Известия вузов. Математика
2008, № 10, с. 55–69

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

А.Г. ЧЕНЦОВ

КВАЗИСТРАТЕГИИ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ

Аннотация. Рассматривается абстрактная задача управления с элементами неопределенности, в которой управляющие процедуры отождествляются с многозначными квазистратегиями. Цель управления состоит в наведении на целевое множество при наличии фазовых ограничений. Для построения множества успешной разрешимости используется известный в теории дифференциальных игр метод программных итераций. Показано, что предел итерационной процедуры имеет смысл множества позиционного поглощения (стабильного моста) в смысле Н.Н. Красовского и определяет искомое множество успешной разрешимости в классе квазистратегий.

Ключевые слова: многозначная квазистратегия, метод программных итераций, задача удержания, оператор программного поглощения.

УДК: 517.972

Abstract. We consider an abstract guidance control problem with elements of uncertainty, where the control procedures are identified with set-valued quasistrategies. The goal of the control consists in the guidance to the goal set under phase constraints. We construct the solvability set by the method of programmed iterations which is well known in the theory of differential games. We prove that the limit of the iterative procedure has the sense of the set of positional absorption (the stable bridge) introduced by N.N. Krasovskii. This limit coincides with the solvability set in the class of quasistrategies.

Keywords: set-valued quasistrategy, method of programmed iterations, the problem of confinement, operator of programmed absorption.

Введение

Список основных сокращений: ДИ (дифференциальная игра), МПИ (метод программных итераций), ОПП (оператор программного поглощения), п/м (подмножество), п/п (подпространство), ТП (топологическое пространство). Кроме упомянутой сводки, используемые ниже сокращения будут разъясняться всякий раз при первом упоминании в тексте статьи.

Задачи управления в условиях помех (понимаемых в широком смысле) обычно рассматриваются в рамках теории дифференциальных игр (ДИ) ([1]–[7]). В теории ДИ используются различные формализации игрового управления: формализация Н.Н. Красовского, в рамках которой предполагается формирование управления по принципу обратной связи;

Поступила 28.10.2002

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00414, 07-01=96088, 08-08-00981а).

формализация в классе квазистратегий, восходящая к [8], [9]; формализация в классе ε-стратегий, предложенная Б.Н. Пшеничным; кусочно-программные процедуры управления [10], [11]. Используемые ниже процедуры МПИ восходят к исследованиям [12]–[19], связанным с решением ДИ в позиционной формализации Н.Н. Красовского и использующим также аппарат многозначных квазистратегий [20]–[22]. При естественных условиях информационной согласованности эти две формализации оказываются эквивалентными по результату, достигаемому в ДИ. Напомним, что при использовании позиционной формализации Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным был установлен основополагающий факт теории ДИ — теорема об альтернативе [3]. Одна из ранее упомянутых версий МПИ была ориентирована на построение альтернативного разбиения пространства позиций, существование которого следует из этой теоремы. В данной работе рассматривается абстрактная версия этой конструкции в условиях, когда нет соответствующего аналога теоремы об альтернативе [3] (не установлен в той формулировке, которая дана в [3] и в других исследованиях по теории ДИ). Построены два варианта МПИ: непрямой, являющийся аналогом [23] и реализуемый на пространстве множеств, элементами которых являются позиции игры, и прямой (в смысле построения процедур управления), подобный [24]–[26]. Используется двойственность упомянутых версий МПИ в форме [23], [27]. Установлено, что множество всех начальных позиций, из которых успешно разрешима задача наведения на целевое множество M при фазовых ограничениях, определяемых множеством N (M и N — множества в пространстве позиций), совпадает с пределом непрямой итерационной процедуры. Кроме того, установлена структура квазистратегий, гарантирующих приведение всех своих траекторий на цель M в пределах N.

В рассматриваемой постановке допускается случай “прерывистого” времени. Именно, конечный промежуток времени $I_0 = [t_0, \vartheta_0]$, $t_0 < \vartheta_0$, используемый обычно в задачах теории ДИ, связанных с теоремой об альтернативе, заменяется здесь непустым компактом T с наименьшим элементом t_0 и наибольшим элементом ϑ_0. Тем самым появляются некоторые новые возможности в комбинировании задач управления с непрерывным и дискретным временем (заметим, что вариант МПИ для решения игровой задачи удержания в фазовых ограничениях с дискретным временем построен в [28]). Так, например, можно рассматривать случай, когда $T = T_1 \bigcup T_2$, где T_1 есть множество всех значений последовательности $\xi_k = 1 - k^{-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$, а T_2 — отрезок $[1, 2]$. Движение на T_1 может отвечать вычислительной итерационной процедуре, предел которой может использоваться в качестве начального состояния дифференциальной управляемой системы, функционирующей на T_2. Как процесс вычислений (движение на T_1), так и перемещение на T_2 осложняются действием помех. Разумеется, возможны и другие интерпретации.

В последующем изложении введена система условий, некоторые из них используются на всем протяжении статьи и являются “глобальными”, а другие участвуют лишь в получении утверждений частного характера. В этой связи отметим, что непрямая версия МПИ может использоваться в задачах, не являющихся по смыслу динамическими, но касающихся преобразований множеств в функциональных пространствах. Данная версия МПИ допускает идейные аналогии с итерационными процедурами в полуупорядоченных пространствах (напр., [29], сс. 237, 238); в построении этих процедур важную роль сыграли исследования Л.В. Канторовича. Конструкции, подобные МПИ, нашли свое применение и в задачах динамики, не связанных формально с ДИ. Так, например, при построении обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби (развитие этого направления связано с фундаментальными исследованиями А.И. Субботина [6]) в [30], [31] были использованы конструкции, аналогичные МПИ. Имеется и ряд других применений такого рода. В этих случаях “частичные” результаты, связанные с МПИ и требующие меньшего числа условий, могут также оказаться полезными (вторая часть [31]). По этой причине в данной статье круг используемых предположений конкретизируется по ходу изложения.

Отметим, наконец, что некоторые из последующих условий, связанные со свойством компактности пучка траекторий, могут нарушаться уже в достаточно традиционных постановках задач теории ДИ. В этих случаях для построения содержательной теории следует использовать конструкции расширения соответствующих задач управления ([32]–[36] и другие работы, касающиеся компактификаций пространства управлений и пространства траекторий). В данной статье предполагается фактически, что необходимое в тех или иных случаях расширение пространства управлений уже построено. В то же время упомянутая проблема (построения расширений) представляет в ряде случаев самостоятельный интерес, а ее решение достигается зачастую в подходящем классе мер или мерозначных функций [32]–[36].

1. Общие понятия

Далее используем кванторы и пропозициональные связки для сокращения записи высказываний; def заменяет далее фразу “по определению”, $\triangleq$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H; тогда $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$, где $\{\emptyset\}$ — синглетон, содержащий $\emptyset$, есть семейство всех непустых п/м H. Через B^A обозначаем множество всех операторов, действующих из множества A в множество B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f \mid C)$ есть def сужение ([37], с. 13) f на множество C.

Если z — упорядоченная пара, т. е. $z = (x, y)$ для некоторых объектов x и y, то через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ обозначаем компоненты z: $pr_1(z) = x$ и $pr_2(z) = y$. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathcal{N}_0 \triangleq \mathcal{N} \bigcup \{0\} = \{0; 1; 2; \dots\}$. Постулируем во избежание двусмысленности в традиционных обозначениях, что элементы $\mathcal{N}_0$ (целые неотрицательные числа) не являются множествами. Символ $\circ$ используем при обозначении суперпозиций.

