УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 4 Физико-математические науки *2010*

УДК 519.958

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА (ПЛАСТИНЫ) СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Аннотация

Для тонкой прямоугольной пластины со свободными гранями с использованием тригонометрических базисных функций найдены точные аналитические решения задачи о свободных колебаниях, сформулированной на основе трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных путем введения предположения о равенстве нулю нормального напряжения в направлении толщины пластины.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, свободные грани, свободные колебания, упрощенная пространственная задача, тригонометрические базисные функции, метод Бубнова, частота колебаний, форма колебаний, бессдвиговая форма, изгибно-сдвиговая форма, чисто сдвиговая форма.

Введение

Сформулирована пространственная задача о свободных колебаниях тонкого ортотропного прямоугольного параллелепипеда (пластины) со свободными гранями, основанная на использовании трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения допущения о равенстве нулю нормального напряжения в поперечном направлении (толщины пластины). Используя во всех трех направлениях тригонометрические функции в качестве базисных и удовлетворяя всем граничным условиям сформулированной задачи на основе метода Бубнова, мы нашли ее аналитические решения, дополняющие решениям неупрощенных задач о плоских и пространственных бессдвиговых формах колебаний, которые были построены ранее указанным методом. Установлено, что некоторые из найденных решений соответствуют не равенству нулю нормальных напряжений, а отсутствию перемещения в направлении толщины. Соответствующие им частоты колебаний весьма близки к аналогичным частотам, которые ранее были найдены из уравнений плоской задачи теории упругости и имеют место для пластины лишь при выполнении определенных условий, связывающих между собой геометрические размеры пластины, коэффициенты Пуассона материала и волновые числа. Установлено, что некоторые найденные решения, которым соответствуют ненулевые поперечные сдвиговые деформации, эквивалентны изгибно-сдвиговым и чисто сдвиговым формам колебаний, определяемым из уравнений уточненной теории пластин типа Тимошенко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим, как и в [1], деформируемое упругое тело в виде прямоугольного параллелепипеда (пластины) со сторонами a, b, h, выполненного из ортотропного

материала с осями ортотропии, совпадающими с осями x, y, z прямоугольной декартовой системы координат. Полагаем грани $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ и $z = 0$, $z = h$ свободными, а один из размеров намного меньше остальных, то есть выполняются условия $a \gg h$, $b \gg h$. Принимая для напряжений и перемещений стандартные обозначения, уравнения пространственной задачи о свободных колебаниях и соотношения обобщенного закона Гука запишем в виде (ρ – плотность материала, ω – круговая частота свободных колебаний)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\Omega^2 u=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\Omega^2 v=0,\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\Omega^2,\quad \Omega^2 w=\rho\omega^2,\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_x=g_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+g_{12}\frac{\partial v}{\partial y}+g_{13}\frac{\partial w}{\partial z},\quad \tau_{xy}=G_{12}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big);\\ g_{11}=E_1\,(1-\nu_{23}\,\nu_{32})/\Delta,\\ g_{12}=g_{21}=E_2\,(\nu_{12}-\nu_{13}\,\nu_{32})/\Delta=E_1\,(\nu_{21}-\nu_{23}\,\nu_{31})/\Delta;\quad \overrightarrow{\underleftarrow{x,y,z}};\quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}},\end{gathered}\tag{1.2}$$

где $\Delta = 1-\nu_{12}\,\nu_{21}-\nu_{23}\,\nu_{32}-\nu_{31}\,\nu_{13}-2\,\nu_{12}\,\nu_{23}\,\nu_{31}$, $E_1\,\nu_{21}=E_2\,\nu_{12}$, $E_2\,\nu_{32}=E_3\,\nu_{23}$, $E_3\,\nu_{13}=E_1\,\nu_{31}$, $\nu_{12}\,\nu_{23}\,\nu_{31}=\nu_{21}\,\nu_{32}\,\nu_{13}$, а E_α, $G_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ – упругие характеристики ортотропного материала.

Так как на гранях $z = 0$, $z = h$ имеют место статические граничные условия

$$\tau_{xz}(0,h)=0,\quad \tau_{yz}(0,h)=0,\quad \sigma_z(0,h)=0,\tag{1.3}$$

то после интегрирования по z уравнения (1.1) в силу (1.3) представимы в виде

$$\int_0^h\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\Omega^2 u\Big)\,dz=0\,,\quad \int_0^h\Big(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\Omega^2 v\Big)\,dx=0,\tag{1.4}$$

$$\int_0^h\Big(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\Omega^2 w\Big)\,dz=0\,.$$

Если далее принять условие $\sigma_z \equiv 0$ для всего рассматриваемого тела (условие плоского напряженного состояния), то при использовании соотношений упругости (1.2), преобразованных с учетом условия $\sigma_z \equiv 0$ к виду

$$\sigma_x=E_1^*\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_{21}\frac{\partial v}{\partial y}\right);\quad \sigma_y=E_2^*\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\right);\quad \tau_{xy}=G_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

и введении известных дополнительных предположений $\sigma_x = \sigma_x(x,y),\ldots$, $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ из системы уравнений (1.4) выделяются уравнения плоской задачи теории упругости в перемещениях

$$\begin{gathered}E_1^*\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_{21}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+G_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\Omega^2 u=0,\\ E_2^*\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+G_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\Omega^2 v=0,\end{gathered}\tag{1.5}$$

где $E_1^*=E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21})$, $E_2^*=E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21})$.

