видеть, что ограничение $f \mapsto f|_{\Omega \setminus \ker f}$ осуществляет изометрический изоморфизм $I(f)$ на $I(f|_{\Omega \setminus \ker f})$. Отображение u из предыдущего предложения осуществляет изометрический изоморфизм $I(f|_{\Omega \setminus \ker f})$ на $L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu')$.

Замечание 1. Поскольку $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ является полным пространством, то также полно и $I(f)$ для всякого $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Всюду далее обозначим $f|_{\Omega \setminus \ker f}$ через f'. Соответственно $\|f'\|'_\infty := \|f|_{\Omega \setminus \ker f} \oplus \mathbf{0}|_{\ker f}\|_\infty$. Также всюду далее $I(f')$ идентифицируется с $I(f)$, а $p_{f'}$ идентифицируется с p_f.

Замечание 2. Для $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ верно равенство $\lambda p_{\lambda f} = p_f$.

Замечание 3. Для $f, g \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$, если $f \leq g$, то $p_f \geq p_g$.

Замечание 4. Для $f,\ g \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ выполняется $p_{f \vee g} \leq p_f \wedge p_g \leq p_f \vee p_g \leq p_{f \wedge g}$.

Если для $f, g \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ существует C такое, что $p_f \leq Cp_g$ и $I(g) \subset I(f)$, то всюду далее будем писать $p_f \prec p_g$. Если $p_f \prec p_g$ и $p_g \prec p_f$, то будем писать $p_f \sim p_g$.

Лемма 1. *Для $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ следующие условия эквивалентны*:

i) *f ограничена и обратима (т. е. существует f^{-1} и $\|f^{-1}\|_\infty < +\infty$, $\|f\|_\infty < +\infty$),*

ii) $p_f \sim \|\cdot\|_\infty$.

i) $\Longrightarrow$ ii). Из обратимости f следует $f > 0$ почти всюду. Тогда из предложения 1 ясно, что $\|\cdot\|_\infty \prec p_f$, так как $\|g\|_\infty = p_f(fg) \leq p_f(g\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty p_f(g)$. Также $p_f \prec \|\cdot\|_\infty$, так как $p_f(g) = p_f(ff^{-1}g) = \|f^{-1}g\|_\infty \leq \|f^{-1}\|_\infty \|g\|_\infty$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Так как $I_\Omega \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, то $c = c\|I_\Omega\|_\infty \leq p_f(I_\Omega) \leq C\|I_\Omega\|_\infty = C$. Таким образом, $\inf\{\lambda | \mathbf{0} \leq I_\Omega \leq \lambda f\} \neq \infty$, значит, существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ такое, что $\lambda_0 I_\Omega \leq f$, поэтому $f > 0$ почти всюду, следовательно, существует f^{-1}. Из предложения 1 следует $c\|f\|_\infty \leq p_f(f) = 1$, значит, f ограничена. С другой стороны, $\|f^{-1}\|_\infty = p_f(ff^{-1}) = p_f(I_\Omega) \leq C\|I_\Omega\|_\infty = C$.

Теорема 1. *Для $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ следующие условия эквивалентны*:

i) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ $p_{f^\alpha} \sim p_{f^\beta}$,

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad p_{f^\alpha} \sim \|\cdot\|'_\infty$,

iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad p_{f^\alpha} \sim p_{f^\beta}$.

Схема доказательства. Достаточно показать импликацию i) $\Longrightarrow$ ii). Согласно следствию 1 отображение $U : g \in L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu') \mapsto f'g \in I(f)$ осуществляет изометрический изоморфизм $L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu')$ на $I(f)$. Для $\alpha > 0$ обозначим $U_\alpha : g \in L_\infty(\Omega \setminus \ker f, \Sigma', \mu') \mapsto (f^\alpha)'g \in I(f^\alpha)$. Поскольку $\ker f = \ker f^\alpha$ для любого $\alpha > 0$, то $(f^\alpha)' = (f')^\alpha$ и $U_{\alpha,\beta} = U_\beta U_\alpha^{-1}$ осуществляет изометрический изоморфизм $I(f^\alpha)$ на $I(f^\beta)$ для любых $\alpha, \beta > 0$. В явном виде $U_{\alpha,\beta} : g \in I(f^\alpha) \mapsto (f')^{\beta-\alpha} g \in I(f^\beta)$, причем $p_{f^\alpha}(g) = p_{f^\beta}(g(f')^{\beta-\alpha})$ для всех $g \in I(f^\alpha)$.