Если H — множество и $\alpha \in H^H$, то будем рассматривать степени $\alpha^k \in H^H$, $k \in \mathcal{N}_0$, оператора α. Введем прежде всего тождественное преобразование $\mathbf{I}_H \in H^H$ множества H: $\mathbf{I}_H(h) \triangleq h \quad \forall h \in H$. Теперь уже для произвольных множества H и оператора $\alpha \in H^H$ полагаем, как обычно, что последовательность $(\alpha^k)_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow H^H$ (конечных) степеней α имеет вид $\alpha^0 \triangleq \mathbf{I}_H$ и $\alpha^k = \alpha \circ \alpha^{k-1} \quad \forall k \in \mathcal{N}$. Как и в [23], [27], в двух специальных случаях вводим бесконечную степень оператора, действующего в заданном множестве. Если $\mathcal{E}$ — семейство всех п/м некоторого множества E (т. е. $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$) и $\alpha \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$, то $\overset{\infty}{\alpha} \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$ имеет вид

$$\overset{\infty}{\alpha}(S) \triangleq \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \alpha^k(S) \quad \forall S \in \mathcal{E} \tag{1.1}$$

(данное определение содержательно, когда α — сжимающий оператор).

Если A и B — множества, то полагаем $\mathbf{M}(A, B) \triangleq \mathcal{P}(B)^A$ (множество всех мультифункций из A в B); если β — оператор, действующий в $\mathbf{M}(A, B)$, то $\beta^\infty : \mathbf{M}(A, B) \longrightarrow \mathbf{M}(A, B)$ действует по правилу $\forall \mathcal{H} \in \mathbf{M}(A, B)$, $\forall a \in A$

$$\beta^\infty(\mathcal{H})(a) \triangleq \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \beta^k(\mathcal{H})(a). \tag{1.2}$$

Рассматриваем (1.1) и (1.2) как два варианта бесконечной степени оператора. Соответственно этому целесообразно ввести две версии упорядоченности: 1) по вложению, 2) упорядоченность мультифункций по вложению, реализуемая поточечно. В части 2) имеем: если A и B – множества, $u, v \in \mathbf{M}(A, B)$, то def $(u \sqsubseteq v) \Longleftrightarrow (u(a) \subset v(a) \quad \forall a \in A)$. Потребуется понятие монотонной сходимости множеств и мультифункций. Первое соответствует ([38], гл. I) и ([36], с. 150): если E — множество, $(A_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность п/м E и $A \in \mathcal{P}(E)$, то $(A_i)_{i\in\mathcal{N}} \downarrow A$ означает def что $1'$) A есть пересечение всех множеств A_i, $i \in \mathcal{N}$; $2'$) $A_{j+1} \subset A_j$ $\forall j \in \mathcal{N}$. Второе понятие сводится к поточечному применению первого: если A и B – множества, $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{N}}$ есть последовательность в $\mathbf{M}(A, B)$ и $\alpha \in \mathbf{M}(A, B)$, то $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \alpha$ означает def, что $(\alpha_i(a))_{i\in\mathcal{N}} \downarrow \alpha(a) \quad \forall a \in A$. В связи с этими и другими подобными соглашениями см. ([23], с. 133).

Приведем сводку обозначений топологического характера [39], [40], согласующуюся с ([36], гл. 1). Если (X, τ) — ТП, то через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ условимся обозначать семейство всех компактных ([39], с. 196) в смысле (X, τ) п/м множества X; если $\Psi \in \mathcal{P}(X)$, то $\tau|_\Psi$ есть def топология Ψ, индуцированная [40] из (X, τ), а само Ψ в этой топологии есть подпространство (п/п) ТП (X, τ). Непрерывность операторов, действующих в ТП, понимается традиционно [39], [40] (см. также в [39], [40] определение и свойства псевдометрики).

2. Абстрактная управляемая система в псевдометрическом пространстве

Фиксируем далее $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$; пусть $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ и $T \in \mathcal{P}'(I_0)$, т. е. T есть непустое п/м I_0. Всюду в дальнейшем предполагаем, что T есть множество, замкнутое в обычной $|\cdot|$-топологии $\tau_\mathbb{R}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$; кроме того, постулируем далее $(t_0 \in T) \,\&\, (\vartheta_0 \in T)$. Итак, T есть непустой компакт в $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ с наименьшим элементом t_0 и наибольшим элементом ϑ_0; именуем момент t_0 начальным, а момент ϑ_0 — конечным. Предполагаем, однако, что система функционирует на множестве T, исчезая “из поля зрения” на $I_0 \setminus T$ (не исключаем совпадение T и I_0, как в [23], но допускаем и другие версии T).

Фиксируем непустое множество X в качестве фазового пространства системы; пусть $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ есть псевдометрика [39], [40] множества X; итак, (X, ρ) — псевдометрическое фазовое пространство. Рассматриваем непустое множество

$$D \triangleq T \times X \tag{2.1}$$

в качестве пространства позиций, оснащаемого псевдометрикой $\mathbf{d} : D \times D \longrightarrow [0, \infty[$, для которой $\mathbf{d}(u, v) \triangleq \sup\big(\{|pr_1(u) - pr_1(v)|;\ \rho(pr_2(u), pr_2(v))\}\big) \quad \forall u \in D, \quad \forall v \in D$; $(D, \mathbf{d})$ — псевдометрическое пространство. Через $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{D}$ обозначаем топологии множеств X и D, порожденные псевдометриками ρ и d соответственно; $(X, \mathfrak{X})$ и $(D, \mathfrak{D})$ суть псевдометризуемые ТП. Кроме того, через $\mathfrak{T}$ обозначаем топологию T, порожденную метрикой-модулем множества T; иными словами, $\mathfrak{T} = \tau_\mathbb{R}|_T$, а $(T, \mathfrak{T})$ есть компактное ТП, являющееся п/п ТП $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$. В отношении $(D, \mathfrak{D})$ заметим, что данное ТП есть стандартное произведение ([40], с. 125) ТП $(T, \mathfrak{T})$ и $(X, \mathfrak{X})$. Через $\mathfrak{F}$ (через $\mathcal{F}$) обозначаем семейство всех замкнутых в ТП $(X, \mathfrak{X})$ (в ТП $(D, \mathfrak{D})$) п/м множества X (множества D). Пусть $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{P}(D)$ (семейство всех п/м D). Для $H \in \mathcal{D}$ и $t \in T$ полагаем $H\langle t\rangle \triangleq \{x \in X \mid (t, x) \in H\}$. Тогда

$$\mathbf{F} \triangleq \{F \in \mathcal{D} \mid F\langle t\rangle \in \mathfrak{F}\ \forall t \in T\} \tag{2.2}$$

есть семейство всех п/м D, замкнутых в стандартной топологии произведения ТП $(T, \mathcal{P}(T))$ и $(X, \mathfrak{X})$; при этом $(T, \mathcal{P}(T))$ есть множество T в дискретной топологии. Ясно, что семейство (2.2) замкнуто относительно произвольных пересечений. Фиксируем

$$(M \in \mathcal{F}) \,\&\, (N \in \mathbf{F}) \tag{2.3}$$

в качестве параметров, определяющих рассматриваемую игровую задачу. Итак, в (2.3) $M \subset D$ — замкнутое целевое множество, а N формирует систему $N\langle t \rangle$, $t \in T$, фазовых ограничений в виде параметризованного семейства замкнутых п/м X.