При граничных условиях

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_{21}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\bigg|_{x=0,\,a}=0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0,\,a}=0,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{y=0,\,b}=0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{y=0,\,b}=0 \tag{1.6}$$

в работе [2] найдены три точных решения уравнений (1.5). В соответствии с первым из них частоты свободных колебаний определяются по формуле

$$\Omega^2=\frac{E_1^*\,\lambda_n^4+E_2^*\,\lambda_k^4-2\,\nu_{12}\,E_2^*\,\lambda_k^2\,\lambda_n^2}{\lambda_n^2+\lambda_k^2},\quad \lambda_n=\frac{n\,\pi}{a},\quad \lambda_k=\frac{k\,\pi}{b},\quad n,\,k=1,2,\ldots, \tag{1.7}$$

в которой параметры волнообразования λ_n, λ_k ничем не ограничены, а два других решения доставляют формулы

$$\Omega^2=E_1\,\lambda_n^2/\big(1+\nu_{12}\big)\,, \tag{1.8}$$

$$\Omega^2=E_2\,\lambda_k^2/\big(1+\nu_{21}\big)\,, \tag{1.9}$$

причем формуле (1.8) соответствует решение при $\lambda_k^2=\nu_{12}\,\lambda_n^2$, а формуле (1.9) – решение при $\lambda_n^2=\nu_{21}\,\lambda_k^2$.

Не комментируя пока указанные выше решения двумерной задачи (1.5), (1.6), сформулируем пространственную задачу вида

$$f_1=E_1^*\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_{21}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+G_{12}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+G_{13}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\Omega^2u=0,$$
$$f_2=G_{12}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+E_2^*\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+G_{23}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\Omega^2v=0, \tag{1.10}$$
$$f_3=G_{13}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+G_{23}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\Omega^2\,w=0,$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_{21}\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\bigg|_{x=0,\,a}=0,\quad \Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\bigg|_{x=0,\,a}=0,\quad \Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\bigg|_{x=0,\,a}=0, \tag{1.11}$$

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\bigg|_{y=0,\,b}=0,\quad \Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\bigg|_{y=0,\,b}=0,\quad \Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\bigg|_{y=0,\,b}=0, \tag{1.12}$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\nu_{12}\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\bigg|_{y=0,\,b}=0,\quad \Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\bigg|_{y=0,\,b}=0, \tag{1.13}$$

которая следует из неупрощенной пространственной задачи, точные решения которой найдены в [1] путем введения единственного предположения $\sigma_z\equiv 0$ для всего объема тела.

Сформулированная задача (1.10)–(1.13) имеет два точных решения

$$\Omega_{(x)}^2=E_1^*\,\lambda_n^2,\quad u=U(x)=U_n\,\cos\lambda_n\,x,\quad v=0,\quad w=0, \tag{1.14}$$

$$\Omega_{(y)}^2=E_2^*\,\lambda_k^2,\quad u=0,\quad v=V(y)=V_k\,\cos\lambda_k\,y,\qquad w=0, \tag{1.15}$$

которые соответствуют предельным случаям $b/a \to \infty$, $a/b \to \infty$, но не удовлетворяют введенному исходному предположению

$$\widetilde{g}_{13}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \widetilde{g}_{23}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \widetilde{g}_{33}\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.16}$$

где $\widetilde{g}_{13} = \nu_{13} + \nu_{12}\,\nu_{23}$, $\widetilde{g}_{23} = \nu_{23} + \nu_{21}\,\nu_{13}$, $\widetilde{g}_{33} = 1 - \nu_{12}\,\nu_{21}$.

В рамках плоской постановки задачи равенство (1.16) служит для определения функции w после определения функций u, v из решения задачи (1.5), (1.6).

2. Построение решения задачи (1.10)–(1.13) с использованием тригонометрических базисных функций

Если перемещения u, v, w, следуя [1, 2], представить в виде

$$\begin{aligned} &u = u_m\,\sin\lambda_m\,z + \widetilde{u}_m\,\cos\lambda_m\,z, \quad v = v_m\,\sin\lambda_m\,z + \widetilde{v}_m\,\cos\lambda_m\,z,\\ &w = w_m\,\sin\lambda_m\,z + \widetilde{w}_m\,\cos\lambda_m\,z, \quad \lambda_m = m\,\pi/h, \end{aligned} \tag{2.1}$$

то после удовлетворения граничным условиям (1.13) и использования представлений

$$w_m = w_{mk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{w}_{mk}\,\cos\lambda_k\,y, \quad \widetilde{w}_m = w_{mk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{w}_{mk}\,\cos\lambda_k\,y,$$

$$u_m = u_{mk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{u}_{mk}\,\cos\lambda_k\,y, \quad \widetilde{v}_m = v_{mk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{v}_{mk}\,\cos\lambda_k\,y$$

можно получить:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\lambda_k}\big(w^{\,x}_{mk}\sin\lambda_k y + \widetilde{w}^{\,x}_{mk}\cos\lambda_k y\big)\sin\lambda_m z + \big(u_{mk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{mk}\cos\lambda_k y\big)\cos\lambda_m z,\\ v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\big(w_{mk}\cos\lambda_k y + \widetilde{w}_{mk}\sin\lambda_k y\big)\sin\lambda_m z + \big(v_{mk}\sin\lambda_k y + \widetilde{v}_{mk}\cos\lambda_k y\big)\cos\lambda_m z,\\ w &= \big(W_{mk}\sin\lambda_k y + \widetilde{W}_{mk}\cos\lambda_k y\big)\sin\lambda_m z + \big(w_{mk}\sin\lambda_k y + \widetilde{w}_{mk}\cos\lambda_k y\big)\cos\lambda_m z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $w^{\,x}_{mk} = \partial w_{mk}/\partial x$, $\widetilde{w}^{\,x}_{mk} = \partial \widetilde{w}_{mk}/\partial x$.