Поскольку $p_{f^\alpha} \sim p_{f^\beta}$, то для $g \in I(f^\alpha) = I(f^\beta)$

$$\|g(f')^{-\alpha}\|_\infty = p_{(f')^\alpha}(g) = p_{f^\alpha}(g) \le C p_{f^\beta}(g) = C\|g(f')^{-\beta}\|_\infty.$$

Без потери общности можно считать $\beta > \alpha$. Полагая $g = f^\beta$, получим $\|f^{\beta-\alpha}\|_\infty \le C$. Для любого $\gamma > 0$ верно $\|f^\gamma\|_\infty \le C^{\frac{\gamma}{\beta-\alpha}}$. Аналогично существует C' такое, что $\|f^{\alpha-\beta}\|_\infty < C'$ и для любого $\gamma < 0$ верно неравенство $\|f^\gamma\|_\infty \le (C')^{\frac{\gamma}{\alpha-\beta}}$.

Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $(f')^\gamma$ удовлетворяет п. i) леммы 1, а значит, $p_{f^\gamma} \sim \|\cdot\|'_\infty$.

Лемма и теорема примыкают к задачам и результатам из статьи [5].

2. Основные результаты

В этом разделе рассмотрен частный континуальный аналог конструкций [6]–[8].

Обозначим через τ_α топологию полунормы p_{f^α} на $I(f^\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Если $\|f\|_\infty \le 1$, то $f^\alpha \ge f^\beta$, когда $\alpha \le \beta$; а значит, $I(f^\alpha) \supset I(f^\beta)$ при $\alpha \le \beta$. Для $\alpha \le \beta$ топология, индуцированная на $I(f^\beta)$ топологией τ_α, обозначается τ_α^β. Иначе говоря, $\tau_\alpha^\beta = \{A \cap I(f^\beta) | A \in \tau_\alpha\}$. Если $\alpha \le \beta$, то из замечания 3 следует $\tau_\alpha^\beta \subset \tau_\beta$. Из замечания 2 вытекает, что включения $\tau_\alpha^\beta \subset \tau_\beta$ и $I(f^\beta) \subset I(f^\alpha)$ выполняются, когда $\alpha \le \beta$ и $\|f\|_\infty < +\infty$.

В случае $\|f^{-1}\| \le 1$ (т. е. $f \ge \mathbf{1}$) верно, что $f^\alpha \le f^\beta$ при $\alpha \le \beta$. Аналогично случаю $\|f\| < +\infty$, в силу замечаний 2 и 3 для $\alpha \le \beta$, $\|f^{-1}\| < +\infty$ верны включения $I(f^\alpha) \subset I(f^\beta)$. Для $\alpha \le \beta$ определим τ_β^α как топологию на $I(f^\alpha)$, индуцированную топологией τ_β, причем $\tau_\alpha \supset \tau_\beta^\alpha$.

Следует заметить, что Ω возможно разделить на два непересекающихся измеримых множества $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid f(x) \le 1\}$ и $\Omega_\infty = \{x \in \Omega \mid f(x) > 1\}$. При этом f представима в виде $f = f_0 \oplus f_\infty$, где $f_0 = f|_{\Omega_0}$, $f_\infty = f|_{\Omega_\infty}$, причем $\|f_0\|_\infty \le 1$ и $\|(f_\infty)^{-1}\|_\infty \le 1$. Соответственно, $I(f) = I(f_0) \oplus I(f_\infty)$ в том смысле, что $I(f)$ представимо как декартово произведение $I(f_0) \times I(f_\infty)$ и $p_f(g) = \max\{p_{f_0}(g_0), p_{f_\infty}(g_\infty)\}$ для любого $g \in I(f)$. Далее $I(f_0)$ отождествляется с $I(f_0) \oplus \{0|_{\Omega_\infty}\}$, а $I(f_\infty)$ отождествляется с $\{0|_{\Omega_0}\} \oplus I(f_\infty)$.