Через $\mathbf{C}$ обозначаем множество всех функций $h \in X^T$, непрерывных в смысле ТП $(T, \mathfrak{T})$ и $(X, \mathfrak{X})$; разумеется, данная непрерывность тождественна секвенциальной непрерывности в смысле метрики-модуля множества T и псевдометрики ρ. Если $h_* \in \mathbf{C}$ и $h^* \in \mathbf{C}$, то функция $(\rho(h_*(t), h^*(t)))_{t \in T}$ из T в $[0, \infty[$ непрерывна на $(T, \mathfrak{T})$ и, следовательно, достигает максимума. С учетом этого введем псевдометрику $\rho_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow [0, \infty[$ множества $\mathbf{C}$ посредством правила $\forall h_1, h_2 \in \mathbf{C}$

$$\rho_{\mathbf{C}}(h_1, h_2) \triangleq \max_{t \in T} \rho(h_1(t), h_2(t)); \tag{2.4}$$

$\rho_{\mathbf{C}}$ — псевдометрика равномерной сходимости в $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^T)$. Топологию $\mathbf{C}$, порожденную псевдометрикой $\rho_{\mathbf{C}}$, обозначаем через $\mathfrak{C}$, получая в виде $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$ псевдометризуемое ТП; семейство всех замкнутых в смысле ТП $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$ п/м $\mathbf{C}$ обозначаем через $\mathbb{F}$.

Введем, кроме того, топологию поточечной сходимости в $\mathbf{C}$, обозначаемую далее через θ. Итак, пусть $\otimes^T(\mathfrak{X})$ есть def топология тихоновского произведения ([39], с. 127; [40], с. 127) экземпляров $(X, \mathfrak{X})$ с индексным множеством T; тогда $\otimes^T(\mathfrak{X})$ — топология X^T, и $\theta \triangleq \otimes^T(\mathfrak{X})|_{\mathbf{C}}$ реализует $(\mathbf{C}, \theta)$ — п/п ТП $(X^T, \otimes^T(\mathfrak{X}))$. Разумеется, $\theta \subset \mathfrak{C}$ и

$$(\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \subset (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]; \tag{2.5}$$

свойство (2.5) существенно в вопросах, касающихся сходимости прямой итерационной процедуры (на пространстве мультифункций) к наибольшему неупреждающему мультиселектору целевой мультифункции, связанной с (2.3).

Пусть Υ – непустое множество и $\Omega \in \mathcal{P}'(\Upsilon^T)$. Итак, Ω есть непустое множество, элементы которого суть функции из T в Υ. Функции $\omega \in \Omega$ играют далее роль реализаций неопределенных факторов управляемого процесса. Фиксируем оператор

$$S : D \times \Omega \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbf{C}), \tag{2.6}$$

именуемый далее системой. Если $z \in D$ — позиция, а $\omega \in \Omega$, то $S(z, \omega)$ есть непустой пучок траекторий системы (2.6), порожденный реализацией ω из позиции z (в связи с этой интерпретацией см. ([27], сс. 79, 80)). Выбор траектории из пучка находится в распоряжении управляющей стороны, заинтересованной в наведении на M в пределах N (см. (2.3)). При этом, однако, в процессе развития траектории может произойти переключение ω, т.е. изменение в некоторый момент t, следующий за $pr_1(z)$, функции ω на другую функцию $\widetilde{\omega} \in \Omega$, у которой начало такое же, как у ω. Следовательно, и сложившийся к моменту t кусок траектории следует продолжать уже траекторией из другого пучка. Заметим, что в управляемых системах конкретный выбор траектории из пучка реализуется за счет надлежащего выбора управления; следовательно, и смену траектории в упомянутый момент t надлежит осуществить посредством переключения управления ([24]–[27], [36], гл. 6). При этом обычно не возникает проблемы продолжения исходной ω-траектории траекторией из пучка, соответствующего $\widetilde{\omega}$; такая проблема существует, однако, если это продолжение подчинено условиям наведения на M в пределах N. Иными словами, сталкиваемся с достаточно трудным вопросом о существовании и структуре неупреждающих правил выбора траекторий из пучка с соблюдением условий решаемой задачи.

Если $t \in I_0$, то условимся об обозначениях $\big(\mathbb{T}_t \triangleq T \bigcap [t_0, t]\big) \,\&\, \big(\mathbf{T}_t \triangleq T \bigcap [t, \vartheta_0]\big)$; в основном будет нужен случай $t \in T$, для которого $\mathbb{T}_t$ имеет смысл “прошлого”, а $\mathbf{T}_t$ —

"будущего" системы (заметим, что $\mathbf{T}_t \setminus \{t\} = T\bigcap]t, \vartheta_0]$). Если $t \in T$, то

$$(\widetilde{\Omega}_t(\omega) \triangleq \{\nu \in \Omega \mid (\omega|\mathbb{T}_t) = (\nu|\mathbb{T}_t)\} \ \forall \omega \in \Omega) \,\&\, (\widetilde{Z}_t(u) \triangleq \{v \in \mathbf{C} \mid (u|\mathbb{T}_t) = (v|\mathbb{T}_t)\} \ \forall u \in \mathbf{C}).$$

В терминах этих множеств (ростков) введем важный в дальнейшем тип операторов. Пусть сначала $\mathfrak{M}[\Omega; \mathbf{C}]$ есть def множество всех операторов α, действующих каждый в $\mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ и таких, что $\alpha(\mathcal{H}) \sqsubseteq \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$; определение соответствует ([23], с. 141). Если $t \in T$, то $\mathbf{\Gamma}_t \in \mathfrak{M}[\Omega; \mathbf{C}]$ есть def оператор, определяемый правилом $\forall \zeta \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$, $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathbf{\Gamma}_t(\zeta)(\omega) \triangleq \big\{h \in \zeta(\omega) \,\big|\, \widetilde{Z}_\xi(h) \bigcap \zeta(\nu) \neq \emptyset \ \forall \xi \in \mathbf{T}_t, \ \forall \nu \in \widetilde{\Omega}_\xi(\omega)\big\}. \tag{2.7}$$

Роль операторов (2.7) определяется предложением 6.3.1 из [36]: в терминах свойства неподвижной точки Γ_t характеризуется неупреждаемость мультифункций из Ω в $\mathbf{C}$ в условиях, когда t играет роль начального момента времени. Пусть

$$\mathbb{N}_t \triangleq \{\alpha \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C}) \mid \alpha = \Gamma_t(\alpha)\} \ \forall t \in T. \tag{2.8}$$

Элементы множеств типа (2.8) рассматривались в ([23]–[27], [36], гл. 6). Для нас, однако, существенны такого рода элементы с дополнительным свойством, касающимся системы (2.6): если $z \in D$, то

$$Q_z \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N}_{pr_1(z)} \mid \alpha(\omega) \in \mathcal{P}'(S(z, \omega)) \ \forall \omega \in \Omega\}; \tag{2.9}$$

элементы (2.9) — многозначные квазистратегии, реализуемые в (2.6). По своему смыслу эти элементы являются неупреждающими правилами выбора траекторий из пучков, определяемых системой (2.6) при фиксации начальной позиции z. В определениях (2.7)–(2.9) фактически допускается память относительно помеховых реализаций $\omega \in \Omega$ (то же самое можно сказать и о (2.6)), хотя, как правило, при заданном z траектории из пучка $S(z, \omega)$ зависят лишь от $(\omega \mid \mathbf{T}_{pr_1(z)})$, что облегчает дело.

Если $H \in \mathcal{D}, \ z \in D$ и $\omega \in \Omega$, то множество

$$\Pi(\omega \mid z, H) \triangleq \{h \in S(z, \omega) \mid \exists \vartheta \in \mathbf{T}_{pr_1(z)} : ((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \,\&\, ((\xi, h(\xi)) \in H \ \forall \xi \in \mathbf{T}_{pr_1(z)} \bigcap [pr_1(z), \vartheta[\,)\} \tag{2.10}$$

аналогично используемому в ([23], с. 136). Как и в ([23], с. 136), через $\Pi(\cdot \mid z, H)$ при $H \in \mathcal{D}$ и $z \in D$ условимся обозначать оператор из $\mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ со значениями (2.10). Кроме того, при $z \in D$ полагаем

$$\mathcal{C}_z^0 \triangleq \Pi(\cdot \mid z, N). \tag{2.11}$$

Рассматриваем (2.11) как целевую мультифункцию, отвечающую выбору z в качестве начальной позиции системы. Тогда $\forall z \in N$

$$Q_z^0 \triangleq \{\alpha \in Q_z \mid \alpha \sqsubseteq \mathcal{C}_z^0\}. \tag{2.12}$$

В (2.12) при фиксированной позиции $z \in N$ ввели множество всех многозначных квазистратегий на "промежутке" $\mathbf{T}_{pr_1(z)}$, разрешающих задачу наведения на M в пределах N из позиции z. В этой связи естественна

Основная задача. Найти множество $N^0 \triangleq \{z \in N \mid Q_z^0 \neq \emptyset\}$ успешной разрешимости задачи наведения на M в пределах N.

Разумеется, как и в случае традиционной ДИ сближения–уклонения ([3], с. 49; [4], с. 75), квазистратегии являются идеализированными управляющими процедурами (см. также [8], [9], [41]). Однако в упомянутых задачах теории ДИ квазистратегии (в том числе многозначные) могут использоваться при построении реализуемых на практике ([4], с. 200) процедур управления с поводырем (моделью) ([3], с. 248; [4], с. 200). Следовательно, основная задача может в ряде случаев иметь и практический интерес в плане выяснения потенциальных возможностей управляемой системы: эти возможности характеризуются множеством N^0.

3. Некоторые условия на систему и их обсуждение

Рассмотрим ряд возможных условий на систему (2.6). Они будут накладываться по мере надобности; сейчас их только перечислим и совсем кратко обсудим.

Условие 3.1 (замкнутозначности пучков)**.** $S(z,\omega) \in \mathbb{F} \quad \forall z \in D, \quad \forall \omega \in \Omega$.

Через $\tau_{\otimes}$ обозначаем (псевдометризуемую) топологию множества $X \times \mathbf{C}$, определяемую произведением ([40], с. 125) ТП $(X, \mathfrak{X})$ и $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$; через $\mathfrak{F}_{\otimes}$ обозначаем семейство всех п/м $X \times \mathbf{C}$, замкнутых в псевдометризуемом ТП $(X \times \mathbf{C}, \tau_{\otimes})$.

Условие 3.2 (замкнутости графика)**.** $\{(x,h) \in X \times \mathbf{C} \mid h \in S((t,x),\omega)\} \in \mathfrak{F}_{\otimes} \quad \forall t \in T$, $\forall \omega \in \Omega$.

Условие 3.3. $\forall t \in T$, $\forall x \in X$, $\forall \omega \in \Omega \;\; \exists \varepsilon \in]0,\infty[$, $\exists K \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]$

$$(\rho(x,\widetilde{x}) < \varepsilon) \Longrightarrow (S((t,\widetilde{x}),\omega) \subset K) \;\; \forall \widetilde{x} \in X.$$

Три вышеупомянутых условия (или их аналоги) существенны для работоспособности процедур МПИ и в традиционном случае ДИ; имеются в виду итерационные методы построения (стабильного) множества позиционного поглощения ([3], с. 69).

Условие 3.4. $\forall z \in D$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall h \in S(z,\omega)$, $\forall t \in \mathbf{T}_{pr_1(z)} \setminus \{\vartheta_0\} \;\; \exists \widetilde{h} \in S((t,h(t)),\omega)$:

$$(h \mid \mathbf{T}_t) = (\widetilde{h} \mid \mathbf{T}_t).$$

Введем (обычное) правило склейки функций с областью определения T: если Λ — множество, $u \in \Lambda^T$, $v \in \Lambda^T$ и $t \in T$, то $(u \square v)_t \in \Lambda^T$ определяется правилом:

$$((u \square v)_t(\xi) \triangleq u(\xi) \;\forall \xi \in \mathbb{T}_t) \,\&\, ((u \square v)_t(\xi) \triangleq v(\xi) \;\forall \xi \in \mathbf{T}_t \setminus \{t\}). \tag{3.1}$$

Отметим, что в качестве Λ будем обычно использовать Υ и X.

Условие 3.5. $\forall \omega_1 \in \Omega, \quad \forall \omega_2 \in \Omega, \quad \forall t \in T \quad (\omega_1 \square \omega_2)_t \in \Omega$.

Условие 3.6. Пространство (X,ρ) является метрическим: ρ есть метрика X.

Условие 3.7. $\forall z \in N, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall h \in S(z,\omega) \quad h(pr_1(z)) = pr_2(z)$.

Далее будут накладываться и некоторые иные условия, введение которых будет, в частности, обусловлено справедливостью условия 3.5. Сейчас, однако, последнее условие накладываться не будет. Первая тройка условий топологического характера в традиционных задачах управления с помехами ориентирована на получение важного свойства полунепрерывности сверху по включению, здесь ослабленному в том смысле, что момент времени, определяющий первую компоненту позиции, не варьируется. Последняя особенность связана с желанием охватить более широкий круг систем вида (2.6). С другой стороны, в своей совокупности эти условия ведут к компактнозначности мультифункций (2.6). Для реализации условий такого рода уже в традиционном случае нелинейной ДИ требуется зачастую использовать конструкции расширений с применением скользящих режимов ([12], [14], [19]). Условия 3.4 и 3.7 традиционны для динамических систем. Наконец, условие 3.5 выполняется для задач управления с геометрическими ограничениями на реализации помех; эти задачи обычно и рассматриваются в теории ДИ.

4. Оператор программного поглощения

В данном разделе приведено обобщение схемы раздела 5 из [23]. Как и в [23], введем оператор программного поглощения (ОПП)

$$\mathbf{A} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \tag{4.1}$$

посредством следующего правила: $\forall H \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \ \Pi(\omega|z, H) \neq \emptyset \ \forall \omega \in \Omega\}. \tag{4.2}$$

Имеем “игровой” оператор, характеризующий (см. (2.10)) возможности наведения на цель M в пределах H. Уместно истолковать $\mathbf{A}$ (4.1) в терминах “неигровых” операторов, действуя по аналогии с [23], [27]. Если $\omega \in \Omega$, то оператор $\mathbb{A}_\omega$, действующий в $\mathcal{D}$, определяем по правилу

$$\mathbb{A}_\omega(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega|z, H) \neq \emptyset\}. \tag{4.3}$$

Очевидная связь операторов (4.1)–(4.3) дается соотношением: при $H \in \mathcal{D}$ множество (4.2) есть пересечение всех множеств $\mathbb{A}_\omega(H)$, $\omega \in \Omega$. В связи с последующими рассуждениями полезно отметить, что $\forall H_1, H_2 \in \mathcal{D}$

$$(H_1 \subset H_2) \Longrightarrow (\Pi(\omega|z, H_1) \subset \Pi(\omega|z, H_2) \ \ \forall z \in D, \ \ \forall \omega \in \Omega). \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует свойство изотонности операторов $\mathbb{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$, и $\mathbf{A}$.

Предложение 4.1. *При условии* 3.4 $\ \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega \circ \mathbb{A}_\omega \quad \forall \omega \in \Omega$.

Доказательство аналогично обоснованию предложения 5.1 из [23]. Очевидно

Предложение 4.2. *Если* $H \in \mathcal{P}(N)$, *то* $(H = \mathbf{A}(H)) \Longleftrightarrow (H = \mathbb{A}_\omega(H) \quad \forall \omega \in \Omega)$.

Также очевидно ([23], с. 135)

Предложение 4.3. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.3. *Тогда*

$$S(z, \omega) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \ \ \forall z \in D, \ \ \forall \omega \in \Omega.$$

Предложение 4.4. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.3. *Пусть, кроме того,* $t \in T$ *и* $(x_i)_{i \in \mathcal{N}}$ *— последовательность в* X, *для которой* $\exists x \in X : (\rho(x_i, x))_{i \in \mathcal{N}} \longrightarrow 0$. *Тогда* $\forall \omega \in \Omega \ \ \exists K \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] : \bigcup\limits_{i \in \mathcal{N}} S((t, x_i), \omega) \subset K$.

Доказательство использует простейшие свойства компактных множеств в ТП ([39], [40]; [23], с. 135). Если использовать свойство замкнутости сечения множества, замкнутого в произведении двух ТП, то получим

Предложение 4.5. *Условие* 3.1 *следует из условия* 3.2.

Из (2.10) вытекает

Предложение 4.6. *При условии* 3.1 $\ \forall F \in \mathbf{F}, \ \ \forall z \in D, \ \ \forall \omega \in \Omega \ \ \Pi(\omega \mid z, F) \ \in \mathbb{F}$.

В связи с предложением 4.6 отметим, что при условии 3.1 $\ \forall z \in D, \ \ \forall \omega \in \Omega$

$$(S(z, \omega) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]) \Longrightarrow (\Pi(\omega \mid z, F) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \ \ \forall F \in \mathbf{F}).$$

С учетом предложения 4.3 получаем свойство: при условиях 3.1, 3.3

$$\Pi(\omega \mid z, F) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \ \ \forall F \in \mathbf{F}, \ \ \forall z \in D, \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{4.5}$$

Разумеется, предложения 4.3, 4.4, 4.6 и (4.5) имеет смысл комбинировать с предложением 4.5. Отметим, наконец, что в силу (2.2) $\ \mathcal{F} \subset \mathbf{F}$.

5. Непрямая версия метода программных итераций

В этом разделе рассматривается итерационная процедура в пространстве $\mathcal{D}$, реализующая перевод N в некоторое предельное множество, играющее (при некоторых условиях) важную роль в решении основной задачи. Предварительно рассмотрим свойства ОПП и вспомогательных операторов (4.3).

Предложение 5.1. *Пусть выполнены условия 3.2 и 3.3. Тогда* $\mathbb{A}_\omega(F) \in \mathbf{F} \quad \forall \omega \in \Omega$, $\forall F \in \mathbf{F}$.

Доказательство аналогично обоснованию предложения 5.3 из [23] за исключением несущественных деталей, связанных с использованием T в качестве аналога промежутка управления.

Предложение 5.2. *Пусть выполнены условия* 3.2–3.4. *Тогда*

$$\big\{F \in \mathbf{F}\bigcap \mathcal{P}(N) \mid F = \mathbf{A}(F)\big\} = \bigcap_{\omega \in \Omega} \big\{\mathbb{A}_\omega(F) : F \in \mathbf{F}\bigcap \mathcal{P}(N)\big\}.$$

Доказательство сводится к простой комбинации предложений 4.1, 4.2 и 5.1.

Предложение 5.3. *При условиях* 3.2, 3.3 $\mathbf{A}(F) \in \mathbf{F} \quad \forall F \in \mathbf{F}$.

Доказательство следует из представления ОПП (4.1) в терминах семейства операторов $\mathbb{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$, с учетом предложения 5.1.

Предложение 5.4. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.3, $(F_i)_{i \in \mathcal{N}}$ *— последовательность в* $\mathbf{F}$ *и* $F \in \mathcal{D}$. *Тогда* $((F_i)_{i\in\mathcal{N}} \downarrow F) \Longrightarrow ((\mathbf{A}(F_i))_{i\in\mathcal{N}} \downarrow \mathbf{A}(F))$.

Доказательство подобно доказательству предложения 5.6 из [23].

Рассмотрим последовательность $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathcal{N}_0$, степеней ОПП и оператор $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$, действующие в $\mathcal{D}$. При этом $\mathbf{A}^m = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{m-1} \quad \forall m \in \mathcal{N}$. Если $H \in \mathcal{D}$, то $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H)$ есть пересечение всех $\mathbf{A}^k(H)$, $k \in \mathcal{N}_0$. Ясно, что при $s \in \mathcal{N}_0$ множество $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H)$ есть пересечение всех $\mathbf{A}^k(H)$, $k \in \overrightarrow{s, \infty}$. В качестве H логично использовать N: тогда

$$(\mathbf{A}^0(N) = N) \,\&\, (\mathbf{A}^{k+1}(N) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^k(N)) \;\; \forall k \in \mathcal{N}_0) \tag{5.1}$$

рассматриваем как основную итерационную последовательность, при этом

$$(\mathbf{A}^s(N))_{s\in\mathcal{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N). \tag{5.2}$$

В силу (5.2) всегда имеем в виде $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ предел основной (непрямой) процедуры (5.1).

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 3.2 *и* 3.3. *Тогда*

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^k(N) \in \mathbf{F} \ \forall k \in \mathcal{N}_0) \,\&\, (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) \in \mathbf{F}) \,\&\, (\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)) \,\&\\ \&\, \big(\forall H \in \mathcal{P}(N) \quad \big((H = \mathbf{A}(H)) \Longrightarrow (H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N))\big)\big).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство подобно обоснованию теоремы 5.1 из [23], где используется предложение 2.1 из [31]. Дадим схему прямого доказательства, восходящую к [13], [19], [42]. Действительно, с учетом предложения 5.3 из (2.3) имеем первое утверждение в (5.3), откуда по свойствам $\mathbf{F}$ имеем $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) \in \mathbf{F}$. Из (5.2) и предложений 4.5 и 5.4 получаем сходимость

$$(\mathbf{A}^{k+1}(N))_{k\in\mathcal{N}} \downarrow \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)). \tag{5.4}$$

Из (5.4) получим, в частности, совпадение $\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N))$ и пересечения всех множеств $\mathbf{A}^k(N)$, $k \in \overrightarrow{2, \infty}$, т. е. третье утверждение в (5.3) выполняется. Последнее свойство следует из свойства изотонности оператора $\mathbf{A}$. $\square$

Подчеркнем, что в теореме 5.1, где речь идет о сходимости (см. (5.2)) непрямой итерационной процедуры к наибольшей (на $\mathcal{P}(N)$) по вложению неподвижной точке ОПП, не накладывалось условий динамического характера, что вполне согласуется с [42]: упомянутая версия МПИ не является, строго говоря, "динамической". Роль множества $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ в дальнейшем весьма существенна в связи с основной задачей об отыскании N^0.

Следствие 5.1. Пусть выполнены условия 3.2–3.4. Тогда $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ есть наибольший по вложению элемент семейства $\mathcal{S}_{\mathbf{F}}[N] \triangleq \bigcap_{\omega\in\Omega} \{\mathbb{A}_\omega(F) : F \in \mathbf{F} \bigcap \mathcal{P}(N)\}$, т. е. имеют место свойства $(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}[N]) \,\&\, (E \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) \quad \forall E \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}[N])$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложения 5.2 и теоремы 5.1. Следствие 5.1 определяет другой взгляд на $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$, не связанный непосредственно с процедурой (5.1), (5.2). В связи с таким подходом к представлению $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ отметим [19], [31], [43].

6. Двойственность итерационных процедур

Вернемся к основной задаче и к целевым мультифункциям, отвечающим позициям из N. Напомним (см. (2.11)), что $\mathcal{C}_z^0 \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C}) \quad \forall z \in N$. Более того, если $z \in N$, то $\mathcal{C}_z^0 : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\underset{\omega\in\Omega}{\cup} S(z,\omega))$. Пусть $\forall z \in D$

$$\mathcal{X}_z \triangleq \{\mathbb{T}_t : t \in \mathbf{T}_{pr_1(z)}\}. \tag{6.1}$$

Здесь определено (всякий раз) непустое семейство непустых п/м T. В терминах (6.1) элементы, определяющие основную задачу, можно свести к виду [24]–[26], полагая $\forall A \in \mathcal{P}'(T)$

$$(\Omega_0(\omega \mid A) \triangleq \{\nu \in \Omega \mid (\omega \mid A) = (\nu \mid A)\} \;\; \forall \omega \in \Omega) \,\&$$
$$\&\, (Z_0(h \mid A) \triangleq \{\widetilde{h} \in \mathbf{C} \mid (h \mid A) = (\widetilde{h} \mid A)\} \;\; \forall h \in \mathbf{C}). \tag{6.2}$$

В терминах (6.2) при $t \in T$ имеем (см. раздел 2) равенства

$$(\widetilde{\Omega}_t(\omega) = \Omega_0(\omega \mid \mathbb{T}_t) \; \forall \omega \in \Omega) \,\&\, (\widetilde{Z}_t(h) = Z_0(h \mid \mathbb{T}_t) \; \forall h \in \mathbf{C}). \tag{6.3}$$

Для удобства обозначений введем $\mathcal{X}[t] \triangleq \{\mathbb{T}_\xi : \xi \in \mathbf{T}_t\} \quad \forall t \in T$. В силу(6.1) имеем $\mathcal{X}_z = \mathcal{X}[pr_1(z)] \quad \forall z \in D$. Семейства $\mathcal{X}[t]$, $t \in T$, непусты и состоят из непустых п/м T каждое. Оператор (2.7) в терминах (6.2), (6.3) имеет следующий вид: при $t \in T$, $\mathcal{C} \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ и $\omega \in \Omega$

$$\Gamma_t(\mathcal{C})(\omega) = \{h \in \mathcal{C}(\omega) \mid \mathbb{Z}_0(h \mid E) \bigcap \mathcal{C}(\widetilde{\omega}) \neq \emptyset \; \forall E \in \mathcal{X}[t], \; \forall \widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid E)\}. \tag{6.4}$$

С учетом (6.4) получаем представление $\Gamma_{pr_1(z)}$, $z \in D$. Именно, $\forall z \in D, \quad \forall \mathcal{C} \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$, $\forall \omega \in \Omega$

$$\Gamma_{pr_1(z)}(\mathcal{C})(\omega) = \{h \in \mathcal{C}(\omega) \mid Z_0(h \mid E) \bigcap \mathcal{C}(\widetilde{\omega}) \neq \emptyset \; \forall E \in \mathcal{X}_z, \; \forall \widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid E)\}. \tag{6.5}$$

Представления (6.4), (6.5) соответствуют определениям [24]–[26] и ([36], гл. 6). Это означает, что $\mathbf{\Gamma}_t$, $t \in T$, и $\mathbf{\Gamma}_{pr_1(z)}$, $z \in D$, можно рассматривать как версии оператора $\mathbf{\Gamma}$ [24]–[26] и

([36], с. 314). В частности, теперь имеем следующий вариант предложения 6.3.1 из [36]: если $t \in T$, то $\mathbb{N}_t$ (2.8) есть множество всех $\beta \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ таких, что $\forall \omega_1 \in \Omega, \ \ \forall \omega_2 \in \Omega, \ \ \forall \xi \in \mathbf{T}_t$

$$((\omega_1 \mid \mathbb{T}_\xi) = (\omega_2 \mid \mathbb{T}_\xi)) \Longrightarrow \big(\{(h \mid \mathbb{T}_\xi) : h \in \beta(\omega_1)\} = \{(h \mid \mathbb{T}_\xi) : h \in \beta(\omega_2)\}\big). \qquad (6.6)$$

В виде (6.6) имеем традиционное условие неупреждаемости мультифункций. В качестве t в (6.6) можно использовать $pr_1(z)$, где $z \in D$. В этой связи $\forall z \in \mathbf{D}$ введем

$$\mathbb{N}^0_z \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N}_{pr_1(z)} \mid \alpha \sqsubseteq \ \mathcal{C}^0_z\}. \qquad (6.7)$$

В (6.7) имеем некоторое обобщение (2.12) (см. (2.9)): допускаем в (6.7) мультифункции (мультиселекторы $\mathcal{C}^0_z$) с пустыми значениями в отдельных точках области определения. При этом $\forall z \in N$

$$Q^0_z = \{\alpha \in \mathbb{N}^0_z \mid \alpha(\omega) \in \mathcal{P}'(S(z, \omega)) \ \forall \omega \in \Omega\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^0_z \mid \alpha(\omega) \neq \emptyset \ \forall \omega \in \Omega\}.$$

Далее, в согласии с [24]–[26] $\forall z \in N$ определяем

$$(na)[\mathcal{C}^0_z] \triangleq \Big(\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}^0_z} \mathcal{C}(\omega)\Big)_{\omega \in \Omega} \in \mathbb{N}^0_z \qquad (6.8)$$

(см. также соотношение (6.4.8) из [36]). При этом (см. (6.8)) $\forall z \in N, \ \ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{N}^0_z$

$$\mathcal{C} \sqsubseteq \ (na)[\mathcal{C}^0_z]. \qquad (6.9)$$

В своей совокупности (6.8), (6.9) характеризуют $(na)[\mathcal{C}^0_z]$ как $\sqsubseteq$-наибольший неупреждающий мультиселектор $\mathcal{C}^0_z$, где $z \in N$.

Введем теперь версии прямой итерационной процедуры: при $z \in N$ последовательность $(\Gamma^k_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z))_{k \in \mathcal{N}_0}$ имеет вид

$$(\Gamma^0_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z) = \mathcal{C}^0_z) \,\&\, (\Gamma^k_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z) = \Gamma_{pr_1(z)}(\Gamma^{k-1}_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z)) \ \ \forall k \in \mathcal{N}); \qquad (6.10)$$

данная процедура является априори сходящейся, т. е.

$$(\Gamma^k_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z))_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \Gamma^\infty_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z). \qquad (6.11)$$

В (6.10), (6.11) имеем некоторую аналогию с (5.1), (5.2); (6.10), (6.11) определяют теперь варианты прямой итерационной процедуры, реализуемые каждый для своей начальной позиции.

Всюду в дальнейшем полагаем выполненными условия 3.5 и 3.7. Следовательно, у нас $S(z, (\omega_1 \Box \omega_2)_t) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}) \ \ \forall z \in D, \ \ \forall \omega_1 \in \Omega, \ \ \forall \omega_2 \in \Omega, \ \ \forall t \in \mathbf{T}$. Постулируем в дальнейшем

Условие 6.1. $\forall z \in N, \ \ \forall \omega_1 \in \Omega, \ \ \forall \omega_2 \in \Omega, \ \ \forall t \in \mathbf{T}_{pr_1(z)} \setminus \{\vartheta_0\}, \ \ \forall h \in S(z, (\omega_1 \Box \omega_2)_t)$ $\exists \widetilde{h} \in S((t, h(t)), \omega_2) : (h \mid \mathbf{T}_t) = (\widetilde{h} \mid \mathbf{T}_t)$.

Заметим также, что (см. (3.1)) $\forall z \in D, \ \ \forall \omega_1 \in \Omega, \ \ \forall \omega_2 \in \Omega, \ \ \forall h_1 \in S(z, \omega_1), \ \ \forall t \in \mathbf{T}_{pr_1(z)}$, $\forall h_2 \in S((t, h_1(t)), \omega_2) \quad (h_1 \Box h_2)_t \ \in \ X^T$.

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным также

Условие 6.2. $\forall z \in N, \ \ \forall \omega_1 \in \Omega, \ \ \forall \omega_2 \in \Omega, \ \ \forall h_1 \in S(z, \omega_1), \ \ \forall t \in \mathbf{T}_{pr_1(z)}, \ \ \forall h_2 \in$ $S((t, h_1(t)), \omega_2) \quad (h_1 \Box h_2)_t \in S(z, (\omega_1 \Box \omega_2)_t)$.

Замечание 6.1. Условия 3.5, 6.1 и 6.2, постулируемые в последующем изложении (наряду с условием 3.7) и называемые иногда условиями нарезки–склейки (хотя чаще это относят к условиям типа 3.5) придают системе (2.6) элементы динамики с возможным сохранением памяти относительно прошлого реализации $\omega \in \Omega$. Кроме того, условия 3.7, 6.1 и 6.2 постулируются в привязке лишь к позициям интересующего нас множества N (см. (2.3)).

Можно усмотреть связь условий 3.4 и 6.1: последнее охватывает нужные в дальнейшем случаи, связываемые с реализацией склейки помеховых воздействий. Это существенно именно в вопросах полноты решения основной задачи, в то время как условие 3.4 (оно не предполагается выполненным) было ориентировано на исследование соотношений ОПП и операторов $\mathbb{A}_\omega,\ \omega \in \Omega$, а также на получение представлений в духе следствия 5.1.

Предложение 6.1. *Если* $H \in \mathcal{P}(N)$ *и* $z \in N$, *то* $\Gamma_{pr_1(z)}(\Pi(\cdot \mid z, H)) = \Pi(\cdot \mid z, \mathbf{A}(H))$.

Доказательство подобно в идейном отношении обоснованию предложения 6.1 из [23].

Теорема 6.1 (о двойственности итерационных процедур)**.** $\forall z \in N, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0$

$$\Gamma^k_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z) = \Pi(\cdot \mid z, \mathbf{A}^k(N)).$$

Доказательство следует из предложения 6.1 рассуждением по индукции.

Теорема 6.2. *Если* $z \in N$, *то справедливо равенство* $\Gamma^\infty_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z) = \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N))$.

Доказательство следует из теоремы 6.1 с учетом следующего легкопроверяемого свойства: если $h \in \mathbf{C}$, $H \in \mathcal{D}$ и $t \in T$, то множество

$$\big\{\vartheta \in \mathbf{T}_t \mid ((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \,\&\, ((\xi, h(\xi)) \in H \ \forall \xi \in \mathbf{T}_t \bigcap [t, \vartheta[\,)\big\}$$

замкнуто в ТП $(T, \mathfrak{T})$.

7. Проблема разрешимости задачи наведения в классе квазистратегий

В этом разделе получено утверждение о разрешимости основной задачи: дано представление N^0 как предела непрямой итерационной процедуры. Главную роль в этом обосновании играет установленная в разделе 6 двойственность непрямой и прямой версий МПИ. Рассмотрим сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 7.1. *Если* $z \in D$ *и* $\omega \in \Omega$, *то* $\mathcal{C}^0_z(\omega)$, *рассматриваемое как п/м* $S(z, \omega)$, *замкнуто в топологии* $\mathfrak{C}\mid_{S(z,\omega)}$ *множества* $S(z, \omega)$, *индуцированной из* $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$.

Доказательство аналогично обоснованию соответствующего фрагмента обоснования предложения 7.1 из [23]. Теперь уже $\forall z \in D, \quad \forall \omega \in \Omega$ имеем

$$(S(z, \omega) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]) \Longrightarrow (\mathcal{C}^0_z(\omega) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]). \tag{7.1}$$

Из предложений 4.3, 4.5 и (7.1) следует

Предложение 7.2. *Если выполнены условия* 3.2 *и* 3.3, *то*

$$\mathcal{C}^0_z(\omega) \in (\mathfrak{C} - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \quad \forall z \in D, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Из (2.5) и предложения 7.2 возникает

Следствие 7.1. Если выполнены условия 3.2 и 3.3, то

$$\mathcal{C}^0_z(\omega) \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{C}] \quad \forall z \in D, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным условие 3.6. Итак, далее (X, ρ) — метрическое пространство.

Предложение 7.3. *Если* $z \in N$ *и* $\mathcal{C}^0_z \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]^\Omega$, *то*

$$\Gamma^\infty_{pr_1(z)}(\mathcal{C}^0_z) = (na)[\mathcal{C}^0_z] \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]^\Omega. \tag{7.2}$$

Доказательство следует из положений [24]–[26] (напр., [24], с. 73 и [36], с. 344). Учитываем свойство отделимости ТП $(X, \mathfrak{X})$, что приводит к отделимости $(\mathbf{C}, \theta)$.

Следствие 7.2. Если выполнены условия 3.2 и 3.3, то (7.2) справедливо при всяком выборе $z \in N$.

Доказательство получаем комбинацией следствия 7.1 и предложения 7.3. С учетом теоремы 6.1 справедливо

Предложение 7.4. *Если $z \in N$ и $\mathcal{C}_z^0 \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{C}]^{\Omega}$, то*

$$(na)[\mathcal{C}_z^0] = \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)).$$

Следствие 7.3. При условиях 3.2, 3.3 имеем $(na)[\mathcal{C}_z^0] = \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)) \quad \forall z \in N$.

Введем эффективные области мультифункций из Ω в $\mathbf{C}$: если $\alpha \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$, то

$$(DOM)[\alpha] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq \emptyset\}.$$

В качестве α можно использовать $\Gamma^{\infty}_{pr_1(z)}(\mathcal{C}_z^0)$ и $(na)[\mathcal{C}_z^0]$ при $z \in N$.

Предложение 7.5. *Если $z \in N$ и $(DOM)[\Gamma^{\infty}_{pr_1(z)}(\mathcal{C}_z^0)] = \Omega$, то $z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$.*

Схема доказательства подобна обоснованию предложения 7.2 из [23].