Потребовав теперь в выражениях (2.2) удовлетворения граничным условиям (1.12), получим зависимости

$$W_{mk} = \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\widetilde{v}_{mk}, \quad u_{mk} = -\,\frac{1}{\lambda_k}\,\widetilde{v}^{\,x}_{mk}, \quad v_{mk} = -\,\frac{\nu_{12}}{\lambda_k}\,\widetilde{u}^{\,x}_{mk},$$

а при их использовании, а также представлений

$$\begin{aligned} &\big\{\,\widetilde{u}_{mk}\,, u_{mk}\,, w_{mk}\,, \widetilde{w}_{mk}\;v_{mk}\,, \widetilde{v}_{mk}\,, \widetilde{W}_{mk}\,, W_{mk}\,\big\}^T = \\ &\quad = \big\{\,u_{mkn}\,, U_{mkn}\,, w_{mkn}\,, \psi_{mkn}\;v_{mkn}\,, V_{mkn}\,, W_{mk}\,, \varphi_{mkn}\,\big\}^T\,\sin\lambda_k\,x + \\ &\qquad + \big\{\,\widetilde{u}_{mkn}\,, \widetilde{U}_{mkn}\,, \widetilde{w}_{mkn}\,, \widetilde{\psi}_{mkn}\;\widetilde{v}_{mkn}\,, \widetilde{V}_{mkn}\,, \widetilde{W}_{mkn}\,, \widetilde{\varphi}_{mkn}\,\big\}^T\,\cos\lambda_n\,x\,, \end{aligned}$$

вместо (2.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} u = -\,\frac{1}{\lambda_m}\,&\big[\lambda_n\,\big(w_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{w}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y\,+\\ &+\;\lambda_n\,\big(\psi_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{\psi}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\,\big]\,\sin\lambda_m\,z\,+\\ &+\;\big[\,\big(U_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{U}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y\,+\\ &+\;\big(u_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{u}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\,\big]\,\cos\lambda_m\,z, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\Big[\big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y - \\ - \big(\psi_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x + \widetilde{\psi}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z + \\ + \Big[\big(v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{v}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y + \\ + \big(V_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{V}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.4)$$

$$w = \Big[\big(\varphi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{\varphi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y + \\ + \big(W_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x - \widetilde{W}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z + \\ + \Big[\big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y + \\ + \big(\psi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{\psi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.5)$$

Если подчинить полученные функции (2.3)–(2.5) всем граничным условиям (1.11)–(1.13), то приходим к зависимостям

$$U_{mkn} = \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{V}_{mkn}, \quad \widetilde{v}_{mkn} = -\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,u_{mkn}, \quad \widetilde{u}_{mkn} = \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn},$$
$$V_{mkn} = \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,, \quad \widetilde{U}_{mkn} = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\,V_{mkn} = -\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn}, \quad (2.6)$$
$$\varphi_{mkn} = -\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,, \quad W_{mkn} = -\frac{\lambda_k\,\lambda_m}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,, \quad \widetilde{\varphi}_{mkn} = \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\widetilde{V}_{mkn},$$

а также к условиям

$$w_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n\,\lambda_k/\lambda_m = 0; \quad (2.7)$$
$$\widetilde{w}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1)\,\lambda_n^2 + \nu_{21}\,\lambda_k^2 = 0; \quad 2)\,\lambda_n\,\lambda_k/\lambda_m = 0; \quad (2.8)$$
$$\psi_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1)\,\lambda_k^2 + \nu_{12}\,\lambda_n^2 = 0; \quad 2)\,\lambda_n\,\lambda_k/\lambda_m = 0; \quad (2.9)$$
$$\widetilde{\psi}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1)\,\lambda_n^2 + \nu_{21}\,\lambda_k^2 = 0; \quad 2)\,\lambda_k^2 + \nu_{12}\,\lambda_n^2 = 0; \quad (2.10)$$
$$\widetilde{V}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2 = 0; \quad (2.11)$$
$$v_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1)\,\lambda_k^2 - \nu_{12}\,\lambda_n^2 = 0; \quad 2)\,\lambda_k^2\,\lambda_m/\nu_{12}\,\lambda_n^2 = 0; \quad (2.12)$$
$$u_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n = 0; \quad (2.13)$$

причем на неизвестную $\widetilde{W}_{mkn}$, входящую в (2.3)–(2.5), никакие условия не накладываются.

Подставив зависимости (2.6) в (2.3)–(2.5), для u, v, w получим окончательные выражения вида

$$u = -\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\Big[\big(w_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{w}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y + \\ + \big(\psi_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{\psi}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z + \\ + \Big[\Big(\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x - \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,\sin\lambda_k\,y + \\ + \Big(u_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.14)$$

$$v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\Big[\big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\,-$$
$$-\,\big(\psi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{\psi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\Big[\Big(v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,u_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,\sin\lambda_k\,y\,+$$
$$+\,\Big(\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{V}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.15)$$

$$w = \Big[\Big(-\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,\sin\lambda_k\,y\,+$$
$$+\,\Big(\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{W}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\big[\big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y\,+$$
$$+\,\big(\psi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{\psi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\big]\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.16)$$

при использовании которых для сдвиговых деформаций устанавливаются формулы

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2\,\frac{\lambda_k\,\lambda_n}{\lambda_m}\Big[\big(w_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{w}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\,-$$
$$-\,\big(\psi_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x - \widetilde{\psi}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y\Big]\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\frac{\nu_{21}\,\lambda_k^2 - \lambda_n^2}{\lambda_n}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\frac{\lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,u_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\frac{\nu_{12}\,\lambda_n^2 - \lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\,\frac{\big(\nu_{21}\,\lambda_k^2 - \lambda_n^2\big)\,\lambda_m}{\lambda_n\,\lambda_k}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,-$$
$$-\,\big(u_{mkn}\,\lambda_m + \lambda_n\,\widetilde{W}_{mkn}\big)\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z, \quad (2.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\,\frac{\big(\nu_{12}\,\lambda_n^2 + \lambda_k^2\big)\,\lambda_m}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\,\Big(\frac{\lambda_m\,\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,u_{mkn} - \lambda_k\,\widetilde{W}_{mkn}\Big)\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,-$$
$$-\,2\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z. \quad (2.19)$$

Из выражений (2.17)–(2.19) видно, что в силу условий, содержащихся в (2.7)–(2.13), всегда имеет место равенство $\gamma_{xy} = 0$. В то же время в (2.17)–(2.19) содержатся и решения, отвечающие ненулевым сдвиговым деформациям γ_{xz} и γ_{yz}.

