

УДК 532.529.5

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРИТЕРИЯ СТОКСА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.В. Зуев

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

В статье рассматривается правомерность использования числа Стокса в качестве единственного определяющего критерия подобия при представлении результатов исследования двухфазных струйных течений в критериальной форме. Методом исследования является численное моделирование с использованием разработанной математической модели двухфазной турбулентной струи. После приведения уравнений этой модели к безразмерному виду получены критерии подобия, которые нужно использовать при моделировании двухфазного турбулентного струйного течения. Одним из критериев динамического подобия является число Стокса, которое можно представить в виде произведения числа Рейнольдса, относительного диаметра частиц и относительной плотности фаз. Показано, что значение числа Стокса однозначно связано с изменением параметров двухфазной струи только при числе Стокса, меньшем 0.14–0.15. Для того чтобы двухфазные струйные течения были геометрически и кинематически подобными при больших значениях числа Стокса, необходимо выдерживать равенство трех критериев подобия: числа Рейнольдса, относительного диаметра частиц и относительной плотности фаз. Полученные результаты позволяют не допускать грубых ошибок при обобщении данных экспериментального и аналитического исследований двухфазных турбулентных струйных течений.

Ключевые слова: двухфазная струя, газ, частица, критерии подобия, результаты расчетов

Введение

При математическом моделировании гетерогенных течений возможны различные варианты использования критериев подобия.

Одним из таких вариантов является использование критериев подобия при разработке классификаций двухфазных течений, позволяющих оценить сложность выбираемой или разрабатываемой модели при решении конкретной задачи [1–4].

В статье [1] в качестве критерия, с помощью которого можно оценить границы применимости различных моделей, рассматривается объемная концентрация частиц. Согласно [1], при объемной концентрации частиц, не превышающей 10^{-6} , можно не учитывать влияния частиц на параметры газовой фазы и рассчитывать движение газа и частиц независимо друг от друга. В области концентрации частиц $10^{-6} - 10^{-3}$ необходимо решать совместно уравнения, описывающие движение газа и частиц, а при объемной концентрации частиц, большей 10^{-3} , следует учитывать и взаимодействие частиц при их соударениях.

В [2] даются рекомендации по выбору методов расчета двухфазных течений в зависимости от отношения времени динамической релаксации частиц к лагранжеву временному масштабу турбулентности. Это отношение обозначается Ω_u

и является аналогом числа Стокса. В соответствии с [2] при $\Omega_u < 1$ целесообразно применять метод Эйлера. При этом могут использоваться следующие модели: однокоростные диффузионная ($\Omega_u < 10^{-2}$) и диффузионно-инерционная ($\Omega_u < 5 \cdot 10^{-1}$), двукоростные локальная ($10^{-2} < \Omega_u < 1$) и нелокальная ($10^{-2} < \Omega_u < 10$). По мнению авторов [2], лагранжев траекторный метод целесообразно применять при $\Omega_u > 1$, причем при $\Omega_u < 50$ следует использовать стохастические методы, а при $\Omega_u > 50$ – детерминированные модели, когда параметры частиц рассчитываются без учета пульсаций газовой фазы.

В монографиях [3, 4] приводятся классификации двухфазных турбулентных потоков в зависимости от безразмерного параметра, характеризующего инерционность частиц, – числа Стокса. При этом рассматриваются числа Стокса, определяемые в осредненном, крупномасштабном и мелкомасштабном пульсационных движениях. В этих классификациях наряду с числами Стокса используются числа Рейнольдса для осредненного и пульсационного движений. В зависимости от порядка величин перечисленных чисел Стокса и Рейнольдса все гетерогенные турбулентные течения делятся на пять групп: равновесные, квазиравновесные, неравновесные течения, течения с крупными частицами и обтекание неподвижной «замороженной» частицы.

Важным является то, что при разработке классификаций двухфазных течений используются не конкретные численные значения критериев подобия, а порядки их величин. Это замечание касается главным образом числа Стокса, которое можно представить в виде произведения трех критериев подобия, каждый из которых является определяющим критерием.

Вторым вариантом использования критериев подобия при моделировании двухфазных течений является представление результатов расчетов в виде критериальных уравнений. При этом важны численные значения критериев подобия. Двухфазные течения характеризуются большим количеством параметров непрерывной и дискретной фаз (скоростями, температурами, плотностями, концентрациями, размерами частиц и т. д.), причем фазы при движении могут обмениваться массой, импульсом и энергией. Обезразмеривая уравнения математической модели двухфазного течения, можно получить большое количество критериев подобия, многие из которых являются определяющими. Выдержать подобие по всей совокупности критериев подобия практически не представляется возможным, поэтому исследователи выбирают ограниченное количество критериев подобия (часто один), оказывающих, по их мнению, определяющее влияние на параметры течения.

В настоящей работе на примере двухфазного турбулентного струйного течения рассматривается правомерность использования одного критерия подобия (числа Стокса) при представлении результатов расчетов этого течения в критериальном виде.

Число Стокса характеризует инерционность частиц и в качестве определяющего критерия подобия используется в критериальных уравнениях в [5, 6]. В этих работах приводятся результаты численного моделирования двухфазной струи, истекающей из трубы. Расчет параметров газовой фазы проводится прямым численным моделированием (direct numerical simulation – DNS), расчет параметров частиц – методом Лагранжа. Результаты расчетов представляются в безразмерном виде, для оценки инерционности частиц используются два числа Стокса $Stk_0 = \rho_f D_f^2 u_{m0} / (18\mu R_0)$ и $Stk_m = \rho_f D_f^2 u_m / (18\mu r_{1/2})$ (в этих формулах используются обозначения, принятые в настоящей статье: ρ_f и D_f – плотность и диаметр частиц; μ – динамический коэффициент вязкости газа; u_{m0} – скорость газа на оси начального сечения струи радиусом R_0 ; u_m – скорость газа на оси струи в сечении с радиусом $r_{1/2}$, определенным по половине скорости газа). В результате расчетов

получены в безразмерном виде зависимости изменения скорости и концентрации частиц вдоль оси и в поперечных сечениях струи для различных чисел Стокса Stk_0 . В статьях [5, 6] также приводятся зависимости безразмерных скорости и концентрации частиц на оси струи от числа Стокса Stk_m .