Следствие 7.4. Если $z \in N$, то

$$\big((DOM)\big[(na)[\mathcal{C}_z^0]\big] = \Omega\big) \Longrightarrow (z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)).$$

Доказательство использует оценку (6.8.6) в [36] и предложение 7.5.

Предложение 7.6. *Если выполнены условия* 3.2, 3.3, *то*

$$(DOM)\big[(na)[\mathcal{C}_z^0]\big] = \Omega \ \ \forall z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N).$$

Доказательство подобно в логическом отношении обоснованию предложения 7.3 из [23]; оно существенно использует теорему 5.1. Из следствия 7.4 и предложения 7.6 получаем свойство: если выполнены условия 3.2, 3.3, то

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) = \big\{z \in N \mid (DOM)\big[(na)[\mathcal{C}_z^0]\big] = \Omega\big\}. \tag{7.3}$$

Теперь полезно учесть представление Q_z^0, сформулированное после (6.7). В итоге с учетом (7.3) получаем

Предложение 7.7. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.3. *Тогда*

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) = \{z \in N \mid (na)[\mathcal{C}_z^0] \in Q_z^0\}.$$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.3. *Тогда $N^0 = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$.*

Доказательство. Пусть $z^0 \in N^0$, т. е. $z^0 \in N$ и $Q_z^0 \neq \emptyset$ при $z = z^0$. Выберем произвольно $\alpha^0 \in Q_{z^0}^0$. Тогда (см. раздел 6) $\alpha^0 \in \mathbb{N}_{z^0}^0$ и при этом

$$\alpha^0(\omega) \neq \emptyset \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{7.4}$$

В силу (6.9) $\alpha^0 \sqsubseteq (na)[\mathcal{C}_z^0]$, откуда с учетом (7.4) получаем

$$(na)[\mathcal{C}_{z^0}^0](\omega) \neq \emptyset \ \ \forall \omega \in \Omega.$$

В силу (6.8) теперь имеем свойство $(na)[\mathcal{C}^0_{z^0}] \in Q^0_{z^0}$, а тогда из предложения 7.7 получаем $z^0 \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$. Вложение

$$N^0 \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N) \tag{7.5}$$

установлено. Если $z_0 \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$, то $z_0 \in N$ и $(na)[\mathcal{C}^0_{z_0}] \in Q^0_{z_0}$ по предложению 7.7. Тогда $Q^0_{z_0} \neq \emptyset$ и $z_0 \in N^0$, чем и устанавливается вложение, противоположное (7.5). $\square$

Итак, решение основной задачи полностью определяется пределом непрямой итерационной процедуры при условиях, обеспечивающих (в теореме 5.1) свойство неподвижной точки для упомянутого предела (см. также (5.1), (5.2)). При этих же условиях следствие 7.3 определяет, в совокупности с предложением 7.7, структуру разрешающих многозначных квазистратегий. Тем самым исчерпывающее решение задачи достигается при следующих условиях: 3.2, 3.3, 3.5–3.7, 6.1 и 6.2; при их выполнении $N^0 = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ и для позиций $z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)$ (и только для них) $(na)[\mathcal{C}^0_z] = \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(N)) \in Q^0_z$.

Следовательно, мы имеем и представление множества успешной разрешимости задачи наведения, и структуру разрешающих квазистратегий. (Напомним здесь (6.8), означающее, что найденная структура разрешающих квазистратегий обладает наиболее “свободной” реакцией на реализации неопределенных факторов [13], [19].)

Литература

[1] Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* – М.: Мир, 1967. – 479 с.

[2] Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.

[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.

[4] Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.

[5] Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.

[6] Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби.* – М.: Наука, 1991. – 215 с.

[7] Красовский Н.Н. *Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели* // Матем. сб. – 1978. – Т. 107. – № 4. – С. 795–822.

[8] Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1969. – V. 3. – № 3. – P. 153–163.

[9] Elliott R.J., Kalton N.J. *The existence of value in differential games* // Memoirs of the Amer. Math. Soc. – 1972. – № 126. – 67 p.

[10] Fleming W.H. *A note on differential games of prescribed duration. Contributions to the theory of games* //Princeton Univ. Press. – 1957. – V. 3. – 126 p.

[11] Friedman A. *Differential games.* – New York, 1971. – 350 p.

[12] Ченцов А.Г. *О структуре одной игровой задачи сближения* // ДАН СССР. – 1975. – Т. 224. – № 6. – С. 1272–1275.

[13] Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 1. – С. 73–76.

[14] Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения с информационной памятью* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 306–308.

[15] Ченцов А.Г. *Об игровой задаче сближения в заданный момент времени* // Матем. сб. – 1976. – Т. 99. – № 3. – С. 394–420.

[16] Чистяков С.В. *К решению игровых задач преследования* // ПММ. – 1977. – Т. 41. – № 5. – С. 825–832.

[17] Ченцов А.Г. *Об игровой задаче наведения к заданному моменту времени* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1978. – Т. 42. – № 2. – С. 455–467.

[18] Ченцов А.Г. *Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 1. – С. 36–39.

[19] Ченцов А.Г. *Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения* // АН СССР. УНЦ. ИММ. – Свердловск. – 1979 г. – 103 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79 Деп.

[20] Ченцов А.Г. *Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 10. – С. 1801–1808.

[21] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. *On the design of differential games*, I // Probl. Control and Inform. Theory. – 1977. – V. 6. – № 5–6. – P. 381–395.
[22] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. *On the design of differential games*, II // Probl. Control and Inform. Theory. – 1979. – V. 9. – № 1. – P. 3–11.
[23] Ченцов А.Г. *К вопросу о соотношении различных версий метода программных итераций: позиционный вариант* // Кибернетика и системн. анал. – 2002. – № 3. – С. 130–149.
[24] Ченцов А.Г. *К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 66–76.
[25] Ченцов А.Г. *Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций.* I // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 4. – С. 470–480.
[26] Ченцов А.Г. *Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций.* II // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 679–688.
[27] Ченцов А.Г. *К вопросу о двойственности различных версий метода программных итераций* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 77–88.
[28] Иванов В.М., Ченцов А.Г. *Об управлении дискретными системами на бесконечном промежутке времени* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – Т. 27. – № 12. – С. 1780–1789.
[29] Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
[30] Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Итерационная процедура для построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби* // Докл. РАН. – 1996. – Т.348. – № 6. – С. 736–739.
[31] Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби и ее обобщения* // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 224. – С. 311–334.
[32] Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
[33] Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1970. – 488 с.
[34] Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* – New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
[35] Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 322 p.
[36] Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 408 p.
[37] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
[38] Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
[39] Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
[40] Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 433 с.
[41] Varaiya P., Lin J. *Existence of saddle points in differential games* // SIAM J. Control. – 1969. – V. 7. – № 1. – P. 141–157.
[42] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. *Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления* // Кибернетика. – 1987. – № 2. – С. 92–99.
[43] Chentsov A.G., Morina S.I., Zobnin B.B. *On some constructions of control by systems with a varying structure* // Mathematics and Computers in Simulation. – 1999. – V. 49. – P. 319–334.

А.Г. Ченцов

профессор, отдел управляемых систем,
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук,
620219, г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, д. 16,

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

A.G. Chentsov

Professor, Department of Controlled Systems,
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., GSP-384 Ekaterinburg, 620219 Russia,

e-mail: chentsov@imm.uran.ru