3. Уравнения метода Бубнова и их решения

В соответствии с методологией, изложенной в работах [1, 2], в рассматриваемом случае в силу структуры построенного общего решения (2.14)–(2.16) необходимо составить уравнения метода Бубнова следующих видов

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,f_1\cos\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,f_2\sin\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+$$
$$+\;f_3\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta w_{mkn}\neq 0,\qquad(3.1)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,f_1\sin\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,f_2\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+$$
$$+\;f_3\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta\widetilde{w}_{mkn}\neq 0,\qquad(3.2)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,f_1\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,f_2\sin\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+$$
$$+\;f_3\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta\psi_{mkn}\neq 0,\qquad(3.3)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,f_1\sin\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,f_2\cos\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z+$$
$$+\,f_3\,\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta\widetilde{\psi}_{mkn}\neq 0,\qquad(3.4)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,f_1\sin\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z+f_2\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z+$$
$$+\;\frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,f_3\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta\widetilde{V}_{mkn}\neq 0,\qquad(3.5)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h\Big(f_1\sin\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z-$$
$$-\;\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,f_2\cos\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z\Big)\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta u_{mkn}\neq 0,\qquad(3.6)$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^h f_3\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z\,dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\quad\delta\widetilde{W}_{mkn}\neq 0,\qquad(3.7)$$

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^h\Bigg[\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,f_1\cos\lambda_n\,x\,(-\sin\lambda_k\,y+\cos\lambda_k\,y)\,\cos\lambda_m\,z\,+$$

$$+\;f_2\,\sin\lambda_n\,x\,\Big(\sin\lambda_k\,y+\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\cos\lambda_k\,y\Big)\,\cos\lambda_m\,z\,+$$

$$+\;f_3\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\sin\lambda_n x\big(-\sin\lambda_k y+\cos\lambda_k y\big)\sin\lambda_m z\Bigg]dx\,dy\,dz=0\quad\text{при}\;\delta v_{mkn}\neq 0,\qquad(3.8)$$

где

$$f_1=\Bigg[E_1^*\,\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\big(\lambda_n^2+\nu_{21}\,\lambda_k^2\big)+2\,G_{12}\,\frac{\lambda_k^2\,\lambda_n}{\lambda_m}-\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,\Omega^2\Bigg]\Big(w_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z\,-$$

$$-\;\widetilde{w}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z+\psi_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,-$$

$$-\;\widetilde{\psi}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\Big)+\Bigg[E_1^*\,\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\big(\lambda_n^2-\nu_{21}\,\lambda_k^2\big)\,-$$

$$-\;\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,\Omega^2\Bigg]v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z+\Bigg[-E_1\,\frac{\lambda_n\,\lambda_k}{\nu_{12}}+G_{12}\,\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\big(-\lambda_k^2\,+$$

$$+\;\nu_{12}\,\lambda_n^2\big)+\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,\Omega^2\Bigg]v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z+\Bigg[-G_{12}\,\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\big(\nu_{21}\,\lambda_k^2-\lambda_n^2\big)\,-$$

$$-\;G_{12}\,\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n\,\lambda_k}\big(\nu_{21}\,\lambda_k^2+\lambda_m^2\big)+\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\Omega^2\Bigg]\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\sin\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z\,+$$

$$+\;\Bigg\{\Bigg[\frac{G_{12}}{\nu_{21}}\big(-\nu_{21}\,\lambda_k^2+\lambda_n^2\big)-G_{13}\,\lambda_m^2+\Omega^2\Bigg]u_{mkn}\,-$$

$$-\;G_{13}\,\lambda_n\,\lambda_m\widetilde{W}_{mkn}\Bigg\}\sin\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z,\qquad(3.9)$$

$$f_2=\Bigg[E_2^*\,\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\big(\lambda_k^2+\nu_{12}\,\lambda_n^2\big)+2\,G_{12}\,\frac{\lambda_k\,\lambda_n^2}{\lambda_m}-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,\Omega^2\Bigg]\Big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\sin\lambda_m\,z\,+$$

$$+\;\widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z-\psi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,-$$

$$-\;\widetilde{\psi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\Big)+\Big[-E_2^*\,\lambda_k^2+G_{12}\,\big(\nu_{21}\,\lambda_k^2-\lambda_n^2\big)\,+$$

$$+\;\Omega^2\Big]\widetilde{V}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z+\Bigg[E_2^*\,\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n}\big(\nu_{12}\,\lambda_n^2-\lambda_k^2\big)\,-$$

$$-\;2\,G_{23}\,\frac{\lambda_m^2\,\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}+\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\Omega^2\Bigg]v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z\,+$$

$$+\;\Bigg[-\frac{G_{12}}{\nu_{12}}\big(-\lambda_k^2+\nu_{21}\,\lambda_n^2\big)-\frac{\lambda_m^2\,G_{23}}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\big(\nu_{12}\,\lambda_n^2+\lambda_k^2\big)+\Omega^2\Bigg]v_{mkn}\sin\lambda_n x\sin\lambda_k y\cos\lambda_m z\,+$$

$$+\;\Bigg\{\Bigg[E_2^*\,\frac{\lambda_k\,\lambda_n}{\nu_{21}}+\frac{G_{12}\,\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_n}\big(-\nu_{21}\,\lambda_k^2+\lambda_n^2\big)+G_{23}\,\frac{\lambda_m^2\,\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}-\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,\Omega^2\Bigg]u_{mkn}\,-$$