В работе [7] исследуется влияние параметров частиц на характеристики двухфазной турбулентной изотерической струи. В ней приводится математическая модель двухфазной струи, в которой несущей фазой является газ, а дискретной фазой – твердые или жидкие частицы, не взаимодействующие друг с другом. Описание движения газовой и дискретной фаз проводится в переменных Эйлера. При выводе осредненных уравнений дискретной фазы ее мгновенные параметры осредняются с использованием плотности вероятности распределения частиц по координатам, скоростям и температурам частиц, а осредненные уравнения газовой фазы получаются осреднением мгновенных уравнений по ансамблю турбулентных реализаций. Для замыкания системы осредненных уравнений фаз используется модель турбулентности дискретной фазы, включающая дифференциальные уравнения переноса рейнольдсовых напряжений. В работе [7] практически все результаты расчетов представлены в размерном виде, но в ряде случаев вместо размера частиц в микронах используется число Стокса. При этом делается замечание, что «... величина числа Стокса зависит как от размера частиц, так и от плотности их материала. Вероятнее всего, что одинаковое число Стокса, рассчитанное для различных размеров и плотностей частиц, приведет к различным результатам по влиянию дисперсной фазы на параметры струи. Данный вопрос требует дополнительного изучения...».

Ниже приводится относительно простая математическая модель двухфазной турбулентной струи, с помощью которой проведены расчеты, позволившие ответить на вопрос, сформулированный в статье [7] относительно использования числа Стокса при представлении результатов расчетов в критериальном виде: существует ли однозначная связь между безразмерными зависимостями изменения параметров фаз в двухфазной турбулентной струе и величиной числа Стокса.

1. Математическая модель двухфазной турбулентной струи

Математическая модель двухфазного турбулентного струйного течения включает в себя осредненные по пространству и времени уравнения, описывающие движение каждой фазы в переменных Эйлера, а также выражения для моментов корреляции пульсационных параметров фаз, входящих в осредненные уравнения.

В связи с тем что цель настоящей работы состоит в том, чтобы проанализировать влияние числа Стокса на изменение параметров фаз в двухфазной турбулентной струе, струя считается изотерической, непрерывной фазой ее является газ, а дисперсной фазой – монодисперсные твердые или жидкие частицы, не взаимодействующие друг с другом. Это позволяет не учитывать фазовые превращения, коагуляцию и дробление частиц. Кроме того, струйное течение принимается стационарным и осесимметричным.

Вывод осредненных уравнений проводится в следующей последовательности. В области течения выделяется произвольный элементарный макрообъем. Для каждой фазы, находящейся в этом объеме, записываются микроуравнения, в данном случае – уравнения баланса массы и количества движения. Все параметры фаз, входящие в эти уравнения, осредняются по пространству с использованием метода осреднения Р.И. Нигматулина [8], в результате чего получаются уравнения для мгновенных параметров фаз, осредненных по пространству (модель двухскоростного континуума). К этим уравнениям применяется процедура осреднения

по времени О. Рейнольдса и проводится оценка порядка членов полученных уравнений с учетом особенностей струйных течений [9]. Уравнения баланса количества движения фаз упрощаются с использованием уравнений баланса массы соответствующих фаз, в результате чего получаются уравнения, которые обычно называются уравнениями движения.

В конечном виде уравнения, описывающие течение в двухфазной стационарной изотермической турбулентной осесимметричной струе в цилиндрической системе координат, записываются следующим образом:

1) уравнение баланса массы газовой фазы

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \alpha u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v \rho \alpha + \rho \langle \alpha' v' \rangle) = 0; \quad (1)$$

2) уравнение баланса массы частиц

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_f \alpha_f u_f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_f \rho_f \alpha_f + \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) = 0; \quad (2)$$

3) уравнение движения газовой фазы:

– в проекции на ось x (совпадает с осью струи)

$$\rho \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho (v \alpha + \langle \alpha' v' \rangle) \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho \alpha \langle u' v' \rangle - \frac{\partial p}{\partial x} - F_{cfx}; \quad (3)$$

– в проекции на ось r

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

4) уравнение движения частиц

– в проекции на ось x

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial u_f}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + F_{cfx}; \quad (5)$$

– в проекции на ось r

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + 2 \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial v_f}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial x} \rho_f (\alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + u_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) - \frac{v_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho_f \alpha_f \langle v_f'^2 \rangle + F_{cfy}; \quad (6)$$

5) уравнения состояния фаз

$$p = \rho RT, \quad \rho_f = \text{const}; \quad (7)$$

6) уравнение, связывающее объемные концентрации фаз

$$\alpha + \alpha_f = 1. \quad (8)$$

При записи уравнений (1)–(8) введены следующие обозначения: x , r – оси цилиндрической системы координат; ρ – физическая плотность; α – объемная концентрация; u , v – проекции вектора скорости на оси координат x и r ; p – давление; F_{cfx} , F_{cfr} – проекции силы сопротивления частиц на оси координат x и r ; R – удельная газовая постоянная. Параметры газа индексов не имеют, параметры частиц обозначены нижним индексом f , угловыми скобками обозначены моменты корреляции пульсационных величин, штрихами сверху – пульсационные параметры фаз.

