Известия вузов. Математика
2018, №6, с. 3–8

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНЕ ДВУХ КВАДРАТОВ

Аннотация. Рассматривается совокупность двух квадратов, построенных по примитивным периодам 1 и i и "достаточно близких друг другу". В окрестности этого множества исследуется четырехэлементное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, линейными сдвигами которого являются порождающие преобразования соответствующей двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним. Решение ищется в классе функций, аналитических вне этого множества и исчезающих на бесконечности. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: разностные уравнения, метод регуляризации, проблема моментов.

УДК: 517.944

Введение

Рассмотрим два непересекающихся квадрата R_1 и R_2, построенные по примитивным периодам 1 и i. Порождающие преобразования соответствующей двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним, запишем в виде $\sigma_m(z) = z + i^m$, $m = \overline{1,4}$. Они переводят точку из внутренности любого квадрата в его внешность. Считаем также, что они не переводят точки из внутренности одного квадрата в замыкание другого.

Займемся исследованием линейного разностного уравнения (л. р. у.) с постоянными коэффициентами

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} \lambda_{m,k} f[\sigma_m(z)] = g_k(z), \quad z \in R_k, \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

где $\lambda_{1,k}\lambda_{3,k} = \lambda_{2,k}\lambda_{4,k} \neq 0$, $k = 1, 2$. Решение ищем в классе функций f, голоморфных вне множества $R = R_1 \cup R_2$ и исчезающих на бесконечности. Граничные значения $f^-(t)$ должны удовлетворять условию Гёльдера на каждой открытой стороне квадратов. В вершинах квадратов допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Свободный член кусочно-голоморфен в R (голоморфен в каждом R_k) и его граничные значения $g^+(t) \in H(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$, $\Gamma_k = \partial R_k$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Этот класс решений обозначим через B. При такой постановке важнейшим фактором, определяющим всю дальнейшую структуру исследования, является несвязность множества $C \setminus \bigcup_{j=1}^{2} Q_j$, где $Q_j = \bigcup_{m=1}^{4} \sigma_m(R_j)$. Оно распадается на три связные компоненты, из которых только одна содержит бесконечно удаленную точку. Между тем уравнение (1) задано на двух других компонентах, что не позволяет применить к нему классические методы исследования операторов свертки [1]. Именно поэтому, в

Поступила 28.03.2017

отличие от обычного подхода к теории аналитических решений л. р. у., здесь решение и свободный член принадлежат, вообще говоря, различным классам голоморфных функций. В частности, свободный член не обязан аналитически продолжаться через какой-либо отрезок Γ_k. Даже в случае однородного уравнения

$$(Vf) = 0, \quad z \in R_k, \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

нельзя, вообще говоря, заключить, что оно выполняется в окрестности бесконечно удаленной точки. Необходимость использования дополнительных ограничений на характер краевых значений решений исследуемых уравнений вызвана существом дела (подробный комментарий дан в работе ([2], с. 551)).

Впервые подобный подход был предложен в работе [3] (два частных случая уравнения (1) при $R_1 = R_2 = R$). В дальнейшем задача обобщалась в различных направлениях, в том числе и на случай переменных коэффициентов, голоморфных в R [4], [5]. Некоторые приложения, вытекающие из такого подхода, рассмотрены в работах [6], [7]. Случай, когда уравнение (1) задано на нескольких квадратах, впервые встретился в работе [2]. Там предполагалось, что они "очень далеко" друг от друга и $\forall k, m \ \ \lambda_{k,m} = 1$. В данной статье ситуация обратная. Квадраты R_1 и R_2 настолько близки друг к другу, что множество $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$. Тогда возникают эффекты, которых не могло быть в [2]. Именно, за счет "близости" квадратов удается вместо соотношения (1) получить для неизвестной функции шестиэлементное разностное уравнение, заданное в окрестности точки $z = 0$ (см. ниже формулу (10)).

1. Пусть R_1 — квадрат с вершинами $t_1 = -1.75 - 2^{-1}i$, $t_2 = -0.75 - 2^{-1}i$, $t_3 = -0.75 + 2^{-1}i$, $t_4 = -1.75 + 2^{-1}i$ и сторонами ℓ_j, перечисленными в порядке обхода его положительно ориентированной границы Γ_1 ($t \in \ell_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = -0.5$), $R_2 = R_1 + \alpha$, $\alpha \in (2, 3)$. Введем обозначения $t'_j = t_j + \alpha$, $\ell'_j = \ell_j + \alpha$, $L_j = \ell_j \cap \ell'_j$. Ограничимся случаем, когда $\lambda_{1,k} = \lambda_{3,k} = -1$, $\lambda_{2,k} = \lambda_{4,k} = 1$, $k = 1, 2$. Преобразования $\sigma_m(z)$ порождают на каждом контуре Γ_k сдвиг $\alpha(t) = t + i^j$, $t \in L_j$, разрывный в вершинах.

Будем искать решение задачи (1) в виде интеграла типа Коши.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \quad z \notin \overline{R}. \tag{3}$$

Считаем, не ограничивая общности,

$$\varphi(t) = -\theta_t \varphi[\alpha(t)], \tag{4}$$

где $\theta_t = (-1)^j$, $t \in L_j$. Действительно, интеграл (3) не изменится, если на произвольном Γ_k его плотность заменить на $\varphi(\tau) + a_k^+(\tau)$, где функция $a_k(z)$ голоморфна в R_k. Условие (4) рассматриваем как частный случай задачи Карлемана для прямоугольника [8] относительно неизвестной функции $a_k(z)$, который безусловно разрешим. С учетом представления (3) имеем

$$(1) \Leftrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\tau) E(\tau - z) d\tau = g(z), \quad z \in R, \tag{5}$$

где $g(z) = g_k(z)$, $z \in R_k$, и ядерная функция

$$E(u) = (u+1)^{-1} + (u-1)^{-1} - (u+i)^{-1} - (u-i)^{-1}. \tag{6}$$

Займемся регуляризацией уравнения (1). С учетом (4) имеем

$$\left(A^+\varphi\right)(t) = 2^{-1}\varphi(t) + (A\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{7}$$

где особый интегральный оператор $(A\varphi)(t)$ получен формальной заменой $z \in R$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Заменим в соотношении (7) переменную

t на $\alpha(t)$, домножим его на θ_t и вычтем полученное равенство из исходного. Тогда с учетом (5)

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau = g^+(t) - \theta_t g^+[\alpha(t)], \tag{8}$$

где

$$K(t,\tau) = E(\tau - t) - \theta_\tau\theta_t E\left(\alpha(\tau) - \alpha(t)\right). \tag{9}$$

Лемма 1. *Ядро* (9) *ограничено.*

Доказательство сводится к непосредственной проверке при различных вариантах расположения точек τ и t на сторонах квадратов. □

Теорема 1. *Линейное разностное уравнение* (1) *имеет не более чем конечное число условий разрешимости. Все они являются условиями разрешимости интегрального уравнения Фредгольма* (8).

Доказательство. Если уравнение (8) разрешимо, то оно имеет решение со свойством (4) [9]. Тогда

$$(8) \Rightarrow \left(A^+\varphi\right)(t) - \theta_t\left(A^+\varphi\right)(\alpha(t)) = g^+(t) - \theta_t g^+[\alpha(t)]$$

и поскольку однородная задача Карлемана $a^+(t) = \theta_t a^+[\alpha(t)]$ имеет лишь тривиальное решение, то (8) $\Rightarrow$ (1), что завершает доказательство. □

Пусть выполнены условия разрешимости л. р. у. (1). Множество $D_0 = Q_1 \cap Q_2$ есть некоторый прямоугольник. При $z \in D_0$ в силу (1) имеем два равенства

$$f(z) = f(z-1+i) + f(z-1-i) - f(z-2) + g_1(z-1)$$

и

$$f(z) = f(z+1+i) + f(z+1-i) - f(z+2) + g_2(z+1).$$

Поэтому функция $f(z)$ удовлетворяет шестиэлементному разностному уравнению

$$\begin{aligned}(V_1 f)(z) \equiv f(z+1+i) + f(z+1-i) - f(z+2) - f(z-1+i) - f(z-1-i) + f(z-2) = \\ = g_1(z-1) - g_2(z+1), \quad z \in D_0. \quad (10)\end{aligned}$$

