

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нургалиев



«23» сентября 2014г.

Программа дисциплины

Б1.В.ОД.7 Геометрия и топология

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика
Профиль подготовки: 01.01.04 Геометрия и топология
Квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»
Форма обучения: очная
Язык обучения: русский

Казань
2014

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины (модуля) «Геометрия и топология» являются: углубленное изучение следующих разделов геометрии и топологии: гомотопия непрерывных отображений и фундаментальная группа, сингулярные и симплициальные гомологии и когомологии, накрытия, локально тривиальные расслоения, векторные расслоения, структуры на многообразиях, теоретическая и практическая подготовка, овладение современным математическим аппаратом, применяемым в геометрии и топологии, для дальнейшего использования в исследованиях, а также подготовка к сдаче кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Геометрия и топология» включена в раздел Б1.В.ОД.7 вариативной части профиля 01.01.04 геометрия и топология, направления подготовки 01.06.01 математика и механика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр. Для ее успешного освоения необходимо знакомство с основными понятиями геометрии многомерных пространств и общей топологии.

Приобретенные знания в результате освоения дисциплины «Геометрия и топология» способствуют дальнейшему повышению квалификации в области геометрии и топологии, послужат основой для научно-исследовательской работы аспирантов. Материал дисциплины входит в программу кандидатского экзамена по специальности «геометрия и топология».

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен

знать:

определения и свойства основных объектов, изучаемых в алгебраической топологии, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области алгебраической топологии, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

владеть:

методами решения различных задач в области алгебраической топологии.

демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания и навыки в научно-исследовательской работе и преподавании.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
УК-1	Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
УК-3	Готовность участвовать в работе российских и международных

	исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: экзамен в 5 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Комплексы и их группы гомологий. Сингулярный комплекс топологического пространства. Граничный оператор. Точные последовательности комплексов. Полуточность гомологического функтора. Связывающий гомоморфизм. Гомологическая последовательность, ассоциированная с точной последовательностью комплексов. 5-лемма и ее применение к гомологическим последовательностям.	5	8	0	0	15
2.	Гомотопия между цепными отображениями. Категория $\mathcal{H}\mathcal{G}$. Сингулярный комплекс пары топологических пространств. Гомологическая последовательность пары топологических пространств. Сингулярные гомологии одноточечного пространства. Нульмерные гомологии. Расщепляющиеся точные последовательности. Приведенные группы гомологий. Гомологии пары (X, P) .	5	7	0	0	15

3.	Гомотопии непрерывных отображений. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства. Ретракции. Фундаментальная группа топологического пространства. Накрытия. Категория Htp .	5	7	0	0	15
4.	Цепная гомотопия, индуцированная гомотопией непрерывных отображений. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Барицентрическое подразделение. Вырезание. Последовательность Майера-Вьеториса	5	7	0	0	15
5.	Группы гомологий n -мерной сферы. Группы гомологий двумерных поверхностей. Ретракции. Сфера не является ретрактом шара. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Касательные векторные поля на сферах.	5	7	0	0	12
			36	0	0	72

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Комплексы и их группы гомологий. Сингулярный комплекс топологического пространства. Граничный оператор. Точные последовательности абелевых групп. Короткие точные последовательности. Точные последовательности комплексов. Полуточность гомологического функтора. Связывающий гомоморфизм. Гомологическая последовательность, ассоциированная с точной последовательностью комплексов. 5-лемма и ее применение к гомологическим последовательностям.

Тема 2. Гомотопия между цепными отображениями. Категория $\text{H}\partial\text{G}$. Сингулярный комплекс пары топологических пространств. Гомологическая последовательность пары топологических пространств. Сингулярные гомологии одноточечного пространства. Нульмерные гомологии. Расщепляющиеся точные последовательности. Приведенные группы гомологий. Гомологии пары (X, P) .

Тема 3. Гомотопии непрерывных отображений. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства. Ретракции. Фундаментальная группа топологического пространства. Накрытия. Категория Htp .

Тема 4. Цепная гомотопия, индуцированная гомотопией непрерывных отображений. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Барицентрическое подразделение. Вырезание. Последовательность Майера-Вьеториса.

Тема 5. Группы гомологий n -мерной сферы. Группы гомологий двумерных поверхностей. Ретракции. Сфера не является ретрактом шара. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Касательные векторные поля на сферах.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

На лекциях: в преподавании используются мультимедийные презентации, иллюстрации, таблицы, методические пособия.

На семинарах: в преподавании курса используются активные и интерактивные технологии проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Вопросы:

1. Категории и функторы. Естественные преобразования.
2. Симплициальные комплексы и симплициальные отображения.
3. Симплициальные аппроксимации.
4. Группы гомологий двумерных многообразий.
5. Гомотопические группы топологического пространства.
6. Универсальное накрывающее пространство.
7. Фундаментальная группа накрывающего пространства.
8. Фундаментальная группа окружности и основная теорема алгебры.
9. Точная гомотопическая последовательность расслоения.
10. Деформационная ретракция.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Экзамен по курсу «Геометрия и топология» оценивается следующим образом.

