Известия вузов. Математика
2019, № 10, с. 15–20

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

О.Г. АНТОНОВСКАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Особое внимание при исследовании систем с запаздыванием уделяется такому важному свойству систем как устойчивость. В задачах исследования устойчивости по первому приближению для систем обыкновенных дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова широкое применение нашли функции Ляпунова в виде квадратичных форм. В настоящей статье в качестве функции Ляпунова для системы с запаздыванием предлагается использовать квадратичную функцию Ляпунова, построенную для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяющую ограничениям на первую производную в силу этой системы. Приведены условия, при которых применение таких квадратичных функций в качестве функций Ляпунова для системы с запаздыванием возможно.

Ключевые слова: система с запаздыванием, устойчивость, прямой метод Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-15-20

Введение. Наиболее общим методом исследования устойчивости является прямой метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) [1], [2]. Эффективность прямого метода связана с тем, что использование введенных А.М. Ляпуновым вспомогательных функций позволяет исследовать устойчивость или неустойчивость, не находя решений возмущенных уравнений [3], поскольку устойчивость относительно возмущений параметров состояния системы эквивалентна устойчивости относительно любой функции этих возмущений, характеризующей расстояние точки от начала координат [4]. В настоящее время сфера применения метода функций Ляпунова не ограничивается задачами классической теории устойчивости. В частности, идеи метода функций Ляпунова успешно используются при исследовании систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [3]–[8].

В задачах исследования устойчивости по первому приближению для систем обыкновенных дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова широкое применение нашли функции Ляпунова в виде квадратичных форм. Столь же широкое применение квадратичные формы могут иметь и в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием [4], [7]. В данной работе предлагается использовать в качестве функции Ляпунова для системы с запаздыванием квадратичную функцию Ляпунова, построенную для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяющую ограничениям на ее первую производную в силу этой системы [9], [10]. Приведены условия, при которых применение таких квадратичных функций в качестве функций Ляпунова для системы с запаздыванием возможно.

Поступила в редакцию 02.10.2018, после доработки 02.10.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где f_i — непрерывно дифференцируемые функции своих переменных, удовлетворяющие условию $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, τ — постоянная величина.

Чтобы положительно определенная квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}) \tag{2}$$

удовлетворяла требованиям теоремы типа Разумихина [4] об асимптотической устойчивости для системы (1), достаточно [7], [8] выполнения требований теоремы типа Разумихина для системы первого приближения

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j + b_{ij} x_j(t-\tau)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $b_{ij} = \partial f_i / \partial x_j(t-\tau)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_1(t-\tau) = x_2(t-\tau) = \ldots = x_n(t-\tau) = 0$, т. е. $\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) < 0$ в силу системы (3) при $V(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, требуется найти условия выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} K_{ij}(a_{ik} x_j + a_{jk} x_i) x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} K_{ij}(b_{ik} x_j + b_{jk} x_i) x_k(t-\tau) < 0 \tag{4}$$

при всех $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij} x_i(t-\tau) x_j(t-\tau) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j$.

2. Устойчивость системы с запаздыванием по первому приближению. В работах [7], [8] предложены различные методы выбора квадратичной функции Ляпунова для системы с запаздыванием. В частности [8], в качестве функции Ляпунова может быть выбрана квадратичная форма, которая является функцией Ляпунова для системы без запаздывания.

1. Первая сумма в (4) есть первая производная $\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функции (2) в силу системы без запаздывания

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Будем предполагать, что (2) выбрана таким образом, что в силу системы (5) $\max_{V=V_0}(\dot{V}/V) = -\delta$ $(2 \max_i \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\} \le -\delta < 0)$, где $\lambda_i(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы $A = (a_{ij})$ такие, что $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$, т. е. состояние равновесия системы (5) асимптотически устойчиво. (Коэффициенты (2) с таким свойством можно выбрать с помощью простых аналитических соотношений в силу [10].) Но тогда на поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ будет иметь место соотношение $\dot{V} \le -\delta V_0$ в силу системы без запаздывания. Учитывая также тот факт, что $K_{ij} = K_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и, кроме того, на поверхности уровня [11]

$$|x_i| \le \sqrt{\frac{V_0 A_{ii}}{\det K}}, \tag{6}$$

где A_{ii} — алгебраическое дополнение элемента K_{ii} в матрице $K = (K_{ij})$, а $\det K$ — определитель матрицы K, получим $\dot{V} \le -\alpha_1 V_0 < 0$ для системы с запаздыванием, если

$$\alpha_1 = \delta - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|K_{ij}||b_{ik}|\frac{\sqrt{A_{ii}A_{kk}}}{\det K} > 0. \tag{7}$$

2. Запишем [8] систему (3) в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}((a_{ij}+b_{ij})x_j + b_{ij}(x_j(t-\tau)-x_j)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

а первую производную функции — в виде (2) в силу (3) с учетом (8). Рассмотрим систему без запаздывания

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Будем предполагать, что (2) выбрана таким образом, что в силу (9) $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V) = -\delta_0$ $(2\max\limits_{i}\{\operatorname{Re}\lambda_i(A+B)\} \le -\delta_0 < 0)$, где $\lambda_i(A+B)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i(A+B) < 0$, т. е. состояние равновесия системы (9) асимптотически устойчиво. (Коэффициенты (2) с таким свойством можно выбрать с помощью простых аналитических соотношений в силу [10].) Тогда на поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ будет иметь место неравенство $\dot{V} \le -\delta_0 V_0$ в силу системы без запаздывания. Оценивая $\dot{V}$, подобно предыдущему случаю получим, что на поверхности уровня $\dot{V} \le -\alpha_2 V_0 < 0$, если

$$\alpha_2 = \delta_0 - 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|K_{ij}||b_{ik}|\frac{\sqrt{A_{ii}A_{kk}}}{\det K} > 0. \tag{10}$$

Замечание 1. Предложенный метод построения квадратичных функций Ляпунова позволяет получить оценки для возмущений [8], определяющие степень устойчивости и решающие задачу устойчивости на конечном интервале времени. И в том, и в другом случае имеет место оценка

$$\frac{dV}{dt} \le -\alpha V \quad (\alpha > 0) \tag{11}$$

при $V \le V_0$, где $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$, т. е. $V \le V_0 e^{-\alpha t}$, а также $V(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le V(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))e^{-\alpha\tau}$, что обеспечивает выполнение условия $V(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Замечание 2. Выполнения условий (7),(10) можно добиться при $\max\limits_{i,j}|b_{ij}| \le \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

3. О возможности применения квадратичных функций Ляпунова к исследованию устойчивости нелинейных систем с запаздыванием. Запишем систему (1) в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j + b_{ij}x_j(t-\tau)) + \Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \tag{12}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, где Ω_i — остаточные члены второго порядка в разложении по формуле Тейлора

$$\Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}x_j x_k + \\ + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k(t-\tau)}x_j x_k(t-\tau) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j(t-\tau)\partial x_k(t-\tau)}x_j(t-\tau)x_k(t-\tau)\Big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

В силу непрерывности вторых производных для остаточных членов (13) на любом ограниченном множестве, содержащем состояние равновесия, с учетом $|x_j x_k| \le (x_j^2 + x_k^2)/2$, $|x_j x_k(t-\tau)| \le (x_j^2 + x_k^2(t-\tau))/2$, $|x_j(t-\tau)x_k(t-\tau)| \le (x_j^2(t-\tau) + x_k^2(t-\tau))/2$ укажем оценку

$$|\Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))| \le N\sum_{m=1}^{n}(x_m^2 + x_m^2(t-\tau)), \quad N = 3Mn/4 \tag{14}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $|\partial^2 f_i/\partial x_j \partial x_k| \le M$, $|\partial^2 f_i/\partial x_j(t-\tau)\partial x_k(t-\tau)| \le M$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Будем предполагать, что положительно определенная квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова для линеаризованной системы (3) и удовлетворяет ограничению (11). Тогда первая производная (2) согласно системе (12)

$$\dot{\tilde{V}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}(x_i\dot{x}_j + \dot{x}_i x_j),$$

поскольку $K_{ij} = K_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, примет вид

$$\dot{\tilde{V}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) = \dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \\ \ldots, x_n(t-\tau)) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_i\Omega_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)),$$