Соотношение (10) позволит далее применить л. р. у. (1) к исследованию проблемы моментов для целой функции экспоненциального типа (см. п. 2). Заметим, что, вообще говоря, (10) $\not\Rightarrow$ (1). Действительно, рассмотрим функцию $b(z)$, голоморфную в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 0,5$ и имеющую период 2. Рассмотрим другое л. р. у. (1), где функции $g_k(z)$ заменим на $g_k(z)+b(z)$. Слагаемое $b(z)$ подобрано так, что по-прежнему выполнены условия разрешимости интегрального уравнения (8). Итак, (1) $\Rightarrow$ (10), но, вообще говоря, (10) $\not\Rightarrow$ (1).

2. Пусть $\alpha = 2.5$, т. е. $R_1 = -R_2$. Рассмотрим однородное уравнение

$$T\varphi = 0. \tag{11}$$

Ясно, что $(T\varphi)(t) = 0 \Leftrightarrow (T\varphi)(-t) = 0$. Чтобы сделать этот вывод, достаточно в (11) заменить переменные τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно и учесть, что $\alpha(-\tau) = -\alpha(\tau)$. Ядро (9) кососимметрично. Поэтому союзное уравнение имеет вид

$$\left(T'\psi\right)(t) \equiv \psi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\tau)K(t,\tau)d\tau = 0. \tag{12}$$

Фундаментальную систему решений уравнения (11) и (12) можно выбрать так [9], что каждая входящая туда функция удовлетворяет либо условию (4), либо противоположному условию

$$\psi(t) = \theta_t\psi[\alpha(t)]. \tag{13}$$

Условия разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма (8) получаются только за счет решений союзного уравнения со свойством (13), поскольку решения со свойством (4) ортогональны правой части (8).

Лемма 2. *Фундаментальная система решений союзного уравнения* (12) *не содержит решений со свойством* (13).

Доказательство. Пусть

$$M = \max\{|\psi(t)|\,,\ t \in \Gamma\}. \tag{14}$$

В силу (13), а таже четности или нечетности $\psi(t)$, достаточно рассмотреть всего два случая.

1) Равенство (14) достигается при $t \in \ell_1 \Rightarrow$ при $\tau \in L_1$ получим $K(t,\tau) = 0$. Кроме того,

$$\int_{\ell_2 \cup \ell_4} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{\ell_4} \psi(\tau) K_1(t,\tau) d\tau,$$

где $K_1(t,\tau) = (u-1)^{-1} - (u+i)^{-1} + (u+2-i)^{-1} - (u+1-i)^{-1} - (u+2)^{-1} + (u+i+1)^{-1} - (u-1-i)^{-1} + (u-2i)^{-1}$ и $u = \tau - t$. При этом $|K_1(t,\tau)| \le 0.43$. Совершенно аналогично

$$\int_{\ell_2' \cup \ell_4'} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{\ell_4'} \psi(\tau) K_1(t,\tau) d\tau,$$

но теперь уже $|K_1(t,\tau)| \le 1.62$. При $\tau \in L_3$ имеем $K(t,\tau) = 4i\theta(x)$, где $\tau - t = i + \gamma$, $x = \gamma^2$ и $\theta(x) = (x+4)^{-1} - (x+2)\left(x^2+4\right)^{-1}$. Если $\tau \in \ell_3$, то $x \in [0,1]$ и $|K| \le 1.6$. Если $\tau \in \ell_3'$, то $x \in [9/4, 49/4]$ и $|K| \le 1.4$. Из приведенных оценок следует $\psi \equiv 0$.

2) Равенство (14) достигается при $t \in \ell_2 \Rightarrow$ при $\tau \in \ell_2$ получим $K(t,\tau) = 0$. Данный случай сложнее, чем 1), поэтому придется рассмотреть два подслучая.

а) Функция со свойством (13) нечетна. Если $\tau \in \ell_4'$, то точка $-\alpha(\tau) \in \ell_4$. Делая соответствующую замену в интеграле по стороне ℓ_4', получим

$$\int_{\ell_4' \cup \ell_4} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{\ell_4} \psi(\tau) K_2(t,\tau) d\tau,$$

где $K_2(t,\tau) = (u-1)^{-1} - (u-i)^{-1} - (u+i)^{-1} - (u+3)^{-1} + (u+2-i)^{-1} + (u+2+i)^{-1} + (v+2)^{-1} - (v+1+i)^{-1} - (v-1-i)^{-1} - (v-2)^{-1} + (v-1+i)^{-1} + (v-1-i)^{-1}$ и $v = \tau + t$. Тогда $|K_2(t,\tau)| \le 1.34$. Кроме того, с учетом (13)

$$\int_{L_1 \cup L_3} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{L_1} \psi(\tau) K_3(t,\tau) d\tau,$$

где $K_3(t,\tau) = (u-1)^{-1} - (u-i)^{-1} + (u+i+2)^{-1} - (u+2i+1)^{-1} + (u+i-1)^{-1} - (u+2i)^{-1} + (u+2)^{-1} - (u+1-i)^{-1}$. Имеем $|K_3(t,\tau)| \le 1.84$ при $\tau \in \ell_1$ и $|K_3(t,\tau)| \le 1.85$ при $\tau \in \ell_1'$. Поскольку $1.34 + 1.84 + 1.85 < 2\pi$, то $\psi \equiv 0$.

б) Функция со свойством (13) четна. Тогда

$$\int_{\ell_4 \cup \ell_4'} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{\ell_4} \psi(\tau) K_4(t,\tau) d\tau,$$

где $K_4(t,\tau) = (u-1)^{-1} - (u-i)^{-1} - (u+i)^{-1} - (u+3)^{-1} + (u+2-i)^{-1} - (u+2+2i)^{-1} - (v+2)^{-1} + (v+1+i)^{-1} + (v-1-i)^{-1} + (v-2)^{-1} - (v-1+i)^{-1} - (v-1-i)^{-1}$, откуда $|K_3(t,\tau)| \le 3.19$. Кроме того,

$$\int_{L_1 \cup L_3} \psi(\tau) K(t,\tau) d\tau = \int_{L_1} \psi(\tau) K_3(t,\tau) d\tau = \int_{L_1} \psi(\tau) K_5(t,\tau) d\tau,$$

где $K_5(t,\tau) = 2^{-1}\left[K_3(t,\tau) - K_3(t,-\tau-i)\right]$ и $|K_5(t,\tau)| \le 1.52$ при $\tau \in L_1$. Поскольку $3.19 + 2 \cdot 1.52 < 2 \cdot \pi$, то $\psi \equiv 0$, что завершает доказательство леммы. □

Теорема 2. *При $\alpha = 2.5$ линейно разностное уравнение (л. р. у.) (1) в классе B разрешимо и имеет единственное решение. Однородное л. р. у. (2) имеет лишь тривиальное решение.*

Замечание 1. Можно показать, что фундаментальные системы решений уравнений (11) и (12) пусты. Доказательства не приводим ввиду громоздкости применяемых там оценок и того факта, что нигде далее в статье это не используется.

Пусть кусочно-голоморфная функция $g(z)$ четна, т.е. $g_2(z) = g_1(-z)$, $z \in R_2$. Сопряженной индикаторной диаграммой нечетной целой функции экспоненциального типа $F(z)$, ассоциированной по Борелю ([10], гл. 1) с решением $f(z) \in B$, является прямоугольник с вершинами t_1, t_2', t_3', t_4. Воспользуемся формулой (10). Для радиуса сходимости степенного ряда

$$g_1(z-1) - g_1(-1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k z^k}{k!} \tag{15}$$

имеем $R \geq \sqrt{5}/4$, так как D_0 — прямоугольник с вершинами $\pm 0.25 \pm 0.5i$ (знаки не согласованы), а левая часть формулы (15) голоморфна в D_0. При $z \in D_0$ с учетом четности $f(z)$ получим

$$f(z-2) - f(z+2) = f(2-z) - f(z+2) = 2\int_0^{+\infty} F(x)e^{-2x}\operatorname{sh}(xz)dx;$$

$$\begin{aligned} &f(z+1+i) - f(z-1+i) + f(z+1-i) - f(z-1-i) = \\ &\quad = f(-z-1-i) - f(1-z-i) + f(z+1-i) - f(z-1-i) = 4\int_L F(t)e^{it}\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(zt)dt, \end{aligned}$$

где L — луч $\arg t = \pi/2$.