$$-\;G_{23}\,\lambda_k\,\lambda_m\widetilde{W}_{mkn}\Bigg\}\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\cos\lambda_m\,z,\qquad(3.10)$$

$$f_3 = \left[-G_{13}\,\frac{\lambda_m}{\lambda_k}\big(\nu_{21}\,\lambda_k^2 + \lambda_n^2\big) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\Omega^2\right]\widetilde{V}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\ \left[-G_{23}\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\big(\nu_{12}\,\lambda_n^2 + \lambda_k^2\big) + \frac{\lambda_k\,\lambda_m}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\Omega^2\right]v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\ \left[2\,G_{23}\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2} - \frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\Omega^2\right]v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z\,+$$
$$+\ \left[\left(-G_{13}\,\lambda_m\,\lambda_n + G_{23}\,\frac{\lambda_m\,\lambda_n}{\nu_{21}}\right)u_{mkn} + \big(-\lambda_n^2\,G_{13} - \lambda_k^2\,G_{23}\,+\right.$$
$$\left.+\ \Omega^2\big)\widetilde{W}_{mkn}\right]\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z + \Omega^2\Big[\big(w_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,+$$
$$+\ \widetilde{w}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\sin\lambda_k\,y + \big(\psi_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{\psi}_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\big)\,\cos\lambda_k\,y\Big]\,\cos\lambda_m\,z. \tag{3.11}$$

Кроме уравнений (3.1)– (3.8) в каждой точке рассматриваемого тела построенные решения (2.3)–(2.5) в силу принятого предположения $\sigma_z \equiv 0$ должны удовлетворять равенству (1.16).

Подставив теперь (3.9)–(3.11) в (3.1), при условии $w_{mkn} \neq 0$ получим характеристическое уравнение

$$-\,\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\left[E_1^*\,\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\big(\lambda_n^2 + \nu_{21}\,\lambda_k^2\big) + 2\,G_{12}\,\frac{\lambda_k^2\,\lambda_n}{\lambda_m} - \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,\Omega^2\right] -$$
$$-\ \frac{\lambda_k}{\lambda_m}\left[E_2^*\,\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\big(\lambda_k^2 + \nu_{12}\,\lambda_n^2\big) + 2\,G_{12}\,\frac{\lambda_n^2\,\lambda_k}{\lambda_m} - \frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,\Omega^2\right] + \Omega^2 = 0. \tag{3.12}$$

которому отвечает частное решение

$$u = -\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\,w_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z,$$
$$v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,w_{mkn}\,\sin\lambda_n x\,\cos\lambda_k y\,\sin\lambda_m z,\ w = w_{mkn}\,\sin\lambda_n x\,\sin\lambda_k y\,\cos\lambda_m z. \tag{3.13}$$

В соответствии с (2.1) на уравнение (3.12) и решение (3.13) должны быть наложены два варианта условий. В первом случае, когда $\lambda_n = 0,\ \lambda_k \neq 0$, из уравнения (3.12) следует формула

$$\Omega^2_{(1)} = \frac{E_2^*\,\lambda_k^4}{\lambda_k^2 + \lambda_m^2}, \tag{3.14}$$

но при этом, как следует из (3.13), имеем равенства $u = 0,\ v = 0,\ w = 0$. Следовательно, данное решение не является действительным для пластины конечных размеров.

Во втором случае, когда $\lambda_k = 0,\ \lambda_n \neq 0$, из (3.12) получаем формулу

$$\Omega^2_{(2)} = \frac{E_1^*\,\lambda_n^4}{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}, \tag{3.15}$$

и при этом, как следует из (3.13), также имеют место равенства $u = 0,\ v = 0,$ $w = 0$.

Следует отметить, что условие $\lambda_n\,\lambda_k/\lambda_n = 0$, накладываемое на решение (3.13), а также и на другие решения, содержащиеся в (2.14)–(2.16), вытекает из граничных условий $\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, формулируемых для граней $x = 0,\ x = a$ и $y = 0$,

$y = b$, формулы (3.14) и (3.15) при $\lambda_m = 0$ являются частотами колебаний бесконечно длинной (решение (1.15)) и бесконечно широкой (решение (1.14)) пластин в соответствующих осевых направлениях, которые получены в результате решения соответствующих одномерных задач.

Для всех других решений, в которых неизвестными являются обобщенные перемещения $\widetilde{w}_{mkn}$, ψ_{mkn}, $\widetilde{\psi}_{mkn}$, как следует из (2.9)–(2.11), одновременно должны быть выполнены условия $\lambda_n = 0$ и $\lambda_k = 0$. При подстановке выражений (3.9)–(3.11) в уравнения (3.2)–(3.4) можно убедиться, что в силу этих условий все решения, следующие из уравнений (3.2)–(3.4), являются тривиальными ($\Omega^2 = 0$) и недействительными для пластины конечных размеров.

Обратимся к уравнению (3.5). При подстановке в него выражений (3.9)–(3.11) при условии $\widetilde{V}_{mkn} \neq 0$ приходим к характеристическому уравнению

$$\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\left[-G_{12}\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\left(\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2\right) - G_{13}\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n\lambda_k}\left(\nu_{21}\lambda_k^2 + \lambda_n^2\right) + \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,\Omega^2\right] - E_2\lambda_k^2 +$$
$$+\ G_{12}\left(\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2\right) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\left[-G_{13}\,\frac{\lambda_m}{\lambda_k}\left(\nu_{12}\lambda_k^2 + \lambda_n^2\right) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\Omega^2\right] + \Omega^2 = 0, \quad (3.16)$$

которому соответствует решение

$$u = \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z,$$
$$v = \widetilde{V}_{mkn}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_k y\,\cos\lambda_m z,\ w = \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\,\widetilde{V}_{mkn}\cos\lambda_n x\,\sin\lambda_k y\,\sin\lambda_m z. \quad (3.17)$$

Так как на данное решение и уравнение (3.16) согласно (2.11) должно быть наложено условие $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$, то при его выполнении из (3.16) следует формула

$$\Omega^2_{(4)} = \frac{E_2\,\lambda_k^4 + 4\,\nu_{21}\,G_{13}\,\lambda_m^2\,\lambda_k^2}{\lambda_m^2 + (1+\nu_{21})\,\lambda_k^2}, \quad (3.18)$$

практически полностью совпадающая по структуре с аналогичной формулой работы [3], соответствующей изгибно-сдвиговым ФСК.