где $\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$ есть первая производная (2) в силу линеаризованной системы. Но тогда с учетом неравенства (11) получаем, что на поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$

$$\dot{\tilde{V}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le -\alpha V_0 + \\ + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_i\Omega_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)).$$

Заметим, что в силу ограничений (6) на величину x_i на поверхности уровня и того факта, что $V(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в точках поверхности уровня $|x_i(t-\tau)| \le \sqrt{V_0 A_{ii}/\det K}$. Кроме того, в виду ограничения (14) на $\Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$ имеем

$$|\Omega_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))| \le 2N\frac{\sum_{k=1}^{n}A_{kk}}{\det K}V_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, неравенство

$$\dot{\tilde{V}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \le -\nu V_0 \quad (0 < \nu < \alpha)$$

будет всегда иметь место при выполнении условия

$$-(\alpha-\nu)V_0+4N\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|K_{ij}|\sqrt{\frac{A_{ii}V_0}{\det K}}\frac{A_{kk}}{\det K}V_0\le 0,$$

откуда, так как $V_0>0$,

$$V_0\le\left(\frac{(\alpha-\nu)\det K\sqrt{\det K}}{4N\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|K_{ij}|\sqrt{A_{ii}}A_{kk}}\right)^2. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Положительно определенная квадратичная форма* (2)*, удовлетворяющая условиям* (7) *или* (10)*, является функцией Ляпунова для системы с запаздыванием* (12) *в любой области* $V(x_1,x_2,\dots,x_n)<V_0$*, где* V_0 *удовлетворяет* (15).

Замечание 3. Для области $V(x_1,x_2,\dots,x_n)<V_0$, определенной теоремой, можно получить оценки для возмущений [8], определяющие степень устойчивости и решающие задачу устойчивости на конечном интервале времени, поскольку имеет место оценка

$$\frac{dV}{dt}\le-\nu V\quad(\nu>0),$$

т. е. $V\le V_0e^{-\nu t}$, а также $V(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dots,x_n(t-\tau))\le V(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))e^{-\nu\tau}$, что обеспечивает выполнение условия $V(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dots,x_n(t-\tau))\le V(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Литература

[1] Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения* (Изд-во техн.-теор. лит., М.–Л., 1950).

[2] Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова* (Наука, М., 1970).

[3] Ким А.В. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием* (Изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 1992).

[4] Разумихин Б.С. *Устойчивость эредитарных систем* (Наука, М., 1988).

[5] Красовский Н.Н. *Об асимптотической устойчивости систем с последействием*, Прикл. матем. и механ. **20** (4), 513–518 (1956).

[6] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения* (Гостехиздат, М., 1959).

[7] Горбунов А.В., Каменецкий В.А. *Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием*, Автоматика и телемеханика **66** (10), 42–53 (2005).

[8] Разумихин Б.С. *Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием*, Автоматика и телемеханика **21** (6), 740–748 (1960).

[9] Антоновская О.Г. *О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами*, Дифференц. уравнения **49** (9), 1220–1224 (2013).

[10] Антоновская О.Г. *О выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами*, Дифференц. уравнения **52** (3), 276–281 (2016).

[11] Антоновская О.Г., Горюнов В.И. *Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности*, Изв. вузов. Матем., № 12, 12–18 (2016).

Ольга Георгиевна Антоновская

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Ильинская, д. 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,

e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

O.G. Antonovskaya

Application of quadratic Lyapunov functions to investigation of stability of systems with delay

Abstract. The particular attention when studying delay systems is payed to such important systems property as its stability. When studying ordinary differential systems stability by Lyapunov functions method quadratic Lyapunov functions are widely used. This paper is devoted to usage as Lyapunov function for system with delay some quadratic Lyapunov functions constructed for ordinary differential system with limitation over its first derivative due to this system. The conditions of possibility of use of such quadratic functions as Lyapunov functions for delay system are presented.

Keywords: system with delay, stability, direct Lyapunov method, quadratic Lyapunov function.

Ol'ga Georgievna Antonovskaya

Nizhny Novgorod State University,
65 Alekseevskaya str., Nizhny Novgorod, 603950 Russia,

`e-mail:` olga.antonovsckaja@yandex.ru