Оценка «отлично» выставляется аспиранту, успешно выступившему с докладом, продемонстрировавшему высокий уровень умения решать задачи домашних заданий и продемонстрировавшему на экзамене высокий уровень знаний.

Оценка «хорошо» выставляется аспиранту, успешно выступившему с докладом, продемонстрировавшему хороший уровень умения решать задачи домашних заданий и продемонстрировавшему на экзамене базовый уровень знаний.

Оценка «удовлетворительно» выставляется аспиранту, выступившему с докладом на практическом занятии, продемонстрировавшему удовлетворительный уровень умения решать задачи домашних заданий и продемонстрировавшему на экзамене частичный уровень знаний без грубых ошибок.

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Темы для кратких докладов.

1. Категории и функторы. Естественные преобразования.
2. Симплициальные комплексы и симплициальные отображения.
3. Симплициальные аппроксимации.
4. Гомотопические группы топологического пространства.
5. Универсальное накрывающее пространство.
6. Фундаментальная группа окружности и основная теорема алгебры.
7. Точная гомотопическая последовательность расслоения.

8. Фундаментальная группа накрывающего пространства.

Пример контрольной работы.

1. Вычислить группы гомологий конкретного цепного комплекса абелевых групп.
2. Установить, являются ли два данных топологических пространства гомотопически эквивалентными.
3. Доказать, что сфера не является ретрактом шара.
4. Вычислить группы сингулярных гомологий конкретного топологического пространства.

7.3. Вопросы к экзамену

1. Группы гомологий цепных комплексов.
2. Цепная гомотопия и ее свойства.
3. Сингулярный комплекс топологического пространства.
4. Связывающий гомоморфизм. Гомологическая последовательность, ассоциированная с точной последовательностью комплексов.
5. Сингулярный комплекс пары топологических пространств.
6. Гомологическая последовательность пары топологических пространств.
7. Приведенные группы гомологий.
8. Гомотопия непрерывных отображений.
9. Ретракты.
10. Накрытия.
11. Цепная гомотопия, индуцированная гомотопией непрерывных отображений.
12. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
13. Последовательность Майера-Вьеториса.
14. Группы гомологий n -мерной сферы.
15. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
16. Существование единичного касательного векторного поля к n -мерной сфере.
17. Категория Htr .
18. Барицентрическое подразделение.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
УК-1	Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Способность представлять место и роль изучаемой дисциплины в ряду других математических теорий. Способность устанавливать связи материала дисциплины с темой научного исследования и видеть возможности применения изучаемого материала в научных исследованиях. Способность к	Доклад по указанной преподавателем теме, участие в дискуссии при обсуждении докладов. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.

		самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий.	
УК-3	Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач	Способность методически правильно организовать материал доклада. Способность к самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий.	Доклад по указанной преподавателем теме, участие в дискуссии при обсуждении докладов. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры.	Доклад по указанной преподавателем теме. участие в дискуссии при обсуждении докладов. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.	Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры.	Доклад по указанной преподавателем теме, участие в дискуссии при обсуждении докладов. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий.
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях.	Способность методически правильно организовать материал доклада. Способность в сжатой и математически строгой форме изложить решение решенной задачи.	Доклад по указанной преподавателем теме. Изложение решений задач из домашних заданий, на контрольной работе и при сдаче экзамена.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аспиранту необходимо изучить теоретический материал, изложенный на лекции. Особое внимание следует обратить на определения основных понятий и формулировки основных

теорем, выделяя трудные для усвоения места для последующего обсуждения. При подготовке к практическому занятию следует кроме лекций воспользоваться предложенной дополнительной литературой и электронными ресурсами. Эти источники следует также использовать при решении задач по изучаемой теме. При подготовке к докладу необходимо особое внимание обратить на организацию и изложение материала доклада.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия и топология многообразий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 2. Москва URSS [Либроком 2013] 295 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Теория гомологий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 3. Москва URSS [Либроком 2013] 287 с.

9.2. Дополнительная литература

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. Москва URSS [Либроком 2013] 335 с.
2. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М. Мир. 1983. 302 с.
3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 3-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 512 с.

9.3. Интернет-ресурсы:

1. Новиков С.П. Топология. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 12 ВИНТИ, М., 1986, С. 5-252.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=intf&papered=70&option_lang=rus

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием вместимостью до 45 человек, компьютерный класс на 15 рабочих мест с выходом в интернет, принтер, проектор, экран, ноутбук.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом рекомендаций по направлению подготовки.

Автор: зав. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Шурыгин В.В.

Рецензент: доц. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Сосов Е.Н.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2014 года, протокол № 7.