Подчинив далее решение (3.17) равенству (1.19), с учетом наложенного на него условия $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$ получим равенство $\lambda_m^2 = \nu_{23}\,\lambda_k^2$. При его использовании формула (3.18) преобразуется к виду

$$\Omega^2_{(4)} = \frac{E_2 + 4\,\nu_{21}\,\nu_{23}\,G_{13}}{1+\nu_{21}+\nu_{23}}\,\lambda_k^2. \quad (3.19)$$

Этим частотам соответствует пространственная форма свободных колебаний, описываемая функциями

$$u = \frac{\nu_{21}}{\sqrt{\nu_{21}}}\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_m\,z,$$
$$v = \widetilde{V}_{mkn}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_k y\,\cos\lambda_m z,$$
$$w = \sqrt{\nu_{23}}\ \widetilde{V}_{mkn}\cos\lambda_n x\,\sin\lambda_k y\,\sin\lambda_m z. \quad (3.20)$$

являющимися симметричными относительно срединной плоскости пластины $z = h/2$, при использовании которых для определения поперечных сдвиговых деформаций можно получить выражения

$$\gamma_{xz} = -2\,\nu_{21}\sqrt{\frac{\nu_{23}}{\nu_{21}}}\,\lambda_k\,\widetilde{V}_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z, \quad \gamma_{yz} \equiv 0.$$

Принципиально важно отметить, что формула (3.19) является аналогом формулы $\Omega^2_{(y)} = E^*_2\,\lambda^2_k$ из (1.15), но, в отличие от нее, имеет место только при выполнении условий $\lambda^2_n = \nu_{21}\,\lambda^2_k$, $\lambda^2_m = \nu_{23}\,\lambda^2_k$, а решение (3.20), в отличие от решения $u = U_n\,\cos\lambda_n\,x$, $v = w = 0$, удовлетворяет равенству (1.19). Указанные условия представимы в виде

$$\begin{aligned} \frac{n\,b}{k\,h} &= \sqrt{\nu_{21}}, \\ \frac{m\,b}{k\,h} &= \sqrt{\nu_{23}}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

при выполнении которых для пластины даже из изотропного материала, когда $G_{\alpha\,\beta} = G = E/[2\,(1+\nu)]$, имеет место неравенство $\Omega_{(4)} < \Omega_{(y)}$, так как

$$\frac{E^*_2 + 4\,\nu_{21}\,\nu_{23}\,G_{13}}{1+\nu_{21}+\nu_{23}} = \frac{1+\nu+2\,\nu^2}{1+3\,\nu+2\,\nu^2} < 1.$$

В частности, при $\nu = 0.3 - \Omega^2_{(4)} \approx 0.71\,\Omega^2_{(y)}$, то есть когда известное классическое решение, не удовлетворяющее исходному предположению $\sigma_z \equiv 0$, почти в 1.2 раза завышает частоту колебаний (3.19), имеющую место при выполнении условий (3.21).

Из уравнений (3.6), (3.7) при подстановке в них выражений (3.9)–(3.11) следует система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\left[\frac{G_{12}}{\nu_{21}}\left(-\nu_{21}\,\lambda^2_k + \lambda^2_n\right) - G_{13}\,\lambda^2_m + \Omega^2\right] u_{mkn} - G_{13}\,\lambda_n\,\lambda_m\,\widetilde{W}_{mkn} - \\ &\quad - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\left\{\left[E^*_2\,\frac{\lambda_k\,\lambda_n}{\nu_{21}} + G_{12}\,\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\left(-\nu_{21}\,\lambda^2_k + \lambda^2_n\right) + G_{23}\,\frac{\lambda^2_m\,\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k} - \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\,\lambda_k}\,\Omega^2\right] u_{mkn} - G_{23}\,\lambda_k\,\lambda_m\,\widetilde{W}_{mkn}\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\left[-G_{13}\,\lambda_m\,\lambda_n + \frac{\lambda_m\,\lambda_n}{\nu_{21}}\right] u_{mkn} + \left(-\lambda^2_n\,G_{13} - \lambda^2_k\,G_{23} + \Omega^2\right)\widetilde{W}_{mkn} = 0, \tag{3.23}$$

которая соответствует решению

$$\begin{aligned} u &= u_{mkn}\sin\lambda_n x\cos\lambda_k y\cos\lambda_m z, \\ v &= -\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\,u_{mkn}\cos\lambda_n x\sin\lambda_k y\cos\lambda_m z, \\ w &= \widetilde{W}_{mkn}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_k y\,\sin\lambda_m z. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Так как в $u_{mkn} \neq 0$ соответствии с условием (2.13) только при $\lambda_n = 0$, то из выражений (3.24) следуют равенства $u = 0$, $v = 0$. Последние будут выполнены и при условии $u_{mkn} \equiv 0$, что приводит вместо системы уравнений (3.22), (3.23) к одному уравнению

$$\left(-\lambda^2_n\,G_{13} - \lambda^2_k\,G_{23} + \Omega^2\right)\,\widetilde{W}_{mkn} = 0 \tag{3.25}$$