Для расчета силы сопротивления частиц, отнесенной к единице объема среды, используется формула [10]

$$\mathbf{F}_{cf} = \frac{3}{4D_f} \alpha_f C_{Df} \rho (\mathbf{W} - \mathbf{W}_f) |\mathbf{W} - \mathbf{W}_f|$$

в которой \mathbf{W} и \mathbf{W}_f – векторы скорости газа и частиц соответственно; C_{Df} – коэффициент сопротивления частиц диаметром D_f , определяемый по формуле $C_{Df} = 0.32 + 4.4/\sqrt{\text{Re}} + 24/\text{Re}$ [10].

Система уравнений (1)–(8) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & u = u(r), \quad u_f = u_f(r), \quad v_f = v_f(r), \quad \alpha_f = \alpha_f(r), \\ r = \infty : \quad & u = u_e, \quad u_f = u_{fe}, \quad v_f = 0, \quad \alpha_f = \alpha_{fe}, \\ r = 0 : \quad & v = 0, \quad v_f = 0, \quad \partial u / \partial r = 0, \quad \partial u_f / \partial r = 0. \end{aligned}$$

Индексом e обозначены параметры фаз на границе струи.

Система осредненных уравнений, описывающих двухфазную струю, замыкается с помощью выражений для моментов корреляции пульсационных параметров фаз [11]

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -K_u K_v l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \langle u'_f v'_f \rangle &= -C_u K_{uf} K_{vf} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \langle v_f'^2 \rangle = K_{vf}^2 l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2; \\ \langle \alpha'_f v'_f \rangle &= -\frac{C_\alpha K_v K_{vf} l^2}{\text{Sc}_T} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial \alpha_f}{\partial r}; \quad \langle \alpha'v' \rangle = -\frac{C_\alpha K_v^2 l^2}{\text{Sc}_T} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial \alpha}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (9) $K_u = u'/u'_0$; $K_v = v'/v'_0$; $K_{uf} = u'_f/u'_0$; $K_{vf} = v'_f/v'_0$; u' , v' , u'_f и v'_f – пульсационные скорости фаз в двухфазном потоке; C_u , C_α , $C_{\alpha f}$ – коэффициенты (при проведении расчетов приняты равными 1); Sc_T – турбулентное число Шмидта; u'_0 и v'_0 – пульсационные скорости газовой фазы, определяемые по формулам $u'_0 = l|\partial u/\partial r|$ и $v'_0 = K u'_0$ (K – эмпирический коэффициент; для круглой струи $K = 0.7$) [12]; l – путь перемешивания Прандтля, равный $l = \sqrt{B}|\Delta u_{\max}/(\partial u/\partial r)_{\max}|$ (B – эмпирический коэффициент, использующийся при расчете газовых струй; для круглой струи $B = 0.013$) [13]. Пульсационные скорости фаз, входящие в выражения (9), определяются с помощью модели турбулентности, изложенной в [14].

Аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных (за исключением уравнения баланса массы газа) разностными уравнениями проводится с использованием неявной шеститочечной конечно-разностной схемы, имеющей второй порядок точности $[O(\Delta x)^2 + O(\Delta y)^2]$ (схема Кранка–Николсона с весовым коэффициентом 1/2) и являющейся безусловно устойчивой [15]. Уравнение баланса массы газовой фазы аппроксимируется по явной четырехточечной схеме. Подробное описание использовавшегося метода расчета двухфазной струи приведено в монографии [16].

2. Валидация математической модели двухфазной турбулентной струи

С целью определения степени соответствия приведенной выше математической модели реальной двухфазной струе проведено сравнение результатов расчетов, выполненных с использованием этой модели, с данными эксперимента [17]. В этом

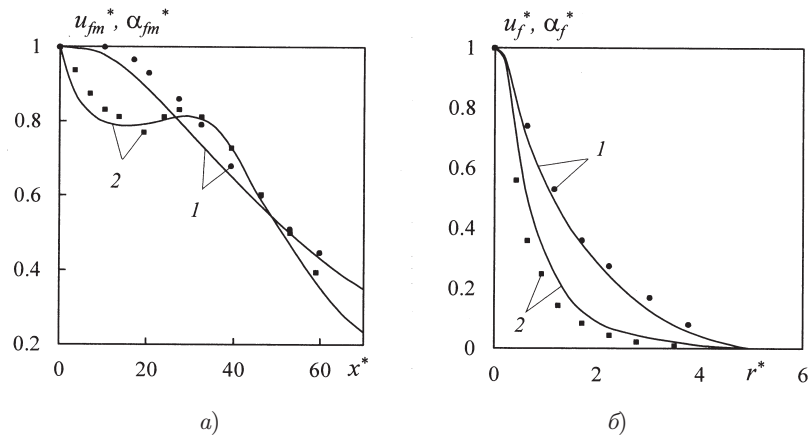


Рис. 1. Изменение параметров частиц в двухфазной струе: *a* – вдоль оси струи; *б* – в поперечном сечении струи на расстоянии $x^* = 33$ от среза трубы. 1 – скорость частиц; 2 – объемная концентрация частиц; сплошные кривые – расчет; точки – эксперимент [17]