Теорема 3. *Нечетная целая функция экспоненциального типа $F(z)$, ассоциированная по Борелю с четным решением $f(z) \in B$ уравнения (1), удовлетворяет условиям*

$$2\int_0^{+\infty} F(x)e^{-2x}x^{2k+1}dx + 4\int_L F(t)t^{2k+1}e^{it}\operatorname{sh} t dt = \beta_k, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Теорема 3 — обобщение классической проблемы моментов Стилтьеса на случай двух лучей с кусочно-квазиполиномиальным весом.

Совершенно аналогично можно получить похожие равенства для четной целой функции экспоненциального типа $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нечетным решением $f(z) \in B$.

Замечание 2. Приведем условия, при которых уравнение (1) не представляет особого интереса. Это произойдет в случае, когда функция $f(z)$ голоморфна не вне R_j, а вне некоторого "меньшего" множества $\Omega_j \subset R_j$. Тогда функция $(Vf)(z)$ голоморфна на некоторой связной компоненте, содержащей R_j и бесконечно удаленную точку. Итак, функция $g_j(z)$ должна быть аналитически продолжима из R_j в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g_j(\infty) = 0$, так как $f(z) \in B$. Пусть для определенности $j = 1$. Уравнение (1) переопределено, поскольку оно выполняется не только при $z \in R$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. Оно решается в явном виде с помощью преобразования Бореля. Должны выполняться два условия. Частное $F(z) = 2G_1(z)/(\operatorname{ch} z - \cos z)$ должно быть целой функцией экспоненциального типа. Здесь $G_1(z)$ — целая функция экспоненциального типа, ассоциированная по Борелю с нижней функцией $g_1(z)$. Если это выполнено, то возникает и второе условие: ее нижняя функция $f(z)$ должна удовлетворять (1).

Литература

[1] Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах* (Наука, М., 1988).
[2] Гарифьянов Ф.Н. *Разностные уравнения для функций, аналитических вне нескольких квадратов*, Сиб. матем. журн. **44** (3), 550—559 (2003).
[3] Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата*, Изв. вузов. Матем., № 7, 7–16 (1993).
[4] Гарифьянов Ф.Н. *О регуляризации одного класса разностных уравнений*, Сиб. матем. журн. **42** (5), 1012–1017 (2001).
[5] Гарифьянов Ф.Н., Насырова Е.В. *О регуляризации линейных разностных уравнений с аналитическими коэффициентами и их приложения*, Изв. вузов. Матем., № 11, 1–6 (2011).
[6] Гарифьянов Ф.Н. *Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа*, Матем. заметки **67** (5), 674–679 (2000).
[7] Гарифьянов Ф.Н. *Об одном разностном уравнении и его приложении к проблеме моментов*, Матем. заметки **73** (6), 821–826 (2003).
[8] Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника*, Учен. зап. Казанск. ун-та **123** (10), 15–39 (1963).
[9] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана*, Изв. вузов. Матем., № 4, 43–51 (1983).
[10] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Наука, М., 1967).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

`e-mail:` f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

`e-mail:` strezh@yandex.ru

F.N. Garif'yanov and E.V. Strezhneva

Difference equation for functions analytical outside two squares

Abstract. We consider a totality of two squares constructed by primitive periods 1 and i and "sufficiently close to each other". In a vicinity of this set we investigate four-element difference equation with constant coefficients, whose linear shifts are generating transforms of the corresponding doubly periodic group and the inverse transforms. We seek a solution in a class of functions analytical outside this set and vanishing at infinity. We indicate applications to the moments problem for entire functions of exponential type.

Keywords: difference equations, regularization method, moments problem.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

`e-mail:` f.garifyanov@mail.ru

Elena Vasil'evna Strezhneva

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

`e-mail:` strezh@yandex.ru