при произвольных n и k. В силу того, что на $\widetilde{W}_{mkn}$ не наложены какие-либо условия, из (3.25) следует формула

$$\Omega^2_{(5)} = G_{13}\,\lambda^2_n + G_{23}\,\lambda^2_k. \tag{3.26}$$

Обратимся, наконец, к последнему уравнению (3.8). Подставив в него выражения (3.9)–(3.11), при условии $v_{mkn} \neq 0$ получим характеристическое уравнение

$$\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}\left[-\frac{E_1^*\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}\left(\lambda_n^2-\nu_{21}\lambda_k^2\right)+\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,\Omega^2-E_1\,\frac{\lambda_n\,\lambda_k}{\nu_{12}}+G_{12}\,\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}\left(-\lambda_k^2+\nu_{12}\,\lambda_n^2\right)\right]-$$
$$-\;\frac{G_{12}}{\nu_{12}}\left(-\lambda_k^2+\nu_{12}\,\lambda_n^2\right)-\frac{\lambda_m^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,G_{23}\left(\nu_{12}\,\lambda_n^2+\lambda_k^2\right)+\Omega^{\,2}\;+$$
$$+\;\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\left[E_2^*\,\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\left(\nu_{12}\,\lambda_n^2-\lambda_k^2\right)-2\,G_{23}\,\frac{\lambda_m^2\,\lambda_k^2}{\nu_{21}\,\lambda_n^2}+\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\Omega^{\,2}\right]-$$
$$-\;\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\left[2\,G_{23}\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k^3}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}+G_{23}\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\left(\nu_{12}\,\lambda_n^2+\lambda_k^2\right)-2\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\Omega^2\right]=0, \quad (3.27)$$

соответствующее решению

$$u=-\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n}\,v_{mkn}\,\cos\lambda_n\,x\left(\sin\lambda_k\,y-\cos\lambda_k\,y\right)\,\cos\lambda_m\,z,$$
$$v=v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\left(\sin\lambda_k\,y-\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,\cos\lambda_k\,y\right)\,\cos\lambda_m\,z, \quad (3.28)$$
$$w=-\,\frac{\lambda_m\,\lambda_k}{\nu_{12}\,\lambda_n^2}\,v_{mkn}\,\sin\lambda_n\,x\left(\sin\lambda_k\,y-\cos\lambda_k\,y\right)\,\sin\lambda_m\,z.$$

Если наложить на уравнение (3.27) и решение (3.28) первое условие из (2.12), то из (3.27) можно получить формулу

$$\Omega_{(6)}^2=\frac{E_1^*\,\lambda_n^4+4\,G_{23}\,\nu_{12}\,\lambda_m^2\,\lambda_n^2}{\lambda_m^2+(1+\nu_{12})\,\lambda_n^2}, \quad (3.29)$$

которая по структуре совпадает с формулой (3.19) и по теории пластин типа Тимошенко соответствует изгибно-сдвиговым ФСК [3]. Так как в рассматриваемом случае $\lambda_k^2/(\nu_{12}\,\lambda_n^2)=1$, то второе условие из (2.12) принимает вид $\lambda_m=0$. При его использовании из (3.29) следует формула

$$\Omega_{(7)}^2=\frac{E_1\,\lambda_n^2}{1+\nu_{12}}, \quad (3.30)$$

а решение (3.28) преобразуется к виду

$$u=\frac{\sqrt{\nu_{12}}}{\nu_{12}}\,v_{0kn}\,\cos\lambda_n\,x\left[\sin\Big(\lambda_n\,\sqrt{\nu_{12}}\,y\Big)-\cos\Big(\lambda_n\,\sqrt{\nu_{12}}\,y\Big)\right],$$
$$v=v_{0kn}\,\sin\lambda_n\,x\left[\sin\Big(\lambda_n\,\sqrt{\nu_{12}}\,y\Big)+\cos\Big(\lambda_n\,\sqrt{\nu_{12}}\,y\Big)\right],\quad w\equiv 0. \quad (3.31)$$

Но полученное решение (3.31) противоречит принятому исходному предположению $\sigma_z=0$, выраженному равенством (1.16). Поэтому оно в рассматриваемом случае должно быть заменено на равенство $\varepsilon_z=0$ $(w=0)$, в силу которого первые два соотношения (1.2) необходимо записать в виде

$$\sigma_x=g_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\widetilde{\nu}_{21}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right);\quad \sigma_y=g_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\widetilde{\nu}_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

где

$$\widetilde{\nu}_{21}=\frac{\nu_{21}+\nu_{23}\,\nu_{13}}{1-\nu_{23}\,\nu_{32}},\quad \widetilde{\nu}_{12}=\frac{\nu_{12}+\nu_{12}\,\nu_{32}}{1-\nu_{31}\,\nu_{13}}.$$

При этом в уравнениях (1.10) величины E_1^*, E_2^* заменяются на величины g_{11}, g_{22}, а величины ν_{12}, ν_{21} – на $\widetilde{\nu}_{12}$, $\widetilde{\nu}_{21}$ соответственно. Такую же замену необходимо осуществить в решении (3.28) и в уравнении (3.27), а вместо накладываемого на них условия $\lambda_k^2 = \nu_{12}\,\lambda_n^2$ приходим к условию $\lambda_k^2 = \widetilde{\nu}_{12}\,\lambda_n^2$. Можно показать, что при его использовании с учетом (1.2) имеет место преобразование вида

$$g_{11}\left(1 - \widetilde{\nu}_{12}\,\widetilde{\nu}_{21}\right) = \frac{E_1}{1 - \nu_{13}\,\nu_{31}} = \widetilde{E}_1, \quad \widetilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{13}\,\nu_{31}}.$$

В силу указанных замен и преобразований в рассматриваемом случае приходим к формуле

$$\Omega_{(6)}^2 = \frac{\widetilde{E}_1\,\lambda_n^4 + 4\,G_{23}\,\widetilde{\nu}_{12}\,\lambda_m^2\,\lambda_n^2}{\lambda_m^2 + (1 + \widetilde{\nu}_{12})\,\lambda_n^2}, \tag{3.32}$$

заменяющей формулу (3.29), которая с учетом второго условия принимает вид

$$\Omega_{(7)}^2 = \frac{\widetilde{E}_1\,\lambda_n^2}{1 + \widetilde{\nu}_{12}} = \frac{E_1\,\lambda_n^2}{(1 + \widetilde{\nu}_{12})\,(1 + \nu_{13}\,\nu_{31})}. \tag{3.33}$$

Частотам колебаний, определяемым по полученной формуле (3.32), в рассматриваемом случае будет соответствовать решение (3.31), в котором величина ν_{12} должна быть заменена на величину $\widetilde{\nu}_{12}$.