эксперименте с помощью лазерного анемометра измерялись скорость и объемная концентрация частиц на оси и в поперечных сечениях воздушной струи с частицами корунда ($\rho_f = 3950 \text{ кг/м}^3$) размером 32 мкм, истекающей из длинной трубы диаметром 15.2 мм в неподвижное воздушное пространство. Средние скорости газовой фазы и частиц на срезе трубы равнялись 30 м/с. Массовая расходная концентрация частиц (отношение массового расхода частиц к массовому расходу газа) была равна 0.62. В эксперименте поперечная скорость частиц не измерялась. При проведении расчетов граничные условия для поперечной скорости частиц на срезе сопла задавались в виде полинома $v_f^* = 9.480 \cdot 10^{-2} r^{*2} - 0.02148 r^{*3} - 3.576 \cdot 10^{-6} r^{*3}$ ($r^* = r/R_0$; $v_f^* = v_f/u_{f0}$; u_{f0} – продольная скорость частиц на оси начального сечения струи; R_0 – радиус этого сечения), при котором достигалось удовлетворительное совпадение значений объемной концентрации частиц на оси струи, полученных при проведении расчета и эксперимента. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментом: на рис. 1, *a* показано изменение безразмерных продольной скорости и объемной концентрации частиц вдоль оси струи, а на рис. 1, *б* – изменение этих параметров частиц в поперечном сечении струи на расстоянии $x^* = x/R_0 = 33$ от среза трубы.

На рис. 1 используются следующие обозначения: $x^* = x/R_0$; $r^* = r/R_0$; $u_{fm}^* = u_{fm}/u_{fm0}$; $u_f^* = u_f/u_{fm}$; $\alpha_{fm}^* = \alpha_{fm}/\alpha_{fm0}$; $\alpha_f^* = \alpha_f/\alpha_{fm}$; u_{fm} , α_{fm} – продольная скорость и объемная концентрация частиц на оси струи; u_{fm0} , α_{fm0} – продольная скорость и объемная концентрация частиц на оси начального сечения струи; r , R_0 – радиусы текущего и начального сечений струи.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что приведенная выше математическая модель двухфазной струи удовлетворительно описывает изменение параметров в реальной струе.

3. Критерии подобия для моделирования течения в двухфазной изотермической струе

Критерии подобия, которые необходимо использовать при моделировании течения в изотермической двухфазной струе, можно получить, обезразмерив уравнения математической модели этого течения [9]. В случае струйного течения в качестве масштабов физических параметров фаз целесообразно выбрать значения

соответствующих параметров в начальном сечении струи ($\alpha_0, \rho_0, u_0, \mu_0, p_0, \rho_{f0}, u_{f0}, \alpha_{f0}, D_{f0}$), а в качестве масштаба линейного размера – диаметр этого сечения D_0 . В результате обезразмеривания уравнений (1) и (2) получаются три критерия подобия: критерий геометрического подобия $x^* = x/D_0$ и объемные концентрации фаз α_0 и α_{f0} , а в результате обезразмеривания уравнения (3) – еще четыре критерия подобия: число Рейнольдса $Re = \rho_0 u_0 D_{f0} / \mu_0$, число Эйлера $Eu = p_0 / (\rho_0 u_0^2)$, критерий геометрического подобия $D_f^* = D_{f0} / D_0$ и коэффициент скольжения фаз $\nu_{fg} = u_{f0} / u_0$. При обезразмеривании уравнения (5) получается комплекс

$$\frac{18}{Re} \frac{D_0}{D_{f0}} \frac{\rho_0}{\rho_{f0}} \left(\frac{u_0}{u_{f0}} \right)^2 \frac{x}{D_0} \quad (10)$$

В теории струй в качестве масштаба линейного размера часто выбирается не диаметр начального сечения струи D_0 , а его радиус R_0 [12]. При этом комплекс (10) принимает вид

$$\frac{36}{Re} \frac{R_0}{D_{f0}} \frac{\rho_0}{\rho_{f0}} \left(\frac{u_0}{u_{f0}} \right)^2 \frac{x}{2R_0}$$

или

$$\frac{x^*}{2 \cdot Stk \cdot \nu_{fg}^2}, \quad (11)$$

а критерии геометрического подобия x^* и D_f^* записываются следующим образом: $x^* = x/R_0$, $D_f^* = D_{f0}/R_0$. В выражении (11) число Стокса Stk имеет вид

$$Stk = \frac{\rho_{f0} D_{f0}^2 u_0}{36 \mu_0 R_0} = \frac{1}{36} Re D_f^* \rho^*. \quad (12)$$

Предполагается, что число Стокса позволяет оценить инерционность частиц и представляет собой отношение времени динамической релаксации стоксовой частицы $\tau_f = \rho_f D_f^2 / (18\mu)$ к характерному времени несущей фазы $\tau = R/u$ (R – характерный размер течения): $Stk = \tau_f / \tau$ [3–6]. Следует отметить, что в литературе в формуле для числа Стокса численное значение коэффициента может быть разным в зависимости от того, какой размер течения выбран за характерный – радиус (коэффициент 18) или диаметр (коэффициент 36) течения.

Из вышеизложенного следует, что при моделировании течения в двухфазной изотермической струе необходимо использовать следующие критерии подобия: объемные концентрации фаз α_0 и α_{f0} , относительную плотность фаз $\rho^* = \rho_{f0} / \rho_0$, критерии геометрического подобия $x^* = x/D_0$, $D_f^* = D_{f0}/R_0$, критерий кинематического подобия $\nu_{fg} = u_{f0} / u_0$ и критерии динамического подобия $Re = \rho_0 u_0 D_{f0} / \mu_0$, $Eu = p_0 / (\rho_0 u_0^2)$, $Stk = \rho_{f0} D_{f0}^2 u_0 / (36 \mu_0 R_0)$, причем число Стокса Stk может быть представлено в виде произведения трех критериев подобия: Re , D_f^* и ρ^* . Имеющаяся в литературе информация свидетельствует о том, что все эти критерии подобия являются определяющими и, следовательно, должны учитываться при моделировании двухфазных струй. Ниже будет показано, что при одном и том же значении числа Стокса, но разных значениях критериев Re , D_f^* и ρ^* , получаются различные законы изменения параметров фаз в двухфазной турбулентной струе.