Теорема 2. *Линейное пространство $I^\infty(f) \equiv \lim I(f^n)$ корректно определено и*

$$I^\infty(f) = \bigcup_{\alpha>0} \bigcap_{\beta\ge\alpha} I(f^\beta) = \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{\beta\ge\alpha} I(f^\beta) = \bigcap_{\alpha>0} I(f_0^\alpha) \times \bigcup_{\alpha>0} I(f_\infty^\alpha) = I^\infty(f_0) \oplus I^\infty(f_\infty).$$

Схема доказательства. Легко видеть, что $\lim I(f^n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I(f_0^n) \times \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I(f_\infty^n)$, поэтому множество $I^\infty(f)$ корректно определено и $I^\infty(f) = I^\infty(f_0) \oplus I^\infty(f_\infty)$. Легко проверить, что $I^\infty(f)$ является линейным пространством.

Для любого $\alpha > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\alpha \le n$, $I(f_0^\alpha) \supset I(f_0^n)$ и $I(f_\infty^\alpha) \subset I(f_\infty^n)$, следовательно, $\bigcap\limits_{\alpha>0} I(f_0^\alpha) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I(f_0^n)$ и $\bigcup\limits_{\alpha>0} I(f_\infty^\alpha) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I(f_\infty^n)$.

Очевидно,

$$\bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{\beta\ge\alpha} I(f^\beta) = \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{\beta\ge\alpha} I(f_0^\beta) \oplus \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{\beta\ge\alpha} I(f_\infty^\beta) = \bigcap_{\alpha>0} I(f_0^\alpha) \oplus \bigcup_{\alpha>0} I^\infty(f_\infty) = I^\infty(f_0) \oplus I^\infty(f_\infty).$$

Аналогично получается $\bigcup\limits_{\alpha>0}\bigcap\limits_{\beta\geq\alpha} I(f^\beta) = I^\infty(f_0)\oplus I^\infty(f_\infty)$.

Далее $I^\infty(f_0)$ отождествляется с $I^\infty(f_0)\oplus\{0|_{\Omega_\infty}\}$, а $I^\infty(f_\infty)$ отождествляется с $\{0|_{\Omega_0}\}\oplus I^\infty(f_\infty)$. Ясно, что $I^\infty(f_\infty)$ и $I^\infty(f_0)$ нетривиальны.

Пример. Пусть $h := \exp(f_0|^{-1}_{\Omega_0\setminus\ker f})\oplus\mathbf{0}|_{\ker f}$. Верно, что $h\in I^\infty(f_0)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha\exp(-\frac{1}{x}) = 0$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$, то для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ существует C_α такой, что $\exp(-1/x)\leq C_\alpha x^\alpha$ для любого $x\in(0,1]$. Следовательно, $\exp(f_0|^{-1}_{\Omega_0\setminus\ker f})\leq C_\alpha(f_0|_{\Omega_0\setminus\ker f})^\alpha = C_\alpha f_0^\alpha|_{\Omega_0\setminus\ker f}$ и $h\leq C_\alpha f_0^\alpha$.

Замечание 5. Указанный выше пример позволяет построить двупараметрическое ($\alpha\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\},\beta\in\mathbb{R}$) семейство функций $h(\alpha,\beta) = f_0|^\beta_{\Omega_0\setminus\ker f}\exp(-f_0|^{-\alpha}_{\Omega_0\setminus\ker f})\oplus\mathbf{0}|_{\ker f}$, которое полностью лежит в $I^\infty(f_0)$.

Обозначим через τ^0_α топологию на $I^\infty(f_0)$, индуцированную τ_α, иными словами $\tau^0_\alpha = \{A\cap I^\infty(f_0)|A\in\tau_\alpha\}$. Ясно, что для $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ и $\alpha<\beta$ следует $\tau^0_\alpha\subset\tau^0_\beta$, поэтому на $I^\infty(f_0)$ естественно определить инициальную топологию τ_0 для вложений $L^\infty(f_0)$ в $(L(f_0^\alpha),\tau^0_\alpha)$. Базой для нее будет $\bigcup\limits_{\alpha>0}\tau^0_\alpha$.

Лемма 2. $(I^\infty(f_0),\tau_0)$ — *полное метризуемое локально выпуклое пространство (пространство Фреше).*

Схема доказательства. Пространство $(I^\infty(f_0),\tau_0)$ является локально выпуклым и отделимым, поскольку $I^\infty(f_0)$ — векторное пространство и сходимость в нем определяется направленным семейством норм p_{f^α} ($\alpha>0$). Для любого $\alpha>0$ существует $n\in\mathbb{N}$ такой, что $\alpha\leq n<\alpha+1$ и $p_{f^\alpha}\prec p_{f^n}\prec p_{f^{\alpha+1}}$, поэтому топологию τ_0 определяет счетное семейство норм p_{f^n} ($n\in\mathbb{N}$). Согласно ([9], теорема III.2.2) $(I^\infty(f_0),\tau_0)$ метризуемо.

Пусть x_η — направленность Коши в $(I^\infty(f_0),\tau_0)$. Для любого фиксированного $\alpha>0$ найдется предел x_η, равный $x(\alpha)$ в $I(f_0^\alpha)$. Предполагая, что существуют $0<\alpha<\beta$ такие, что $x(\alpha)\neq x(\beta)$, получаем, что в топологии τ^β_α, которая является топологией нормы p_{f^α}, существуют два различных предела направленности x_η, чего быть не может. Значит, для всех $\alpha,\beta>0$ существует единый предел $x = x(\alpha) = x(\beta)$. Поскольку $x = x(\alpha)\in I(f_0^\alpha)$ для любого $\alpha>0$, то $x\in I^\infty(f_0)$.

Замечание 6. Определить, является ли $(I^\infty(f_0),\tau_0)$ банаховым пространством, и подобрать соответствующую норму оказывается более сложной задачей, поскольку естественный претендент на роль нормы $\sup\limits_{\alpha>0} p_{f^\alpha}$ не определяет топологию τ_0. Для любого $f_0>0$, для которого существует последовательность $x_k\in\Omega_0$ такая, что $f_0(x_k)\to 0$, имеем $\sup\limits_{\alpha>0} p_{f_0^\alpha}(\frac{1}{n}\exp(-\frac{1}{f_0})) = \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{ef_0(x_k)})^{1/f_0(x_k)} = +\infty$. Одновременно с этим $p_{f_0^\alpha}\prec p_{\exp(-1/f_0)}$ для любых $\alpha\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ и $p_{\exp(-1/f_0)}(\frac{1}{n}\exp(-\frac{1}{f_0})) = \frac{1}{n}\to 0$, значит, последовательность $\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{1}{f_0}\right)$ сходится в τ_0.

Обозначим через τ^∞_α топологию на $I(f^\alpha_\infty)$, индуцированную топологией τ_α. Для $\alpha<\beta\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ имеем $\tau^\infty_\alpha\supset(\tau^\infty_\beta)^\alpha$. На $I^\infty(f_\infty)$ естественно ввести финальную топологию τ_∞ для вложений $I(f^\alpha_\infty)$ в $I^\infty(f_\infty)$, т.е. сильнейшую топологию, для которой вложения $x\in(I(f^\alpha_\infty),\tau^\infty_\alpha)\mapsto x\in I^\infty(f_\infty)$ являются непрерывными. Топология на $I(f^\alpha_\infty)$, индуцированная τ_∞, обоначена τ^α_∞.

Лемма 3. *Топология* τ^α_∞ *совпадает с* $\bigcap\limits_{\beta>\alpha}(\tau^\infty_\beta)^\alpha$ *для всех* $\alpha>0$.

Схема доказательства. Пусть $f_\alpha : x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\infty_\alpha) \mapsto x \in I^\infty(f_\infty)$. Очевидно, в действительности $f_\alpha : x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\infty_\alpha) \mapsto x \in I(f^\alpha_\infty) \subset I^\infty(f_\infty)$. Пусть $A \in \tau^\alpha_\infty$, тогда $f_\alpha^{-1}(A) = A \in \tau^\infty_\alpha$. Таким образом, $\tau^\alpha_\infty \subset \tau^\infty_\alpha$.

Пусть $\alpha < \beta$. Тогда $I(f^\alpha_\infty) \subset I(f^\beta_\infty)$ и $\tau^\alpha_\infty = (\tau^\beta_\infty)^\alpha$. Вместе с тем, $\tau^\infty_\alpha \supset (\tau^\infty_\beta)^\alpha$. Легко видеть, что $\tau^\alpha_\infty \subset \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha$.

Имеем $g_\alpha : x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\infty_\alpha) \mapsto x \in \left(I(f^\alpha_\infty), \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha\right)$ непрерывны при всех $\alpha > 0$. Тогда финальная топология T для отображений $h_\alpha : x \in \left(I(f^\alpha_\infty), \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha\right) \mapsto x \in (I^\infty(f_\infty), T)$ такова, что $f_\alpha = h_\alpha \circ g_\alpha$ непрерывны, а значит, $T \subset \tau_\infty$ и $\bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha = T^\alpha \subset \tau^\alpha_\infty$.

Замечание 7. Непосредственно из доказательства последней леммы следует, что τ_∞ совпадает с финальной топологией отображений $x \in \left(I(f^\alpha_\infty), \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha\right) \mapsto x \in I^\infty(f_\infty)$.

Пусть $\mathcal{RI}(f) = \{g \in L_0(\Omega_\infty, \Sigma_\infty, \mu_\infty) \mid \forall\alpha > 0\ \exists C_\alpha\ f^\alpha_\infty \le C_\alpha g$ на $\Omega_\infty\}$, где $\Sigma_\infty = \{A \cap \Omega_\infty | A \in \Sigma\}$, $\mu_\infty = \mu|_{\Sigma_\infty}$. Поскольку $\exp(f) \in \mathcal{RI}(f)$, то $\mathcal{RI}(f)$ не пусто. Топология нормы p_g на $I(g)$ обозначена $\tau(g)$. Соответствующая индуцированная топология на $I(f^\alpha_\infty) \subset I(g)$ обозначена $\tau^\alpha(g)$.

Предложение 2. *Для любого $\alpha > 0$ верно, что $\bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha$ не слабее топологии T^α_∞ с базой $\bigcup\limits_{g\in\mathcal{RI}(f)} \tau^\alpha(g)$.*

Схема доказательства. Для любых $g \in \mathcal{RI}(f)$ и $\beta > \alpha$ имеем $\tau^\alpha(g) \subset (\tau^\infty_\beta)^\alpha$. Следовательно, $\tau^\alpha(g) \subset \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha$. Поскольку последнее включение верно для любого $g \in \mathcal{RI}(f)$, то $\bigcup\limits_{g\in\mathcal{RI}(f)} \tau^\alpha(g) \subset \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha$.

Следствие 2. $\left(I(f^\alpha_\infty), \bigcap\limits_{\beta>\alpha} (\tau^\infty_\beta)^\alpha\right)$ — отделимое топологическое векторное пространство.

Лемма 4. *Инициальная топология вложений $f_g : x \in I^\infty(f_\infty) \mapsto x \in (I(g), \tau(g))$, где $g \in \mathcal{RI}(f)$, не сильнее топологии τ_∞.*

Схема доказательства. Пусть $F^\alpha_g : x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\alpha_\infty) \mapsto x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\alpha(g))$, $P_\alpha : x \in (I(f^\alpha_\infty), \tau^\alpha(g)) \mapsto (I^\infty(f_\infty), \tau^\infty(g))$, где $\tau^\infty(g)$ — топология, индуцированная топологией $\tau(g)$ на $I^\infty(f_\infty)$. Очевидно, F^α_g, P_α непрерывны, следовательно, композиция $P_\alpha \circ F^\alpha_g : x \in I(f^\alpha_\infty, \tau^\alpha_\infty) \mapsto x \in (I^\infty(f_\infty), \tau^\infty(g))$ непрерывна. Таким образом, $\tau_\infty \supset \tau^\infty(g)$.

Пусть теперь $H : x \in (I^\infty(f_\infty), \tau_\infty) \mapsto x \in (I^\infty(f_\infty), \tau^\infty(g))$, $G : x \in (I^\infty(f_\infty), \tau^\infty(g)) \mapsto x \in (I(g), \tau(g))$. Очевидно, H и G непрерывны, поэтому $f_g = G \circ H : x \in (I^\infty(f_\infty), \tau_\infty) \mapsto x \in (I(g), \tau(g))$ непрерывна, следовательно, τ_∞ мажорирует инициальную топологию отображений f_g.

Предельной топологией τ на $I^\infty(f)$ естественно считать топологию с базой $\tau_0 \times \tau_\infty$. Также разумно рассмотреть топологию T, для которой базой является $\tau_0 \times T_\infty$.

Теорема 3. *Топология τ мажорирует отделимую локально выпуклую топологию T.*

Схема доказательства. Заметим, что произведение отделимых локально выпуклых топологических пространств снова отделимо и локально выпукло. Утверждение о включении $\tau \supset T$ следует из лемм 2 и 4.

Литература

[1] Новиков Ан.Ан. *L_1-пространства, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана*, Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского **50**, 133–134 (2014).

[2] Новиков Ан.Ан., Тихонов О.Е. *Пространства типа L_1, ассоциированные с положительными операторами*, Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского **46**, 336–337 (2013).

[3] Asimow L., Ellis A.J. *Convexity theory and its applications in functional analysis* (Academic Press, London, 1980).

[4] Novikov An. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra*, Positivity, http://dx.doi.org/10.1007/s11117-016-0422-4 (2016).

[5] Chiţescu I. *Köthe spaces that are Banach algebras with unit*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) **18**(66) (3/4), 269–271 (1976).

[6] Dubinsky E. *Projective and inductive limits of Banach spaces*, Stud. Math. **42**, 259–263 (1972).

[7] Floret K. *On bounded sets in inductive limits of normed spaces*, Proc. of AMS **75** (2), 221–225 (1979).

[8] Valdivia M. *On inductive limits of Banach spaces*, Manuscripta Math. **15**, 153–163 (1975).

[9] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1984).

Ан.Ан. Новиков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: AnANovikov@kpfu.ru

З. Эскандариан

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Zohreh.Eskandarian@gmail.com

An.An. Novikov and Z. Eskandarian

Inductive and projective limits of Banach spaces of measurable functions with order unites with respect to power parameter

Abstract. We prove that a measurable function f is bounded and invertible if and only if there exist at least two equivalent norms by order unit spaces with order units f^α and f^β with $\alpha > \beta > 0$. We show that it is natural to understand the limit of ordered vector spaces with order units f^α (α approaches to infinity) as a direct sum of one inductive and one projective limits. We also obtain some properties for the corresponding limit topologies.

Keywords: inductive limit, projective limit, initial topology, final topology, order unit space, measurable functions, Banach space, Fréchet space, locally convex space.

An.An. Novikov

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: AnANovikov@kpfu.ru

Z. Eskandarian

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Zohreh.Eskandarian@gmail.com