4. Анализ построенных решений

Установленная формула (3.30) полностью совпадает с формулой (1.9), полученной в работе [2] в рамках плоской постановки задачи теории упругости. Однако этой формуле соответствуют разные формы свободных колебаний: функции (3.31) в рамках рассматриваемой пространственной постановки задачи и функции вида

$$u = u_{0nk}\,\cos\lambda_k y\,\cos\lambda_n x,$$

$$v = \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\,v_{0nk}\,\sin\lambda_k y\,\sin\lambda_n x,$$

$$\lambda_k^2 = \nu_{12}\,\lambda_n^2,$$

при использовании которых перемещение w определяется из равенства (1.16), в рамках плоской постановки задачи. Если в формуле (3.18) принять $\lambda_m = 0$, то в дополнение к (3.30) приходим к формуле

$$\Omega^2 = \frac{E_2^*\,\lambda_k^2}{1 + \nu_{21}}, \tag{4.1}$$

которой соответствуют формы колебаний, описывающиеся функциями

$$\begin{aligned} u &= \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{V}_{0kn}\sin\lambda_n x\,\sin\lambda_k y, \\ v &= \widetilde{V}_{0kn}\,\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_k y, \\ w &= 0, \quad \lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Формула (4.1), соответствующие ей функции u, v и условие, задаваемые (4.2), полностью совпадают с формулой (1.9), соответствующими ей функциями u, v и условием $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$ работы [2]. Однако между этими решениями имеется

и различие – $w = 0$ в решении (4.2), а в рамках плоской постановки задачи w определяется из равенства (1.16). Аналогичная картина имеет место и при сравнении формулы (1.8), соответствующей плоской постановке задачи [2], с формулой (3.30), полученной на основе пространственной постановки задачи. В связи с этим дополняющей к (3.33) вместо (4.1) является формула

$$\Omega^2 = \frac{\widetilde{E}_2\,\lambda_k^2}{1+\widetilde{\nu}_{21}} = \frac{E_2\,\lambda_k^2}{(1+\widetilde{\nu}_{21})\,(1-\nu_{23}\,\nu_{32})}.$$

которая соответствует решению (3.31) при $\lambda_n^2 = \widetilde{\nu}_{21}\,\lambda_k^2$ и $w = 0$.

Следует также заметить, что задача (1.10)–(1.13) и построенное для нее решение (2.14)–(2.16), в отличие от [2], не приводит к формуле (1.7) и соответствующим ей функциям вида

$$u = u_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x,$$

$$v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\,u_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x,$$

на которые не накладываются никакие ограничения. Формулы вида (1.7) были получены и в работе [1], но исходя из неупрощенных уравнений пространственной задачи теории упругости. Однако им соответствуют только тривиальные решения $u = 0,\ v = 0,\ w = 0$.

Описанные выше ФСК, как и все установленные в работе [1], являются безсдвиговыми в отличие от решения (3.20) и соответствующей ей формулы (3.19), к которым приводит рассматриваемая в настоящей работе упрощенная пространственная постановка задачи. Ее решением, построенным на основе тригонометрических базисных функций, описываются также чисто поперечно-сдвиговые ФСК, которым для определения Ω^2 соответствует формула (3.26). Она полностью совпадает с аналогичной формулой, установленной в работе [3] на основе решения уравнений теории пластин типа Тимошенко, что является характеристикой степени их точности для описания поперечно-сдвиговых и поперечно-изгибно-сдвиговых форм колебаний. Но в рассматриваемом случае ей соответствует решение

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \widetilde{W}_{mnk}\,\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_m\,z$$

задачи (1.10)–(1.13), которое противоречит следующему из равенства (1.16) условию $\partial w/\partial z = 0$. Следовательно, колебания с частотами (3.26) являются недействительными, а решение вида

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = W_0\,\cos\lambda_n\,x\,\cos\lambda_k\,y$$

и формула (3.26) получаются из уравнений теории Тимошенко в виду положенных в их основу приближенных представлений для перемещений u, v, w, не удовлетворяющих граничным условиям (1.13).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00323-а) и по федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.1 «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров», № 2009-1.1-112-049-024, гос. контракт № 02.740.11.0205 от 7 июля 2009 г.).

Summary

V.N. Paimushin, T.V. Polyakova. Analytical Solutions for the Free Vibration Problem of a Thin Rectangular Parallelepiped (Plate) with Free Edges.

Using trigonometric basis functions we found exact analytical solutions for the free vibration problem of a thin rectangular plate with free edges. The problem was formulated by the three-dimensional equations of the theory of elasticity, which were simplified by supposing that the normal stress through the thickness of the plate is equal to zero.

Key words: rectangular plate, free edges, free vibrations, simplified spatial problem, trigonometric basis functions, Bubnov method, vibration frequency, vibration mode, without shear mode, flexural-shear mode, purely shear mode.

Литература

1. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями // Механика композитных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 3. – С. 317–336.

2. *Паймушин В.Н.* Точные и приближенные решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 461–488.

3. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные решения задач об изгибных и поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости и свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 181–198.

Поступила в редакцию
19.06.10

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *lukankin@dsm.kstu-kai.ru*

Полякова Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-технического центра проблем динамики и прочности при Казанском государственном техническом университете им. А.Н. Туполева.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru*