МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМЕНИ ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010100 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Дипломная работа)

Извлечение корней в алгебре вещественных матриц второго порядка

Работа завершена:
«_____» _____________ 2015 г. _____________ Г. А. Маркарян, гр. 05-104

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
«_____» _____________ 2015 г. _____________ А. Н. Абызов

Зав. кафедрой
д. ф-м. н., профессор
«_____» _____________ 2015 г. _____________ М. М. Арсланов

Казань — 2015 год

Содержание

Введение

Дипломная работа посвящена нахождению формул для извлечения корней в алгебре кватернионов и в алгебре матриц второго порядка. В процессе написания дипломной работы были использованы теория базисов Гребнера и теория ассоциативных алгебр малых размерностей.

Поиски гиперкомплексных чисел, приведшие постепенно к возникновению теории алгебр, составляют в основном течение английской математики. Не считая отдельных исследований, непрерывное развитие теории алгебр началось на континенте с конца 70-х годов 19 века. Это был уже второй этап ее развития - период создания структурной теории полупростых алгебр и теории представлений. В 40-е годы в Англии многие математики пытались найти различные системы гиперкомплексных чисел. После этих исследований алгебр малых размерностей заметным шагом вперед была работа Кэли "Мемуар о теории матриц"(1858). В этой работе Кэли не только определяет матрицы и операции сложения матриц. Он строит реализацию тела кватернионов в виде подалгебры компексных матриц второго порядка, установив соответствующий изоморфизм. Кватернионы были открыты У.Р. Гамильтоном. На заседании Ирландской королевской академии 13 ноября 1843 года Гамильтон представил свою первую посвященную кватернионам работу, которая называлась "On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions". Как метко выразился Анри Пуанкаре :"Появление кватернионов дало мощный толчок развитию алгебры, исходя от них, наука пошла по пути обобщения понятия числа, придя к концепциям матрицы и линейного оператора, пронизывающим современную математику. Это была революция в арифметике, подобная той, которую сделал Лобачевский в геометрии".

Первая глава работы носит предварительный характер. В ней изложены основные сведения из теории базисов Гребнера. Также в этой главе вычисляются корни из некоторых кватернионов с помощью методов теории базисов Гребнера. Во второй главе вводятся определения кватернионов, split-кватернионов, дуальных и двойных чисел. Третья глава посвящена извлечению корней в алгебре кватернионов. В этой главе приведены формулы, позволяющие находить корни из любого кватерниона. Четвертая глава посвящена извлечению корней в алгебре матриц второго порядка. В этой главе приводится теорема, позволяющая извлекать корни из любой нескалярной матрицы второго порядка.

1 Извлечение корней в конечномерных алгебрах с помощью базисов Гребнера.

1.1 Мономиальные порядки и их свойства.

Определение 1.1 (лексикографическое упорядочение). *Пусть $a = (a_1, \cdots, a_n), b = (b_1, \cdots, b_n) \in Z^n_{\geq 0}$. Мы говорим,что $a >_{lex} b$,если самая левая ненулевая координата вектора $a - b \in Z^n$ положительна.Мы будем писать $x^a >_{lex} x^b$, если $a >_{lex} b$.*

Вот несколько примеров:
(a) $(4, 2, 0) >_{lex} (3, 3, 4)$, так как $a - b = (1, -1, -4)$.
(b) $(5, 2, 4) >_{lex} (5, 2, 1)$, так как $a - b = (0, 0, 3)$.

Предложение. Лексикографическое упорядочение на $Z^n_{\geq 0}$ является мономиальным упорядочением.

Определение 1.2 (градуированное лексикографическое упорядочение).
Пусть $a, b \in Z^n_{\geq 0}$.Мы говорим,что $a >_{grlex} b$, если
$|a| = \sum_{i=1}^n b_i$ *или* $|a| = |b|$ *и* $a >_{lex} b$.
Таким образом,grlex сначала упорядочивает по степени,а если степени равны,то используется лексикографическое упорядочение.Вот несколько примеров:

- $(1, 2, 4) >_{grlex} (3, 2, 1)$, *так как* $|(1, 2, 3)| = 7 > |(3, 2, 0)| = 6$.
- $(1, 2, 4) >_{grlex} (1, 1, 5)$, *так как* $|(1, 2, 4)| = |(1, 1, 5)|$, *но* $(1, 2, 4) >_{lex} (1, 1, 5)$.
- *Переменные упорядочиваются в соответствии с лексикографическим порядком,т.е.* $x_1 >_{grlex} x_2 \cdots >_{grlex} x_n$.

Определение 1.3 (градуированное обратное лексикографическое упорядочение $grevlex$).
Пусть $a, b \in Z^n_{\geq 0}$.Тогда мы говорим,что $a >_{grevlex} b$, если

$$|a| = \sum_{i=1}^n a_i > |b| = \sum_{i=1}^n b_i$$

или $|a| = |b|$ и самая правая ненулевая координата вектора $a - b \in Z^n$ отрицательна.

Как и $grlex$, $grevlex$ сначала сравнивает степени мономов,но упорядочивает мономы по-другому в случае равенства их степеней.
Например:

- $(4, 7, 1) >_{grevlex} (4, 2, 3)$, так как $|(4, 7, 1)| = 12 > |(4, 2, 3)| = 9$.
- $(1, 5, 2) >_{grevlex} (4, 1, 3)$, так как $|(1, 5, 2)| = |(4, 1, 3)|$ и $a - b = (-3, 4, -1)$.

Определение 1.4. *Пусть $f = \sum_a p_a x^a$ - ненулевой полином в $k[x_1, \cdots, x_n]$, и пусть $>$-мономиальное упорядочение.*

1. *Мультистепень полинома f определяется так:*

$$multideg(f) = max(a \in Z^n_{\geq 0} : p_a \neq 0)$$

(максимум берется по отношению к $>$).

2. *Старший коэффициент полинома f-это*

$$LC(f) = p_{multideg}(f) \in k.$$

3. *Старший моном полинома f-это*

$$LM(f) = x^{multideg}(f)$$

(с коэффициентом 1).

4. *Старший член полинома f- это*

$$LT(f) = LC(f)\dot{L}M(f).$$

Лемма 1. *Пусть $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ - ненулевые полиномы.Тогда*

1. $multideg(fg) = multideg(f) + multideg(g)$.

2. *Если $f + g \neq 0$,то $multideg(f + g) <= max(multideg(f), multideg(g))$. Если,кроме того, $multideg(f) \neq multideg(g)$,то указанное неравенство становится равенством.*

1.2 Алгоритм деления в $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Теорема 2 (алгоритм деления в $k[x_1, \ldots, x_n]$). *Зафиксируем некоторое мономиальное упорядочение $>$ на $Z^n_{\geq 0}$,и пусть $F = (f_1, \ldots, f_s)$- упорядоченный s-набор полиномов из $k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда любой полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ может быть записан в виде*

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r,$$

где $a_i, r \in k[x_1, \ldots, x_s]$ и $r = 0$ есть линейная комбинация мономов(с коэффициентами из k),ни один из которых не делится ни на один из старших членов $LT(f_1), \ldots, LT(f_s)$.Мы называем r остатком от деления полинома f на F. Более того,если $a_i f_i \neq 0$,то

$$multideg(f) \geq multideg(a_i f_i).$$

1.3 Мономиальные идеалы и лемма Диксона.

Определение 1.5. *Идеал* $I \in k[x_1, \dots, x_n]$ *называется мономиальным,если существует подмножество* $A \in Z^n_{\geq 0}$ *(которое может быть бесконечным), такое ,что* I *состоит из всех конечных сумм вида* $\sum_{a \in A} h_a x^a$ *где* $h_a \in k[x_1, \dots, x_n]$*.Такой идеал* I *будет обозначаться через* $< x^a : a \in A >$.

Лемма 3. *Пусть* $I =< x^a : a \in A >$*-мономиальный идеал.Тогда моном* x^b *принадлежит* I *в том и только том случае,когда* x^b *делится на некоторый моном* $x^a, a \in A$.

Лемма 4. *Пусть* I *- некоторый мономиальный идеал,а* $f \in k[x_1, \dots, x_n]$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $f \in I$;
2. *каждый член полинома* f *принадлежит* I;
3. f *является* k*-линейной комбинацией мономов из* I.

Теорема 5 (лемма Диксона)**.** *Любой мономиальный идеал* $I =< x^a : a \in A >\subset k[x_1, \dots, x_n]$ *может быть представлен в виде* $I =< x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)} >$*, где* $a(1), \dots, a(s) \in A$*. В частности,* I *имеет конечный базис.*

1.4 Теорема Гильберта о базисе и базисы Грёбнера

Определение 1.6. *Пусть* $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ *- ненулевой идеал.*

1. *Обозначим через* $LT(I)$ *множество старших членов элементов из* I*,т.е.*

$$LT(I) = cx^a : \text{существует } f \in I \text{и } LT(f) = cx^a.$$

2. *Обозначим через* $< LT(I) >$ *идеал,порожденный элементами из* $LT(I)$.

Предложение. Пусть $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ - некоторый идеал.Тогда:

1. $< LT(I) >$ - мономиальный идеал;
2. существуют полиномы $g_1, \dots, g_s \in I$, такие,что
   $< LT(I) >=< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >$.

Теорема 6 (теорема Гильберта о базисе)**.** *Каждый идеал* $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ *является конечно порожденным, т.е.* $I =< g_1, \dots, g_s >$*, где* $g_1, \dots, g_s \in I$.

Определение 1.7. *Пусть задано мономиальное упорядочение.Конечное подмножество* $G = g_1, \dots, g_s$ *элементов идеала* I *называется его базисом Грёбнера (или стандартным базисом), если*

$$< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >=< LT(I) > .$$

Или можно переформулировать так: множество $g_1, \dots, g_s \in I$ называется базисом Грёбнера идеала I в том и только том случае,когда старший член любого элемента из I делится на хотя бы один старший член $LT(g_i)$

Следствие. Пусть задано некоторое мономиальное упорядочение.Тогда любой ненулевой идеал $I \in k[x_1, \dots, x_n]$ обладает базисом Грёбнера.Более того,базис Грёбнера идеала I является его базисом.

Определение 1.8. *Возрастющей цепью идеалов называется последовательность:*

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$$

Например,последовательность:

$$< x_1 >\subset< x_1, x_2 >\subset \dots \subset< x_1, \dots, x_n >$$

образует конечную возрастающую цепь идеалов.

Возрастающая цепь "стабилизируется"после конечного числа шагов в том смысле,что,начиная с некоторого момента,все идеалы в цепи одинаковы.

Теорема 7 (условие обрыва возрастающих цепей)**.** *Пусть*

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$$

- возрастающая цепь идеалов в $k[x_1, \dots, x_n]$. Тогда существует $N \geq 1$,такое,что

$$I_n = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots .$$

Определение 1.9. *Пусть $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ - некоторый идеал.Положим*

$$V(I) = (a_1, \dots, a_n) \subset k^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \textit{для всех} f \in I$$

Предложение. $V(I)$ является аффинным многообразием.В частности, если $I =< f_1, \dots, f_s >$,то $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.

1.5 Свойства базисов Грёбнера.

Предложение. Пусть $G = g_1, \dots, g_s$- базис Грёбнера идеала $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, и пусть $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Тогда существует единственный полином $r \in k[x_1, \dots, x_n]$, который обладает следующими двумя свойствами:

1. ни один член полинома r не делится ни на один из старших членов $LT(g_1), \dots, LT(g_s)$;

2. существует $g \in I$ такой,что $f = g + r$.

То есть r является остатком от деления f на g, не зависящим от порядка делителей в G.

Остаток r называется нормальной формой полинома f.

Следствие. Пусть $G = g_1, \dots, g_s$ - базис Грёбнера идеала $I \in k[x_1, \dots, x_n]$, и пусть $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Тогда $f \in I$ в том и только том случае,когда остаток от деления полинома f на G равен нулю.

Определение 1.10. *Остаток от деления полинома f на упорядоченный $s-$набор $F = (f_1, \dots, f_s)$ будет обозначаться $\overline{f}^F$. Если F является базисом Грёбнера идеала $< f_1, \dots, f_s >$, то предложению 1 его можно рассматривать как (неупорядоченное) множество.*

Пусть,например,$F = (x^2y - y^2, x^4y^2 - y^2) \subset k[x, y]$ и используется lex-упорядочение.Тогда

$$\overline{x^5y}^F = xy^3,$$

потому что применение алгоритма деления дает:

$$x^5y = (x^3 + xy)(x^2y - y^2) + 0 \cdot (x^4y^2 - y^2) + xy^3.$$

Определение 1.11. *Пусть $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ - ненулевые полиномы.*

1. *Пусть $multideg(f) = a$и$multideg(g) = b$. Положим $c = (c_1, \cdots, c_n), c_i = max(a_i, b_i)$ для любого i.Тогда x^c называется наименьшим общим кратным мономов $LM(f)$ и $LM(g)$.Используется обозначение $x^c = LCM(LM(f), LM(g))$.*

2. *$S-$полиномом от f и g называется комбинация*

$$S(f, g) = \frac{x^c}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^c}{LT(g)} \cdot g.$$

(Заметим,что в знаменателе стоят не мономы,а старшие члены.)

Пусть,например,$f = x^3y^2 - x^2y^3 + x, g = 3x^4y + y^2, f, g \in R[x, y]$, и используется $grlex-$упорядочение.Тогда $c = (4, 2)$ и

$$S(f, g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g = x \cdot f - (1/3) \cdot y \cdot g = -x^3y^3 + x^2 - (1/3)y^3.$$

Лемма 8. *Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^s c_i f_i$,где $multideg(f_i) = \delta \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$, а$c_i \in k$для всех$i$. Если $multideg(\sum_{i=1}^s c_i f_i) < \delta$, то $\sum_{i=1}^s c_i f_i$ является линейной комбинацией с коэффициентами в k $S-$полиномов $S(f_j, f_l), 1 \leq j, l \leq s$.Более того,мультистепень каждого $S(f_j, f_l)$меньшеδ.*

Теорема 9. *Пусть I- некоторый полиномиальный идеал.Тогда базис $G = g_1, \cdots, g_s$ идеала I является бизисом Грёбнера в том и только том случае,когда для всех пар $i \neq j$ остаток от деления $S(g_i, g_j)$ на G (в любом порядке) равен нулю.*

Алгоритм Бухбергера. В следствии показано,что каждый ненулевой идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$ имеет базис Грёбнера.В этом параграфе будет решаться следующая задача: как построить базис Грёбнера заданного идеала $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$? В общем случае можно построить базис Грёбнера,расширяя какой-нибудь базис F путем последовательного добавления ненулевых остатков $\overline{S(f_i, f_j)}^F$ к F.Эта идея естественно вытекает из критерия $S(f_i, f_j)$пар,и алгоритм Бухбергера является реализацией этой идеи.

Предложение. Пусть $I \neq 0$ - полиномиальный идеал,и пусть задано некоторое мономиальное упорядочение.Тогда существует единственный редуцированный базис Грёбнера идеал I.

Теперь у нас есть алгоритм проверки равенства идеалов.Пусть нам даны два множества $f_1, \ldots, f_s$ и $g_1, \ldots, g_t$. Как выяснить,порождают они разные идеалы или один и тот же? Ответ: задайте мономиальное упорядочение и вычислите редуцированные базисы Грёбнера для $< f_1, \ldots, f_s >$ и $< g_1, \ldots, g_t >$.Идеалы совпадают в том и только в том случае,когда совпадают редуцированные базисы.

1.6 Системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть дана система полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ...... \\ f_s(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

с коэффициентами из поля K. Как узнать, имеет ли она решения хотя бы в некотором расширении поля K? Как найти решения, если их конечное число? Воспользуемся тем, что если $I =< f_1, ..., f_s >=< g_1, ..., g_t >$, то данная система равносильна системе

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ...... \\ g_t(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

над любым расширением поля K.

Теорема 10 (критерий совместности)**.** *Система полиномиальных уравнений (1) над полем K не имеет решений в алгебраическом замыкании L поля K, если и только если некоторый (равносильно, любой) базис Гребнера для идеала $I =< f_1, ..., f_s >$ в $K[x_1, ..., x_n]$ содержит ненулевое элемент из K.*

Доказательство.

Если наша система несовместна, то ввиду теоремы Гильберта о корнях в слабой форме идеал I содержит единицу, а его базис Гребнера, как следует из определения, обязан включать ненулевое число. Обратное утверждение следует из равносильности исходной системы и системы уравнений, связанной с базисом-делителем. Последняя несовместна, поскольку она содержит равенство c = 0 для ненулевого числа c.

Следствие. Существует алгоритм, определяющий несовместность системы полиномиальных уравнений в алгебраически замкнутом поле. Достаточно с помощью алгоритма Бухбергера переработать левые части уравнений в базис Гребнера.

Определение 1.12. *Система полиномиальных уравнений над полем K называется треугольной, если число уравнений равно числу переменных и многочлен f_i для любого $i = 1, 2, ..., n$ имеет вид :*

$$a_i x_i^k + \varphi_i(x_1, ..., x_n)$$

где $a_i \in K$; $a_i \neq 0$; $k_i > 0$; φ_i — многочлен над K от переменных $x_i, ..., x_n$, причем показатели при переменной x_i в многочлене φ_i меньше, чем k_i. В этом случае систему многочленов $f_1, ..., f_n$ будем также называть треугольной. Треугольная система полиномиальных уравнений имеет конечное число решений. Действительно, последнее уравнение связывает только переменную x_n и потому имеет конечное число решений. Если каждое из этих решений подставить в предпоследнее уравнение, связывающее $x_{n-1}x_n$, то задача сводится к отысканию корней многочленов от x_{n-1}, и так далее.

Теорема 11. *(о конечности числа решений) Система полиномиальных уравнений $f_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., f_s(x_1, ..., x_n) = 0$ над полем K имеет конечное число решений в алгебраическом замыкании L поля K тогда и только тогда, когда система уравнений $g_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., g_t(x_1, ..., x_n) = 0$, связанная с базисом Гребнера идеала $I =< f_1, ..., f_s >$ в $K[X]$ относительно словарного порядка $x_1 > x_2 > ... > x_n$ содержит треугольную подсистему.*

Теорема 12. *Фактор-алгебра $K[X]/I$ алгебры многочленов $K[X]$ по идеалу I конечномерна над K тогда и только тогда, когда базис Гребнера идеала I относительно лексикографического порядка содержит треугольную систему многочленов.*

1.7 Примеры извлечения корней в алгебре кватернионов и в алгебре матриц второго порядка.

Пример №1 : Вычислить в алгебре кватернионов корень третьей степени из единицы .

Из равенства $(a + bi + cj + dk)^3 = 1$ следует :

$F = [-2ab^2 - 2ac^2 - 2ad^2 + a(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) - 1, 2a^2b + b(a^2 - b^2 - c^2 - d^2), 2a^2c + c(a^2 - b^2 - c^2 - d^2), 2a^2d + d(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b > c > d > a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G = [8a^6 - 7a^3 - 1, 8a^3d + d, 8a^3c + c, 8a^3b + b, 8a^5 - 8a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2]$.

Из первого уравнения найдем а .Рассмотрим два случая :

1)если $a = 1$,то $b = c = d = 0$;

2)если $a = -1/2$;

В семействе уравнений F полагаем $a = -1/2$ и находим базис Гребнера полученного семейства:

$b^2 + c^2 + d^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Таким образом, b,c,d связаны соотношением $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример №2 : Вычислить в алгебре кватернионов корень четвертой степени из единицы .

Из равенства $(a + bi + cj + dk)^4 = 1$ следует :

$F = [a^4 - 6a^2(b^2 + c^2 + d^2) + (b^2 + c^2 + d^2)^2 - 1, -4ab(-a^2 + b^2 + c^2 + d^2), -4ac(-a^2 + b^2 + c^2 + d^2), -4ad(-a^2 + b^2 + c^2 + d^2)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b > c > d > a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G = [4a^9 - 3a^5 - a, 4a^5d + ad, 4a^5c + ac, 4a^5b + ab, 4a^7 - 4a^3 + 5ab^2 + 5ac^2 + 5ad^2, 24a^8 - 19a^4 + 5b^4 + 10b^2c^2 + 10b^2d^2 + 5c^4 + 10c^2d^2 + 5d^4 - 5]$.

Из первого уравнения найдем а .Рассмотрим три случая :

1)если $a = 1$,то $b = c = d = 0$;

2)если $a = -1$,то $b = c = d = 0$;

3)если $a = 0$,то b,c,d связаны соотношением : $(b^2 + c^2 + d^2)^{1/2} = 1$;

Пример №3 : Вычислить в алгебре кватернионов корень пятой степени из единицы .

Из равенства $(a + bi + cj + dk)^5 = 1$ следует :

$F = [a(a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 5(b^2 + c^2 + d^2)^2) - 1, b(5a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + (b^2 + c^2 + d^2)^2), c(5a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + (b^2 + c^2 + d^2)^2), d(5a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + (b^2 + c^2 + d^2)^2)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b > c > d > a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G = [1024a^{15} - 672a^{10} - 353a^5 + 1, 1024a^{10}d + 352a^5d - d, 1024a^{10}c + 352a^5c - c, 1024a^{10}b + 352a^5b - b, 7168a^{12} - 4576a^7 - 2592a^2 + 275b^2 + 275c^2 + 275d^2]$.

Из первого уравнения найдем а .Рассмотрим три случая :

1)если $a = 1$,то $b = c = d = 0$;

2)если $a \approx 0.3$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2 + c^2 + d^2 = 0.904508$;

3)если $a \approx -0.8$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2 + c^2 + d^2 = 0.587$;

Пример №4 : Вычислить в алгебре кватернионов корень шестой степени из единицы .

Из равенства $(a + bi + cj + dk)^6 = 1$ следует :

$F = [a^6 - 15a^4(b^2 + c^2 + d^2) + 15a^2(b^2 + c^2 + d^2)^2 - (b^2 + c^2 + d^2)^3 - 1, 2ab(3a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 3(b^2 + c^2 + d^2)^2), 2ac(3a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 3(b^2 + c^2 + d^2)^2), 2ad(3a^4 - 10a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 3(b^2 + c^2 + d^2)^2)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b > c > d > a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G = [4096a^{19} - 2432a^{13} - 1691a^7 + 27a, 4096a^{13}d + 1664a^7d - 27ad, 4096a^{13}c + 1664a^7c - 27ac, 4096a^{13}b + 1664a^7b - 27ab, 12288a^{15} - 6656a^9 - 5632a^3 + 1911ab^2 + 1911ac^2 + 1911ad^2, 409600a^{18} - 241280a^{12} - 170231a^6 + 1911b^6 + 5733b^4c^2 + 5733b^4d^2 + 5733b^2c^4 + 11466b^2c^2d^2 + 5733b^2d^4 + 1911c^6 + 5733c^4d^2 + 5733c^2d^4 + 1911d^6 + 1911]$.

Из первого уравнения найдем а .Рассмотрим пять случаев :

1)если $a = 1$,то $b = c = d = 0$;

2)если $a = 1/2$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3)если $a = -1/2$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4)если $a = -1$,то $b = c = d = 0$

Пример №5 : Вычислить в алгебре кватернионов корень седьмой степени из единицы .

Из равенства $(a+bi+cj+dk)^7=1$ следует :

$F=[a(a^6-21a^4(b^2+c^2+d^2)+35a^2(b^2+c^2+d^2)^2-7(b^2+c^2+d^2)^3)-1, -b(-7a^6+35a^4(b^2+c^2+d^2)-21a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3), -c(-7a^6+35a^4(b^2+c^2+d^2)-21a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3), -d(-7a^6+35*a^4(b^2+c^2+d^2)-21a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b>c>d>a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G=[2097152a^{28}-1163264a^{21}-970880a^{14}+36991a^7+1, 2097152a^{21}d+933888a^{14}d-36992a^7d-d, 2097152a^{21}c+933888a^{14}c-36992a^7c-c, 2097152a^{21}b+933888a^{14}b-36992a^7b-b, -427819008a^{23}+238534656a^{16}+197489408a^9-8205056a^2+427721b^2+427721c^2+427721d^2]$.

Из первого уравнения найдем a .Рассмотрим четыре случая :

1)если $a=1$,то $b=c=d=0$;

2)если $a=0.6234$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=0.7818$;

1)если $a=-0.222$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=0.975$;

1)если $a=-0.9$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=0.434$;

Пример №6 : Вычислить в алгебре кватернионов корень восьмой степени из единицы .

Из равенства $(a+bi+cj+dk)^8=1$ следует :

$F=[a^8-28a^6(b^2+c^2+d^2)+70a^4(b^2+c^2+d^2)^2-28a^2(b^2+c^2+d^2)^3+(b^2+c^2+d^2)^4-1, -8ab(-a^6+7a^4(b^2+c^2+d^2)-7a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3), -8ac(-a^6+7a^4(b^2+c^2+d^2)-7a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3), -8ad(-a^6+7a^4(b^2+c^2+d^2)-7a^2(b^2+c^2+d^2)^2+(b^2+c^2+d^2)^3)]$

Решим эту систему алгебраических уравнений.

Найдем базис Гребнера уравнений , входящих в эту систему относительно лексикографического порядка $b>c>d>a$ и в результате получим систему уравнений , которая эквивалентна системе выписанной выше.

$G=[65536a^{33}-34816a^{25}-32880a^{17}+2159a^9+a, 65536a^{25}d+30720a^{17}d-2160a^9d-ad, 65536a^{25}c+30720a^{17}c-2160a^9c-ac, 65536a^{25}b+30720a^{17}b-2160a^9b-ab, -13697024a^{27}+7434240a^{19}+6808080a^{11}-54529a^3+94095ab^2+94095ac^2+94095ad^2, -9414508544a^{32}+5003120640a^{24}+4722469920a^{16}-310987921a^8+94095b^8+376380b^6c^2+376380b^6d^2+564570b^4c^4+1129140b^4c^2d^2+564570b^4d^4+376380b^2c^6+1129140b^2c^4d^2+1129140b^2c^2d^4+376380b^2d^6+94095c^8+376380c^6d^2+564570c^4d^4+376380c^2d^6+94095d^8-94095]$.

Из первого уравнения найдем a .Рассмотрим пять случаев :

1)если $a=0$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=1$;

2)если $a=1$,то $b=c=d=0$;

3)если $a=-1$,то $b=c=d=0$;

4)если $a=(1/2)\sqrt{2}$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5)если $a=-(1/2)\sqrt{2}$,то b,c,d связаны соотношением : $b^2+c^2+d^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример №7 : Найдем все вещественные матрицы , удовлетворяющие уравнению

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ради удобства в вычислении в алгебре $\mathbf{M_2}(\mathbf{R})$ выберем новый базис согласно следующему правилу:

$a = x + z$

$b = -y + u$

$c = y + u$

$d = x - z$

Тогда старые и новые координаты связаны следующим соотношением :

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & j & k \end{pmatrix}$$

$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

В соотношении (1) вместо a,b,c,d подставим их выражения через x,y,z,u.Для этих соотношений найдем базис Гребнера и из первого уравнения $1 - 353x^5 - 672x^{10} + 1024x^{15} = 0$ найдем вещественные значения x.Рассмотрим три случая:

1)$x = 1$.Тогда $y = 0, z = 0, u = 0$. И получается , что $a = 1, b = c = 0, d = 1$ и выполняется тривиальное соотношение :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2)$x = \frac{1}{4}(-176+80\sqrt{5})^{1/5}$.Тогда y,z,u связаны соотношением:$8z^2+5-8y^2+8u^2-\sqrt{5} = 0$ или $z^2 - y^2 + u^2 = \frac{\sqrt{5}-5}{8}$;

3)$x = -\frac{1}{4}(176 + 80\sqrt{5})^{1/5}$. Тогда y,z,u связаны соотношением : $z^2 - y^2 + u^2 = \frac{\sqrt{5}-5}{8}$;

Пример №8 : Извлечем корень второй степени из кватерниона $1+i+j+k$.

$$1 + i + j + k = (a + bi + cj + dk)^2$$

После небольших вычислений находим значения a,b,c,d:

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{1}{\sqrt{6}}, c = -\frac{1}{\sqrt{6}}, d = -\frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{\sqrt{6}}, d = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Пример №9 : Извлечем корень третьей степени из кватерниона $1+i+j+k$.
После возведения в степень кватерниона

$$(a + bi + cj + dk)^3 = 1 + i + j + k$$

получим систему 4 уравнений , которую решим с помощью базиса Гребнера.
$G := [64a^9 - 48a^6 - 96a^3 - 1, 64a^7 - 56a^4 - 89a + 27c, 64a^7 - 56a^4 - 89a + 27b, 64a^7 - 56a^4 - 89a + 27d]$

Из первого уравнения $64a^9 - 48a^6 - 96a^3 - 1$ находим значения a :1)0.9651555190, 2)0.2187829943,3) 1.183938513.

Таким образом , рассмотрим три решения:

1. При $a = 0.9651555190$ $b = c = d = 0.4675738344$
2. При $a = 0.2187829943$ $b = c = d = 0.7163646774$
3. При $a = 1.183938513$ $b = c = d = 0.2487908510$

Пример №10 : Извлечем корень четвертой степени из кватерниона $1 + i + j + k$.

После возведения в степень кватерниона

$$(a + bi + cj + dk)^4 = 1 + i + j + k$$

получим систему 4 уравнений , которую решим с помощью базиса Гребнера.
$G := [4096a^{16} - 2048a^{12} - 8320a^8 - 928a^4 + 9, -7680a^{13} + 4160a^9 + 15288a^5 + 1207a + 624c, -7680a^{13} + 4160a^9 + 15288a^5 + 1207a + 624b, -7680a^{13} + 4160a^9 + 15288a^5 + 1207a + 624d]$

Из первого уравнения $4096a^{16} - 2048a^{12} - 8320a^8 - 928a^4 + 9$ находим значения a : 1)-1.148685865, 2)-0.3077894499, 3) 0.3077894499, 4) 1.148685865.

Таким образом , рассмотрим четыре решения:

1. При $a = -1.148685865$,$b = c = d = -0.1777022979$
2. При $a = -0.3077894499$,$b = c = d = 0.6631940934$
3. При $a = 0.3077894499$,$b = c = d = -0.6631940934$
4. При $a = 1.148685865$,$b = c = d = 0.1777022979$

2 Конечномерные алгебры.

2.1 Ассоциативные конечномерные алгебры.

Определение 2.1. *Алгеброй двойных чисел называется двухмерная алгебра,в которой существует базис 1, e ,элементы которого перемножаются с помощью следующего правила :* $e^2 = 1$.

Алгебру двойных чисел будем обозначать:$\mathbf{C}'$.

Определение 2.2. *Алгеброй дуальных чисел называется двухмерная алгебра,в которой существует базис 1,* ε *,элементы которого перемножаются с помощью следующего правила :* $\varepsilon^2 = 0$.

Алгебру дуальных чисел будем обозначать:$\mathbf{D}$.

Теорема 13. *Имеет место изоморфизм:*
$\mathbf{C}' \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$*,где* $a, b \in \mathbf{R}$.

`Доказательство.`
Изоморфизм осуществляется согласно следующему правилу:

$$a + be \to (a + b, a - b);$$

$$(a, b) \to (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}).$$

Таким образом получается , что :

$$\overline{1} \leftrightarrow (1, 1); \overline{e} \leftrightarrow (1, -1).$$

Причем $\overline{e}^2 = (1, 1) = \overline{1}$

Теорема 14 (об извлечении корней.)**.** *В силу изоморфизма* $a + be \to (a + b, a - b)$ *выражение* $\sqrt[n]{a + be}$ *имеет следующие случаи :*

1. *не имеет корней, когда* $a + b < 0$*, либо* $a - b < 0$ *при четном n;*
2. *имеет ровно 2 корня, когда* $a + b > 0, a - b = 0$ *при четном n;*
3. *имеет ровно 4 корня, когда* $a + b > 0, a - b > 0$ *при четном n;*
4. *имеет ровно 1 корень при нечетном n.*

Примеры.
1) $3 + 2e \leftrightarrow (5, 1)$;

$$\sqrt[4]{3 + 2e} = \sqrt[4]{(5, 1)} = \frac{\sqrt[4]{5} + 1}{2} + e\frac{\sqrt[4]{5} - 1}{2};$$

2)$\sqrt{3 + e} = \sqrt{(4, 2)} = (\pm 2, \pm\sqrt{2})$.
Произведем проверку : $(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} + e\frac{2\mp\sqrt{2}}{2})^2 = 3 + e$;
Примеры алгебр.

1. Алгебра $\mathbf{R[x]}/ < \mathbf{x^2+1} >$ изоморфна алгебре комплексных чисел $\mathbf{C}$, так как имеет базис $\bar{1}, \bar{x}; \bar{x}^2 = i^2 = \bar{-1}$. То есть элементы данной алгебры перемножаются по тем же самым законам что и элементы из алгебры комплексных чисел .Эта алгебра также изоморфна алгебре матриц вида : $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

2. Алгебра $\mathbf{R[x]}/ < \mathbf{x^2-1} >$ изоморфна алгебре двойных чисел , так как имеет базис $\bar{1}, \bar{x}; \bar{x}^2 = e^2 = \bar{1}$. То есть элементы данной алгебры перемножаются по тем же самым законам что и элементы из алгебры двойных чисел .Эта алгебра также изоморфна алгебре матриц вида : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

3. Алгебра $\mathbf{R[x]}/ < \mathbf{x^2} >$ изоморфна алгебре дуальных чисел $\mathbf{D}$, так как имеет базис $\bar{1}, \bar{x}; \bar{x}^2 = \varepsilon^2 = \bar{0}$. То есть элементы данной алгебры перемножаются по тем же самым законам что и элементы из алгебры дуальных чисел .Эта алгебра также изоморфна алгебре матриц вида : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

2.2 Кватернионы.

Определение 2.3. *Алгеброй кватернионов над полем P называется четырехмерная алгебра над полем P,в которой существует базис 1, i, j, k ,элементы которого перемножаются с помощью следующего правила : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.*

Таким образом, таблица умножения базисных кватернионов — 1, i, j, k — выглядит так:

$\times$	**1**	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

«Таблицу умножения» иллюстрирует рис. 1, на котором кватернионы i,j,k изображены тремя точками окружности, расположенными по направлению движения часовой стрелки. Произведение любых двух чисел из тройки i,j,k равно третьему, если движение от первого множителя ко второму происходит по часовой стрелке, и равно третьему со знаком минус, если движение происходит против часовой стрелки. Переместительное свойство умножения здесь не выполняется: произведение зависит от порядка сомножителей.

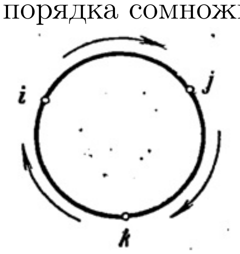

Рис. 1.

Умножение произвольных кватернионов производится с помощью приведенной выше таблицы и с учетом требований известного правила сложения. Пусть

$q = a + bi + cj + dk,$

$q' = a' + b'i + c'j + d'k.$

По правилу умножения суммы на сумму , имеем

$qq' = aa' + a(b'i) + a(c'j) + a(d'k) + (bi)a' + (bi)(b'i) + (bi)(c'j) + +(bi)(d'k) + (cj)a' + (cj)(b'i) + (cj)(c'j) + (cj)(d'k) + (dk)a' + (dk)(b'i) + (dk)(c'j) + (dk)(d'k).$

Мы получили сумму 16 слагаемых. Преобразуя каждое из них с помощью таблицы умножения (например, $(bi)(c'j) = bc'(ij) = bc'k$), приходим к результату:

$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + +(ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k.$

Для умножения кватернионов выполняется сочетательный закон:

$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3).$

Сопряжение кватернионов.

По аналогии с комплексными числами введем такое определение. Пусть дан кватернион

$q = a + bi + cj + dk.$

Сопряженным ему называется кватернион

$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$

Очевидно, что сумма $q+\overline{q}$ есть число действительное. Но и произведение q q̄ также является действительным числом, что сразу же следует из формулы для умножения:

$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

Продолжая аналогию с комплексными числами, назовем число

$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$

модулем кватерниона q и условимся обозначать его |q|. Тогда последнее равенство перепишется так:

$q\overline{q} = |q|^2$ — в точности та же формула, что для комплексных чисел.

Если q' есть «чисто мнимый» кватернион, $q' = bi+cj+dk$, то $q'^2 = -(b^2+c^2+d^2) \leqslant 0$.

Обратно, если квадрат некоторого кватерниона есть действительное число, меньшее или равное нулю, то этот кватернион — чисто мнимый. Таким образом, кватернионы $bi + cj + dk$, и только они, могут быть охарактеризованы условием, что их квадраты представляют собой действительные числа $\leqslant 0$. Учитывая это, можно дать другое описание операции сопряжения: для произвольного кватерниона q берется его единственное представление в виде $a+q'$ где q' — кватернион, квадрат которого есть действительное число $\leqslant 0$, тогда $\overline{q} = a - q'$. Непосредственная проверка показывает, что операция сопряжения обладает такими свойствами:

$(\overline{q_1 + q_2}) = (\overline{q_1}) + (\overline{q_2})$

(сопряженное к сумме равно сумме сопряженных) и

$(\overline{q_1q_2}) = (\overline{q_2})(\overline{q_1})$

(сопряженное к произведению равно произведению сопряженных, взятых в обратном порядке).

Такие же равенства справедливы и в случае комплексных чисел; нужно только иметь в виду, что для комплексных чисел вместо $\overline{(z_2z_1)}$ можно писать $(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$ (ибо произведение не зависит от порядка сомножителей), в то время как для кватернионов $\overline{(q_2)(q_1)}$ не равно $\overline{(q_1)(q_2)}$.

Выполнимость деления в системе кватернионов.

Для комплексных чисел частным от деления $z_1 z_2$ называется решение уравнения $z_2 x = z_1$. Но для кватернионов произведение зависит от порядка сомножителей, поэтому вместо одного уравнения нужно рассматривать два:

$q_2 x = q_1$ (1) и $x q_2 = q_1$. (2)

Соответственно этому , решение первого уравнения будем называть левым частным от деления $q_1 q_2$ и обозначать x_l, а решение второго — правым частным x_p (в случае комплексных чисел, оба частных, очевидно, совпадают).

Чтобы решить уравнения (1) и (2), применим тот же самый прием, что и в случае комплексных чисел. Умножим обе части уравнения (1) слева сначала на $\overline{(q_2)}$ а затем на $1/|q_2|^2$. Получим

$x = 1/|q_2|^2 (q_2)\overline{q}_1$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (1) убеждаемся, что это выражение действительно является решением. Таким образом,

$x_l = 1/|q_2|^2 (q_2)\overline{q_1}$.

Аналогично находится x_p:

$x_p = 1/|q_2|^2 q_1 \overline{(q_2)}$.

Итак, мы установили два наиболее важных свойства системы кватернионов:

1) для умножения кватернионов справедлив сочетательный закон;

2) кватернионы — четырехмерная алгебра с делением.

Модуль произведения.

Еще одно важное свойство кватернионов состоит в том, что модуль произведения равен произведению модулей. Доказательство в точности такое же, как и в случае комплексных чисел; в нем используется формула $\overline{(q_1 q_2)} = \overline{(q_2)(q_1)}$ и свойство сочетательности для умножения кватернионов. Вот это доказательство:

$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)\overline{(q_1 q_2)} = (q_1 q_2)(\overline{(q_2)}\overline{(q_1)}) = q_1(q_2\overline{(q_2)})\overline{(q_1)} = |q_1|^2 |q_2|^2$.

Лемма 15. *Пусть q чисто мнимый кватернион. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $q^2 = -1$
2. $q\overline{q} = 1$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2 : q^2 = -1 \Rightarrow \bar{q}^2 = -1 \Rightarrow (q\bar{q})^2 = 1 \Rightarrow (q\bar{q}) = 1$

$2 \Rightarrow 1 : (q\bar{q}) = 1 \Rightarrow -q^2 = 1 \Rightarrow q^2 = -1$

Кватернионы можно представить в тригонометрической форме записи.

Имеем равенство $q = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k = |q|(\alpha_0' + \alpha_1' i + \alpha_2' j + \alpha_3' k)$.

Пусть $\alpha_0' + \alpha_1' i + \alpha_2' j + \alpha_3' k = v$.

Тогда $q = |q|(\alpha_0' + (\frac{v}{|v|})|v|) = |q|(\alpha_0' + (\bar{i})|v|) = |q|(\cos[\alpha] + \bar{i}\sin[\alpha]); \bar{i}^2 = -1, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

Теорема 16. *Имеет место изоморфизм:*

$\mathbf{H} \approx \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, *где* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

Доказательство.

В $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$ выберем базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \overline{i}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \overline{j}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \overline{k}$$

Нетрудно заметить , что базисные элементы $\overline{1}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ перемножаются по тем же законам , что и $1, i, j, k$.Таким образом , изоморфизм доказан.

Примеры:

1. $1 + i + j = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j)) = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j)) = \sqrt{3}(\cos(\alpha) + \overline{i}\sin(\alpha)); \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. $1 + i + j + k = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k)) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k)) = 2(\cos(\alpha) + \overline{i}\sin(\alpha)); \cos(\alpha) = \frac{1}{2}, \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $1+i+2j+3k = \sqrt{15}(\frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}(i+2j+3k)) = \sqrt{15}(\frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}(\frac{1}{\sqrt{14}}i + \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{3}{\sqrt{14}}k)) = \sqrt{15}(\cos(\alpha) + \overline{i}\sin(\alpha)); \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{15}}, \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$

2.3 Split-кватернионы.

Определение 2.4. *Алгеброй split-кватернионов над полем P называется четырехмерная алгебра над полем P, в которой существует базис 1, i, j, k ,элементы которого перемножаются с помощью следующего правила :*

$i^2 = -1; j^2 = 1; k^2 = 1$

$ij = -ji; ki = -ik; jk = -kj$

$jk = -i; kj = i; ij = k; ki = j.$

Алгеброй split-кватернионов будем обозначать через $\mathbf{H'}$. Алгебру split-кватернионов можно построить с помощью алгебры двойных чисел.

Лемма 17. *Пусть q чисто мнимый split-кватернион.Тогда имеют место следующие утверждения :*

1. $q^2 = -1 \Leftrightarrow q\overline{q} = 1$

2. $q^2 = 1 \Leftrightarrow q\overline{q} = -1$

3. $q^2 = 0 \Leftrightarrow q\overline{q} = 0$

Теорема 18. *Имеет место изоморфизм:*

$\mathbf{H'} \cong \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$,*где* $z_1, z_2 \in \mathbf{C'}$

Доказательство.

В $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$ выберем базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \overline{i}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} = \overline{j}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} = \overline{k}$$

Нетрудно заметить , что базисные элементы $\overline{1}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ перемножаются по тем же законам , что и $1, i, j, k$.Таким образом , изоморфизм доказан.

Теорема 19. *Имеет место изоморфизм:*

$\mathbf{H'} \cong \mathbf{M_2(R)}$

Доказательство.

Изоморфизм осуществляется согласно следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}i + \frac{b+c}{2}j + \frac{a-d}{2}k$$

Таким образом , получаем :

$$e_{11} = \frac{1+k}{2};$$

$$e_{12} = \frac{i+j}{2};$$

$$e_{21} = \frac{j-i}{2};$$

$$e_{22} = \frac{1-k}{2};$$

Получаем соотношение :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Так как $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22}$, то

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Таким образом , изоморфизм доказан.

3 Извлечение корней в алгебре кватернионов

Теорема 20 (Об извлечении корней n-ой степени в алгебре кватернионов.)**.** *Следующие утверждения являются истинными:*

1. *Если* $q \in H / R$, *то* $|\sqrt[n]{q}| = n$
2. *Если* α *-любое вещественное число , а* n *- нечетное натуральное число , то* $\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{1}$
3. *Если* α *- вещественное , ненулевое число строго меньшее нуля , а* n *- четное натуральное число , то* $\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{-\alpha}\sqrt[n]{-1}$
4. *Имеет место формула* $\sqrt[2k]{-1} = \sqrt[2k]{1}(\cos(\frac{\pi}{n}) + i\sin(\frac{\pi}{n}))$
5. $\sqrt[n]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{n})}$, *где* $k = \overline{0, [\frac{n}{2}]}$, $S_r = \{q = \alpha i + \beta j + \gamma k||q| = r\}$

Доказательство:

1. Сначала докажем первое утверждение.Пусть $w \in \sqrt[n]{q}$. Тогда $w^n = q$. Представим w и q в тригонометрической форме записи :

   $q = |q|(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0)$

   $w = |w|(\cos\alpha + i'\sin\alpha)$

   $$q = |q|(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) = |r|^n(\cos\alpha + i'\sin\alpha)^n = |r|^n(\cos n\alpha + i'\sin n\alpha)$$

   Из последнего равенства следует , что $|q| = |r|^n, i = \pm i'$ Таким образом , $w \in <1, i> \cong C$. Так как в C каждый ненулевой элемент обладает в точности корнями n-ой степени , то выполняется $|\sqrt[n]{q}| = n$

2. Пусть $q^n = \alpha \Leftrightarrow (\frac{q}{\sqrt[n]{\alpha}})^n = 1 \Leftrightarrow \frac{q}{\sqrt[n]{\alpha}} \in \sqrt[n]{1} \Leftrightarrow q \in \sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{1}$, где $\sqrt[n]{\alpha}$-арифметический корень.

3. Доказывается аналогично.

4. $q \in \sqrt[n]{1} \Leftrightarrow q^n = 1$. Пусть $q = \cos\alpha + \bar{i}\sin\alpha$.Значит

   $$(\cos\alpha + \bar{i}\sin\alpha)^n = 1$$

   По формуле Муавра получаем :

   $$\cos\alpha n + \bar{i}\sin\alpha n = 1$$

   Тогда $\alpha = \frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}$

   Таким образом, вещественная часть q может принимать следующие значения : $\cos\frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, [n/2]}$,а мнимые части q могут приобретать значения $\pm\sin\frac{2\pi k}{n}i, k = \overline{0, [n/2]}$ Фиксируем k.Тогда мнимая часть q будет иметь вид $\pm i\sin\frac{2\pi k}{n}$, а вещественная часть - $\cos\frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, [n/2]}$

   Поскольку $\bar{i}$ произвольный чисто мнимый кватернион единичной длины , то все $q \in \sqrt[n]{1}$, у которых вещественная часть равна $\cos\frac{2\pi k}{n}$ образует множество вида : $\cos\frac{2\pi k}{n} + S_{\sin[\frac{2\pi k}{n}]}, k = \overline{0, [n/2]}$

5. доказательство аналогичное пункту 4).

Решим задачи из параграфа *1.8 Примеры извлечения корней в алгебре кватернионов и в алгебре матриц второго порядка.* , используя теорему №23 и сравним полученные результаты.

1. $\sqrt[3]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{3}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{3})}, k = 0, 1.$

   - $k = 0$:
   $$1 + S_0 = 1$$
   - $k = 1$:
   $$-\frac{1}{2} + S_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. $\sqrt[4]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{4}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{4})}, k = 0, 1, 2.$

   - $k = 0$:
   $$1 + S_0 = 1$$
   - $k = 1$:
   $$0 + S_1 = \{q||q| = 1\}$$
   - $k = 2$:
   $$-1 + S_0 = -1$$

3. $\sqrt[5]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{5}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{5})}, k = 0, 1, 2.$

   - $k = 0$:
   $$1 + S_0 = 1$$
   - $k = 1$:
   $$\cos(\frac{2\pi}{5}) + S_{\sin(\frac{2\pi}{5})} \approx 0.3 + S_{0.95}$$
   - $k = 2$:
   $$\cos(144) + S_{\sin(144)} \approx -0.8 + S_{0.587}$$

4. $\sqrt[6]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{6}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{6})}, k = 0, 1, 2, 3.$

   - $k = 0$:
   $$1 + S_0 = 1$$
   - $k = 1$:
   $$\frac{1}{2} + S_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
   - $k = 2$:
   $$-\frac{1}{2} + S_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
   - $k = 3$:
   $$-1 + S_0 = -1$$

5. $\sqrt[7]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{7}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{7})}, k = 0, 1, 2, 3.$

- $k = 0$:
$$1 + S_0 = 1$$
- $k = 1$:
$$0.6234 + S_{0.7818}$$
- $k = 2$:
$$-0.222 + S_{0.975}$$
- $k = 3$:
$$-0.9 + S_{0.434}$$

6. $\sqrt[8]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{8}) + S_{\sin(\frac{2\pi k}{8})}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$

- $k = 0$:
$$1 + S_0 = 1$$
- $k = 1$:
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + S_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
- $k = 2$:
$$0 + S_1 = \{q||q| = 1\}$$
- $k = 3$:
$$\cos(\frac{3\pi}{4}) + S_{\sin(\frac{3\pi}{4})} \approx -0.7071 + S_{0.7071}$$
- $k = 4$:
$$-1 + S_0 = -1$$

7. $\sqrt[3]{1 + i + j + k} = \sqrt[3]{2}(cos(\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3}) + \bar{i}sin(\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3})), \bar{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$

Воспользуемся примером №2 из параграфа 2.2 Кватернионы.

В результате получим три решения $a + bi + cj + dk = \sqrt[3]{1 + i + j + k}$

- $k = 0$:
$$a = \sqrt[3]{2}cos(\frac{\pi}{9}), b = c = d = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}sin(\frac{\pi}{9})$$
- $k = 1$:
$$a = \sqrt[3]{2}cos(\frac{7\pi}{9}), b = c = d = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}sin(\frac{7\pi}{9})$$
- $k = 2$:
$$a = \sqrt[3]{2}cos(\frac{13\pi}{9}), b = c = d = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}sin(\frac{13\pi}{9})$$

4 Извлечение корней в алгебре матриц второго порядка.

Целью настоящего параграфа является извлечение корней из произвольных квадратных вещественных матриц второго порядка.

Рассмотрим произвольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, расписанную в кватернионной форме записи:

$q = \alpha + q_0$, где α-вещественная часть , q_0- мнимая часть.

$\alpha = \frac{a+d}{2}, q_0 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}, q_0 \neq 0.$

То есть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}i + \frac{b+c}{2}j + \frac{a-d}{2}k$. Также потребуется функция :

$q_0\bar{q_0} = \frac{1}{4}((c-b)^2 - (b+c)^2 - (a-d)^2) = \frac{1}{4}(-4cb + 2ad - a^2 - d^2) = \frac{1}{4}(4detA - (trA)^2) = \frac{1}{4}(-D(A))$, где $D(A)$ - дискриминант характеристического многочлена матрицы A.

Рассмотрим три случая :

1. $q_0\bar{q_0} > 0$;
2. $q_0\bar{q_0} < 0$;
3. $q_0\bar{q_0} = 0$.

Случай №1.

$q_0\bar{q_0} > 0 \Leftrightarrow 4detA - (trA)^2 > 0 \Leftrightarrow D(A) < 0.$

Распишем кватернион в виде :

$q = \alpha + \frac{q_0}{\sqrt{q_0\bar{q_0}}}\sqrt{q_0\bar{q_0}} \Rightarrow \alpha = \frac{a+d}{2} = \frac{trA}{2}, \frac{q_0}{\sqrt{q_0\bar{q_0}}} = i.$

Так как $q \in < 1, i >$ и учитывая , что $|q| = detA$ получаем :

$$q = detA(\frac{trA}{2detA} + i\frac{\sqrt{4detA - (trA)^2}}{2detA})$$

или $q = detA(cos\alpha + isin\alpha)$, где $sin\alpha > 0, \alpha = arccos\frac{trA}{2detA}$.

В результате получаем формулу для извлечения корней n-ой степени для 1-го случая :

$\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \sqrt[n]{detA}(cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}i) = \sqrt[n]{detA}(cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\frac{2}{\sqrt{4detA-(trA)^2}}$
$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}), k = \overline{0, n-1}$

Случай №2.

$q_0\bar{q_0} < 0 \Leftrightarrow 4detA - (trA)^2 < 0 \Leftrightarrow D(A) > 0.$

Распишем кватернион в виде :

$q = \frac{trA}{2} + \frac{q_0}{\sqrt{-q_0\bar{q_0}}}\sqrt{-q_0\bar{q_0}}, a' = \frac{a+d}{2} = \frac{trA}{2}, \frac{q_0}{\sqrt{-q_0\bar{q_0}}} = e, \sqrt{-q_0\bar{q_0}} = b'$, причем $e^2 = 1$.

Согласно *теореме №22* извлечение корней n-ой степени из вещественной матрицы A сведется к извлечению корней n-ой степени из пары $(a' - b', a' + b')$:

$(\sqrt[n]{a'-b'}, \sqrt[n]{a'+b'}) = \dfrac{\sqrt[n]{a'-b'}+\sqrt[n]{a'+b'}}{2} + e\dfrac{\sqrt[n]{a'+b'}-\sqrt[n]{a'-b'}}{2}$, $a' = \frac{a+d}{2} = \frac{trA}{2}, b' = \frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}, e = \frac{2}{\sqrt{(trA)^2-4detA}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}$

В результате получаем формулу для извлечения корней n-ой степени для 2-го случая : $\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = (\sqrt[n]{a'-b'}, \sqrt[n]{a'+b'}) = \frac{\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}+\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}}{2} + \frac{2}{\sqrt{(trA)^2-4detA}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}\frac{\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}-\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}}{2}$

При нечетном n будет ровно один корень. При четном рассмотрим 3 случая :

- Если $a'+b'<0$, либо $a'-b'<0$, то нет корней.
- Если $a'>0, a'=\pm b'$, то ровно два корня.
- $a'+b'>0, a'-b'>0$, то четыре корня.

Случай №3.

$q_0\bar{q_0} = 0 \Leftrightarrow 4detA = (trA)^2 \Leftrightarrow D(A) = 0.$

Распишем кватернион в виде :

$q = \alpha + q_0 \Rightarrow \alpha = \frac{a+d}{2} = \frac{trA}{2}$, причем $q_0^2 = 0.$

Найдем все корни n-ой степени из q . Несложно заметить , что они имеют вид $x+\varepsilon$, где $\varepsilon^2 = 0$.

Возведем выражение $(x+\varepsilon)^n$ и учитывая , что $\varepsilon^2 = 0$ получим :

$(x+\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}\varepsilon = \alpha + q_0$

Значит $\alpha = x^n$,$\varepsilon = \frac{q_0}{nx^{n-1}}, x = \sqrt[n]{\alpha}, \varepsilon = \frac{q_0}{n\alpha^{\frac{n-1}{n}}}$.

В результате получаем формулу для извлечения корней n-ой степени для 3-го случая :

$\sqrt[n]{\alpha+q_0} = x+\varepsilon$, где $x = \sqrt[n]{\alpha}, \varepsilon = \frac{q_0}{n\alpha^{\frac{n-1}{n}}}$ или

$$\sqrt[n]{\alpha+q_0} = \sqrt[n]{\frac{a+d}{2}} + \frac{1}{n(\frac{a+d}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}$$

При нечетном n будет ровно один корень , так как при $n = 2k+1, x^{2k+1} = \alpha, x = \sqrt[2k+1]{\alpha}$ имеет ровно одно значение. При четном n рассмотрим 2 случая :

- Если $\alpha < 0$, то нет корней , так как нельзя извлечь корень из отрицательного числа в поле вещественных чисел;
- Если $\alpha > 0$, то ровно два корня , так как при $n = 2k, x^{2k} = a, x = \pm\sqrt[2k+1]{a}$ имеет ровно два значения;
- Если $\alpha = 0, q_0 \neq 0$, то при $n \geq 2$ $\sqrt[n]{\alpha+q_0} = \{\emptyset\}$;

  Если $\alpha = 0, q_0 = 0$, то $\sqrt[n]{\alpha+q_0} = \{0\}$

Из приведенных выше рассуждений следует следующая теорема.

Теорема 21. *Пусть A - некоторая матрица второго порядка , n - произвольное число. Тогда*

1. *если* $q_0\bar{q}_0 > 0$,*то*
$$\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \sqrt[n]{detA}(cos\tfrac{\alpha+2\pi k}{n} + sin\tfrac{\alpha+2\pi k}{n}\tfrac{2}{\sqrt{4detA-(trA)^2}}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}), k = \overline{0, n-1}$$
2. *если* $q_0\bar{q}_0 < 0$, *то*
$$\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}+\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}}{2}+$$
$$\frac{2}{\sqrt{(trA)^2-4detA}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}\frac{\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}-\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2-4detA}}}{2}$$
При нечетном n матрица A будет иметь ровно один корень. При четном n :
   - *Если* $\frac{a+d}{2} + \sqrt{-q_0\bar{q}_0} < 0$, *либо* $\frac{a+d}{2} - \sqrt{-q_0\bar{q}_0} < 0$, *то нет корней.*
   - *Если* $\frac{a+d}{2} > 0, \frac{a+d}{2} = \pm\sqrt{-q_0\bar{q}_0}$, *то ровно два корня.*
   - $\frac{a+d}{2} + \sqrt{-q_0\bar{q}_0} > 0, \frac{a+d}{2} - \sqrt{-q_0\bar{q}_0} > 0$, *то четыре корня.*
3. *если* $q_0\bar{q}_0 = 0$, *то*
$$\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \sqrt[n]{\frac{a+d}{2}} + \frac{1}{n(\frac{a+d}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix}$$
При нечетном n матрица A будет иметь ровно один корень. При четном n :
   - *Если* $a + d < 0$, *то* $\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \{\emptyset\}$
   - *Если* $a + d > 0$, *то* $\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \{\pm(\sqrt[n]{\frac{a+d}{2}} + \frac{1}{n(\frac{a+d}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{-a+d}{2} \end{pmatrix})\}$
   - *Если* $a + d = 0, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, *то* $\sqrt[n]{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \{\emptyset\}$

В этом примере мы будем следовать ходу доказательства теоремы №21.

Пример №1 : Извлечем корень второй степени из матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

У нас есть базис:$1, i, j, k$.С помощью матричного перехода получаем новый базис :

$$e_{11} = \frac{1+k}{2};$$

$$e_{12} = \frac{i+j}{2};$$
$$e_{21} = \frac{j-i}{2};$$
$$e_{22} = \frac{1-k}{2};$$

Таким образом получаем соотношение :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Так как $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22}$, то

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Найдем $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + i - j - k \tag{6}$$

Пусть $i - j - k = q$. Тогда $q\bar{q} = -1 \Rightarrow q^2 = 1 \Rightarrow q = e$.

Таким образом , извлечем корень второй степени из двойного числа : $2 + e$. Получим четыре корня $\sqrt{2+e} = (\pm\sqrt{3}, \pm 1)$. В результате получим :

$$a = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} \pm 1), b = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} \mp 1).$$

Извлечем корень второй степени из двойного числа для каких-то определенных значениях a, b.Например $a = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1), b = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

$$\frac{1}{2}((\sqrt{3}+1) + e(\sqrt{3}-1)) = \frac{1}{2}((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1) + j(-\sqrt{3}+1) + k(-\sqrt{3}+1)).$$

В результате получаем :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Таким образом , получаем решения для одного из четырех случаев :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример №2 : Извлечем корень второй степени из матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$a' = \frac{a+d}{2} = 2, b' = \frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2 - 4detA} = 1$
В данном случае будет 4 корня , так как a' $>$ b'. Рассмотрим одно из решений.
$\frac{\sqrt{2-1}+\sqrt{2+1}}{2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2+1}-\sqrt{2-1}}{2}$
В результате получим одно из решений :
$\sqrt[2]{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$
Легко проверить,что это и будет решением.
Пример №3 : Извлечем корень второй степени из матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$a' = \frac{a+d}{2} = \frac{5}{2}, b' = \frac{1}{2}\sqrt{(trA)^2 - 4detA} = \frac{5}{2}$
В данном случае будет 2 корня , так как a' $=$ b'.
$\pm\{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{2}\} = \pm\{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\}$
Легко проверить,что это и будет решением.
Пример №4 : Извлечем корень второй степени из матрицы:
Эта матрица относится к третьему случаю теоремы №21.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$\sqrt[2]{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \pm\{\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\} = \pm\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}\}$
Легко проверить,что это и будет решением.

Список литературы

[1] И. В. Аржанцев, *Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений*, М.: МЦНМО, 2003.

[2] Чуркин В.А., *Системы полиномиальных уравнений , идеалы и их базисы-делители*, Методическая разработка для 1 курса ММФ.

[3] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многоообразия и алгоритмы: Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры,* М., Мир,2000.

[4] Кантор И.Л., Солодовников А.С., *Гиперкомплексные числа,* М.: Наука, 1973.

[5] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО), 2013.