4. Результаты расчетов

В работе [14] показано, что при значении числа Стокса $Stk < 0.14$ пульсационные скорости частиц различного размера и различной плотности становятся

Табл. 1
Значения критериев подобия, составленных из размерных параметров в начальном сечении струи

Вариант	Stk	$Re = \rho u D_f / \mu$	D_f^*	ρ^*
1	0.0987	17.2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	826.4
2		17.2	$5 \cdot 10^{-4}$	413.2
3	9.87	171.9	$2.5 \cdot 10^{-3}$	826.4
4		343.8	$1.25 \cdot 10^{-3}$	826.4
5		171.9	$5 \cdot 10^{-3}$	413.2
6		343.8	$2.5 \cdot 10^{-3}$	413.2
7	39.46	343.8	$5 \cdot 10^{-3}$	826.4
8		687.5	$2.5 \cdot 10^{-3}$	826.4
9		343.8	10^{-2}	413.2
10		687.5	$5 \cdot 10^{-3}$	413.2

равными пульсационным скоростям газа, то есть частицы в этом случае становятся пассивной примесью, размер которой не влияет на параметры газовой фазы. В статьях [5, 6] в результате сопоставления осредненных продольных скоростей фаз на оси двухфазной струи и значения числа Стокса принимается, что частицы становятся пассивной примесью (при записи формулы для числа Стокса в приведенном выше виде) при $Stk < 0.15$. При $Stk > 0.14-0.15$ на результаты расчетов наряду с другими параметрами должны оказывать влияние размер и плотность частиц. Поэтому с использованием приведенной выше математической модели двухфазной струи проведены расчеты этой струи при числах Стокса, рассчитанных по значениям параметрам фаз в начальном сечении струи, больших и меньших 0.14–0.15. При проведении этих расчетов размерные параметры фаз имели следующие значения: $u_0 = u_{f0} = (12.5-50)$ м/с, $T_0 = T_{f0} = 288$ К, $\alpha_{f0} = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $u_e = u_{fe} = 0$, $T_e = T_{fe} = 288$ К, $\alpha_{fe} = 0$, $\mu_0 = 1.76 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $D_{f0} = (5-200) \cdot 10^{-6}$ м, $\rho_0 = (1.21-2.42)$ кг/м³, $\rho_{f0} = (0.5-2.0) \cdot 10^3$ кг/м³, $R_0 = (10-80) \cdot 10^{-3}$ м. Поперечные поля всех параметров фаз в начальном сечении струи принимались равномерными. Значения критериев подобия Stk , Re , D_f^* и ρ^* при проведении этих расчетов приведены в табл. 1.

На рис. 2 приведены результаты расчетов двухфазной струи в вариантах 1 и 2.

На рис. 2, а показано изменение продольных скоростей газа и частиц вдоль оси струи, а на рис. 2, б изменение этих параметров в поперечном сечении струи $x^* = 300$. В этих расчетах значения критериев подобия D_f^* и ρ^* менялись так, что величина числа Стокса оставалась равной 0.0987. При этом скорость газа равна скорости частиц и кривые, изображающие изменение этих скоростей вдоль оси струи и в ее поперечном сечении, сливаются друг с другом, а зависимости $u^* = u^*(r^*)$ и $u_f^* = u_f^*(r^*)$ близки к профилю Шлихтинга однофазной струи [12]. Результаты расчетов, представленные на рис. 2, свидетельствуют о том, что при $Stk < 0.14-0.15$, когда частицы можно считать пассивной примесью, значение числа Стокса однозначно определяет изменение параметров фаз в двухфазной струе независимо от значения критериев подобия ρ^* , Re и D_f^* .

Результаты расчетов в вариантах 3–10 приведены на рис. 3.

В расчетах 3–6 при сохранении значения числа Стокса 9.87 значения критериев подобия Re , D_f^* и ρ^* изменялись в диапазонах: $Re = 171.9-343.8$; $D_f^* = (1.25-5) \cdot 10^{-3}$; $\rho^* = 413.2-826.4$. В вариантах расчетов 7–10 число Стокса равно 39.46, а значения критериев подобия Re , D_f^* и ρ^* варьировались в следующих пределах: $Re = 343.8-687.5$; $D_f^* = 2.5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$; $\rho^* = 413.2-826.4$. На этом рисунке используются обозначения: $x^* = x/R_0$, $u_m^* = u_m/u_0$, $u_{fm}^* = u_{fm}/u_{f0}$, $\alpha_{fm}^* = \alpha_{fm}/\alpha_{f0}$

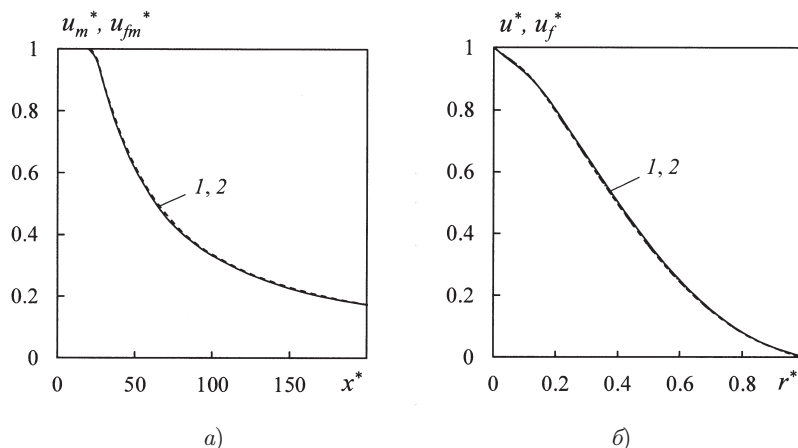


Рис. 2. Изменение безразмерных скоростей газа и частиц вдоль оси и в поперечном сечении $x^* = 300$ двухфазной струи при $Stk = 0.0987$. Цифры соответствуют номерам расчетов

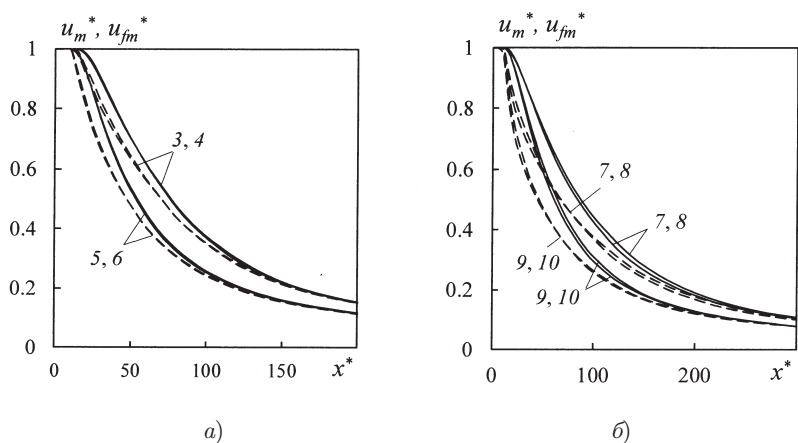


Рис. 3. Изменение безразмерных скоростей фаз вдоль оси двухфазной струи при двух значениях числа Стокса и различных значениях критериев подобия Re , D_f^* и ρ^* : $a - Stk = 9.87$; $b - Stk = 39.46$. Цифры соответствуют номерам расчетов; сплошные линии – скорость частиц; пунктирные линии – скорость газа

(индексом “ m ” обозначены параметры на оси струи, а индексом “ 0 ” – параметры в начальном сечении струи).

Из рис. 3 следует, что при фиксированных значениях числа Стокса, превышающих 0.14–0.15, на изменение скоростей фаз вдоль оси двухфазной струи сильное влияние оказывает критерий подобия ρ^* : при увеличении величины этого критерия увеличивается дальнобойность двухфазной струи. Различие результатов расчетов с разными значениями Stk заключается в том, что при увеличении величины числа Стокса увеличивается дальнобойность двухфазной струи и увеличивается различие в скоростях фаз на оси струи. В вариантах расчетов 3–6 (рис. 3, a) максимальное значение коэффициента скольжения фаз на оси струи $\nu_{fg} = u_{fm}/u_m$ равно 1.15, а в вариантах расчетов 7–10 (рис. 3, b) – 1.35. Кроме того, при увеличении числа Стокса растет различие в скоростях газа и различие в скоростях частиц на

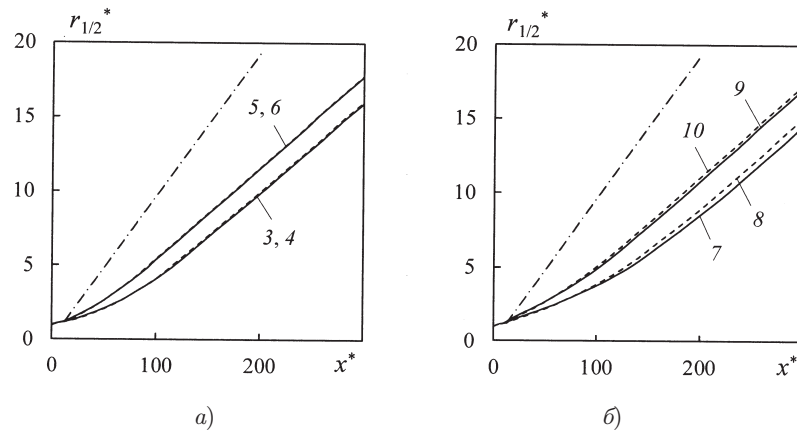


Рис. 4. Зависимость радиуса струи, определенного по половине скорости газа, от расстояния до начального сечения струи в вариантах расчетов 3–10: а – $Stk = 9.87$; б – $Stk = 39.46$. Цифры соответствуют номерам расчетов; штрих-пунктирные линии – границы однофазной изотермической струи

оси струи при $Stk = const$ и $\rho^* = const$. Так, в вариантах 3, 4 отличие скорости газа на оси струи при одном и том же значении x^* может достигать 2.8%, в вариантах 5, 6 – 2.3%, в вариантах 7, 8 – 4.5% и в вариантах 9, 10 – 3.6%. При этом максимальные различия в скоростях частиц на оси струи равны: в вариантах 3, 4 – 2.6%, в вариантах 5, 6 – 2.0%, в вариантах 7, 8 – 6.2% и в вариантах 9, 10 – 5.9%. Таким образом, при увеличении числа Стокса на зависимости изменения скоростей фаз вдоль оси двухфазной струи, кроме ρ^* , оказывают влияние и критерии подобия Re и D_f^* , но их влияние при $Stk < 40$ незначительно.

Следует отметить, что в вариантах расчетов 3–10 поперечные поля продольных скоростей фаз автомодельны и совпадают с поперечными полями этих скоростей в вариантах 1–2, изображенных на рис. 2, б.

На рис. 4 представлены зависимости изменения радиуса струи $r_{1/2}^*$ от расстояния до ее начального сечения x^* ($r_{1/2}^*$ – расстояние от оси струи, для которого выполняется условие: $(u - u_e)/(u_m - u_e) = 0.5$ [12]). Рис. 4, а соответствует числу Стокса, равному 9.87, а рис. 4, б – 39.46.

Из рис. 4 следует, что при одном и том же значении числа Стокса на зависимости $r_{1/2}^* = r_{1/2}^*(x^*)$, так же как и на зависимости $u_m^* = u_m^*(x^*)$ и $u_{fm}^* = u_{fm}^*(x^*)$, сильное влияние оказывает критерий подобия ρ^* и менее выраженное влияние – критерии подобия Re и D_f^* . Причем при увеличении величины числа Стокса влияние двух последних критериев на результаты расчетов возрастает.

Заключение

В механике двухфазных сред критерии подобия используются как при разработке классификаций двухфазных течений, позволяющих оценить сложность выбираемой или разрабатываемой математической модели при решении конкретной задачи, так и при представлении результатов расчетов или экспериментов в виде критериальных уравнений. В первом случае используются не конкретные численные значения критериев подобия, а порядки их величин. Во втором случае важны численные значения критериев подобия, так как эти значения связываются с результатами расчетов или экспериментов.

Одним из основных критериев подобия, использующихся как при составлении классификаций двухфазных течений, так и при представлении результатов рас-

четов этих течений в безразмерном виде, является число Стокса. Обычно принимается, что этот критерий подобия является критерием, значение которого однозначно определяет изменение параметров двухфазных течений. Результаты данной работы свидетельствуют о том, что это предположение справедливо только при небольших значениях числа Стокса.

Путем обезразмеривания уравнений математической модели двухфазного изотермического струйного течения получены критерии подобия, которые должны использоваться при моделировании этого течения. Одним из полученных критериев является число Стокса, которое можно представить в виде произведения трех критериев подобия: числа Рейнольдса Re , относительного диаметра частиц D_f^* и относительной плотности фаз ρ^* .

В результате проведенных расчетов с использованием приведенной математической модели двухфазной струи показано, что в случае $Stk > 0.14-0.15$ при одном и том же значении числа Стокса на изменение параметров фаз двухфазной струи сильное влияние оказывает критерий ρ^* и менее выраженное влияние – критерии Re и D_f^* . Влияние двух последних критериев на результаты расчетов двухфазной струи возрастает при увеличении величины числа Стокса. При $Stk < 0.14-0.15$ частицы можно считать пассивной примесью, и в этом случае значение числа Стокса однозначно определяет изменение параметров фаз в двухфазной струе независимо от значения критериев подобия Re , D_f^* и ρ^* .

Литература

1. *Elghobashi S.* Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models // Appl. Sci. Res. – 1991. – V. 48, No 3–4. – P. 301–314. – doi: 10.1007/BF02008202.
2. *Зайчик Л.И., Першук В.А.* Проблемы моделирования газодисперсных турбулентных течений с горением или фазовыми переходами // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 5. – С. 3–19.
3. *Вараксин А.Ю.* Турбулентные течения газа с твердыми частицами. – М.: Физматлит, 2003. – 192 с.
4. *Вараксин А.Ю.* Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
5. *Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M.* Anomalous memory effects on transport of inertial particles in turbulent jets // Phys. Fluids. – 2010. – V. 22, No 5. – Art. 031005, P. 1–4. – doi: 10.1063/1.3432439.
6. *Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M.* Particle-laden jets: Particle distribution and back-reaction on the flow // J. Phys.: Conf. Ser. – 2011. – V. 318, Sect. 5. – Art. 052018, P. 1–10. – doi: 10.1088/1742-6596/318/5/052018.
7. *Терехов В.И., Пахомов М.А.* Влияние частиц на структуру течения и дисперсию твердой примеси в двухфазной осесимметричной струе // Журн. техн. физики. – 2011. – Т. 81, № 10. – С. 27–35.
8. *Нугматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.
9. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
10. *Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.* Многофазные течения газа с частицами. – М.: Машиностроение, 1994. – 320 с.
11. *Зуев Ю.В., Лепешинский И.А.* Особенности распространения газовых и двухфазных двухконтурных коаксиальных струй // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 12. – С. 95–106.

12. Теория турбулентных струй / Г.Н. Абрамович, Т.А. Гиршович, С.Ю. Крашенинников, А.Н. Секундов, И.П. Смирнова; Под ред. Г.Н. Абрамовича. – М.: Наука, 1984. – 716 с.
13. Крашенинников С.Ю. К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1972. – № 3. – С. 71–80.
14. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Истомин Е.А. Выбор критериев и определение их значений для оценки характера взаимодействия фаз в двухфазных турбулентных струях // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2012. – № 1. – С. 42–54.
15. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
16. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газозвеси. – Киев: Наук. думка, 1987. – 240 с.
17. Картушинский А.И., Фришман Ф.А. О миграционном переносе в двухфазной струе // Струйные течения жидкостей и газов: Тез. Всесоюз. науч. конф.: в 3 ч. – Новополюк: Новополюцкий политехн. ин-т, 1982. – Ч. 3. – С. 22–28.

Поступила в редакцию
21.06.19

Зуев Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория воздушно-реактивных двигателей».

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия

E-mail: yuri_zuev@bk.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 3, pp. 341–354

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354

About the Use of the Stokes Number for Mathematical Modeling of Two-Phase Jet Flows

Yu. V. Zuev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

E-mail: yuri_zuev@bk.ru

Received June 21, 2019

Abstract

The appropriateness of using the Stokes number as a single similitude parameter for representation of the results of research on two-phase jet flows in a criteria form was considered. Numerical modeling with the help of the developed mathematical model of a two-phase turbulent jet was applied. After putting the equations of this model in the dimensionless form,

the similitude parameters needed for two-phase turbulent jet flow modeling were obtained. One of the criteria for dynamic similarity is the Stokes number, which can be presented as a product of the Reynolds number, the relative diameter of particles, and the relative density of phases. It was shown that the value of the Stokes number is uniquely related to changes in the parameters of the two-phase jet only when its value is smaller than 0.14–0.15. The two-phase jet flows can be geometrically and kinematically similar at higher values of the Stokes number if the equality of the following three criteria of similarity are maintained: Reynolds numbers, relative diameter of particles, and relative density of phases. The obtained results allow avoiding gross errors during generalization of experimental and analytical data on two-phase turbulent jet flows.

Keywords: two-phase jet, gas, particle, criteria of similarity, calculation results

Figure Captions

Fig. 1. Change of the particles parameters in a two-phase jet: a – along the jet axis; b – in the cross section of the jet at distance $x^* = 33$ from the pipe end. 1 – the speed of particles; 2 – the volume concentration of particles; continuous curves calculation; points of the experiment [17].

Fig. 2. Change of the dimensionless gas velocity and particles velocity along the axis and in the cross section $x^* = 300$ of the two-phase jet at $\text{Stk} = 0.0987$. The number of curves corresponds to the number of calculations.

Fig. 3. Change of the dimensionless speeds of phases along the axis of the two-phase jet at two values of the Stokes number and various values of similarity criteria Re , D_f^* and ρ^* ; a – $\text{Stk} = 9.87$; b – $\text{Stk} = 39.46$. Figures correspond to the number of calculations; continuous lines show the velocity of particles; dashed lines indicate gas velocity.

Fig. 4. Dependence of the dimensionless radius of jet $r_{1/2}^*$ on the distance to the initial section of the jet in calculations 3–10: a – $\text{Stk} = 9.87$; b – $\text{Stk} = 39.46$. Figures correspond to the number of calculations; dash-dotted lines are the borders of the single-phase isothermal jet.

References

1. Elghobashi S. Particle-laden turbulent flows: Direct simulation and closure models. *Appl. Sci. Res.*, 1991, vol. 48, nos. 3–4, pp. 301–314. doi: 10.1007/BF02008202.
2. Zaichik L.I., Pershukov V.A. Problems of modeling gas-particle turbulent flows with combustion and phase transitions. Review. *Fluid Dyn.*, 1996, vol. 31, no. 5, pp. 635–646. doi: 10.1007/BF02078213.
3. Varaksin A.Yu. *Turbulentnye techeniya gaza s tverdymi chastitsami* [Turbulent Flows of Gas with Firm Particles]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 192 p. (In Russian)
4. Varaksin A.Yu. *Stolknoveniya v potokakh gaza s tverdymi chastitsami* [Collisions in Gas Flows with Solids]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 312 p. (In Russian)
5. Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M. Anomalous memory effects on transport of inertial particles in turbulent jets. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, no. 5, art. 031005, pp. 1–4. doi: 10.1063/1.3432439.
6. Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M. Particle-laden jets: Particle distribution and back-reaction on the flow. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2011, vol. 318, sect. 5, art. 052018, pp. 1–10. doi: 10.1088/1742-6596/318/5/052018.
7. Terekhov V.I., Pakhomov M.A. Effect of particles on the flow structure and dispersion of solid impurities in a two-phase axisymmetric jet. *Tech. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 10, pp. 1406–1414. doi: 10.1134/S1063784211100203.
8. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [The Dynamics of Multiphase Media]. Pt. 1. Moscow, Nauka, 1987. 464 p. (In Russian)

9. Hinze J.O. *Turbulence. An Introduction to Its Mechanism and Theory*. New York, McGraw-Hill, 1959. 586 p.
10. Sternin L.E., Shraiber A.A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase Flows of Gas with Particles]. Moscow, Mashinostroeniye, 1994. 320 p. (In Russian)
11. Zuev Yu.V., Lepeshinsky I.A. Features of spread of gas and two-phase double-circuit coaxial jets. *Mat. Model.*, 2016, vol. 28, no. 12, pp. 95–106 (In Russian)
12. Abramovich G.N., Girshovich T.A., Krasheninnikov S.Yu., Sekundov A.N., Smirnova I.P. *Teoriya turbulentnykh strui* [Theory of Turbulent Jets]. Moscow, Nauka, 1984. 716 p. (In Russian)
13. Krasheninnikov S.Yu. Calculation of axisymmetric twisted and nontwisted turbulent jets. *Fluid Dyn.*, 1972. vol. 7, no. 3, pp. 426–433. doi: 10.1007/BF01209047.
14. Zuev Yu.V., Lepeshinskii I.A., Reshetnikov VA., Istomin E.A. The choice of criteria and determination of their values for assessment of phase interaction behavior in two-phase turbulent jets. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostr.*, 2012, no. 1, pp. 42–54. (In Russian)
15. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. New York, Basel, Marcel Dekker Inc., 2001. 786 p.
16. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. *Turbulentnye techeniya gazovzvesi* [Turbulent Flows of a Gas Mixture]. Kiev, Nauk. Dumka, 1987. 240 p. (In Russian)
17. Kartushinsky A.I., Frishman F.A. About migration transfer in a two-phase jet. *Struinye techeniya zhidkosti i gazov: Tez. Vsesoyuz. nauch. konf.* [Jet Flows of Liquids and Gases: Proc. All-Union Sci. Conf.]. Pt. 3. Novopolotsk, Novopolotsk. Politekh. Inst., 1982, pp. 22–28. (In Russian)

Для цитирования: Зув Ю.В. Об использовании критерия Стокса при математическом моделировании двухфазных струйных течений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 341–354. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354.

For citation: Zuev Yu.V. About the use of the Stokes number for mathematical modeling of two-phase jet flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 341–354. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354. (In Russian)