Известия вузов. Математика
2008, №10, с. 39–47

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

А.В. ОЖЕГОВА

СХОДИМОСТЬ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ ОБЩЕГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ

Аннотация. Исследуется проекционный метод решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши. В зависимости от индекса уравнения введены пары весовых пространств, являющиеся сужением пространства суммируемых функций. Доказана корректность рассматриваемого уравнения. Установлены достаточные условия сходимости проекционного метода в интегральной метрике.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение первого рода, проекционный метод, аппроксимация.

Abstract. We study the projective solution method for singular integral equations of the first kind with the Cauchy kernel. Depending on the index of the equation, we introduce pairs of weight spaces which represent the restriction of the space of summable functions. We prove the correctness of the stated problem. We obtain sufficient conditions for the convergence of the projective method in the integral metrics.

Keywords: singular integral equation of the first kind, projective method, approximation.

УДК: 519.642

Введение

В статье исследуется общий проекционный метод решения сингулярного интегрального уравнения (с. и. у.) первого рода с ядром Коши вида

$$A\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} h(t;\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad |t| < 1, \tag{0.1}$$

где $h(t;\tau)$, $f(t)$ — известные функции, $\varphi(\tau)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл

$$I\varphi = I(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу.

К таким уравнениям приводит значительное число теоретических и прикладных задач (см., напр., [1], [2] и библиографию в них), что вызывает к ним большой интерес. Трудность решения уравнения (0.1) связана в первую очередь с его некорректностью в известных функциональных пространствах. Теория таких уравнений достаточно хорошо разработана

Поступила 09.11.2006

([2]–[4]), однако получить решение уравнения (0.1) в замкнутом виде удается лишь в редких частных случаях. Поэтому для его решения применяются различные аппроксимативные методы, которые требуют теоретического обоснования и получения оценок погрешности. Несмотря на достаточно большое число работ в этой области (см., напр., [1] и библиографию) остался неисследованным вопрос о сходимости приближенных методов решения с. и. у. (0.1) в наиболее широком пространстве функций, а именно, в пространстве суммируемых на отрезке $[-1,1]$ функций $L = L[-1,1]$. Известно (напр., [3], [4]), что индекс уравнения (0.1) принимает три значения: 1) $\varkappa = 1$, 2) $\varkappa = 0$, 3) $\varkappa = -1$, и в зависимости от этого решение $\varphi(t)$ ищется в классе функций 1) неограниченных на обоих концах, 2) ограниченных на одном конце и неограниченных на другом, 3) ограниченных на обоих концах. При этом $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = \rho(t)x(t)$, где $x(t)$ — новая искомая функция, а $\rho(t)$ соответственно 1) $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, 2) $\rho(t) = \sqrt{\frac{1\pm t}{1\mp t}}$, 3) $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Некорректность с. и. у. (0.1) заключается в нарушении единственности при $\varkappa = 1$, разрешимости при $\varkappa = -1$ и в отсутствии устойчивости в пространствах суммируемых функций при всех $\varkappa$.

В данной работе, следуя [1], [5], [6], в зависимости от индекса с. и. у. (0.1) вводим специальные пары пространств, являющиеся некоторыми сужениями пространств суммируемых функций, в которых устанавливается корректность исходной задачи. Затем к с. и. у. (0.1) применяется общий проекционный метод решения и проводится его теоретическое обоснование при минимальных требованиях на исходные данные.

1. Случай $\varkappa = 1$

Обозначим через $X_\rho(1)$ пространство суммируемых на $[-1,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-1}^{1} \rho(t)x(t)dt = 0, \tag{1.1}$$

для которых сингулярный интеграл $I(\rho x)$ является также суммируемой функцией.

В качестве $Y_q(1)$ возьмем пространство суммируемых функций $f(t)$ таких, что $\frac{1}{q}I(qf;t)$ является функцией суммируемой, $q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$. Нормы в этих пространствах определим соответственно следующим образом:

$$\|x\|_{X_\rho(1)} = \|\rho x\|_L + \|I(\rho x)\|_L, \quad x \in X_\rho(1), \tag{1.2}$$

$$\|f\|_{Y_q(1)} = \|f\|_L + \left\|\tfrac{1}{q}I(qf)\right\|_L, \quad f \in Y_q(1), \tag{1.3}$$

где $\|\varphi\|_L = \int\limits_{-1}^{+1} |\varphi(t)|dt$.

Тогда с. и. у. (0.1) эквивалентно операторному уравнению

$$Kx = Sx + Vx = f \quad (x \in X_\rho(1), \quad f \in Y_q(1)), \tag{1.4}$$

где

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\rho(\tau)x(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad Vx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Лемма 1. *Сингулярный интеграл $S : X_\rho(1) \to Y_q(1)$ непрерывно обратим и справедливы равенства*

$$\|S\|_{X_\rho(1)\to Y_q(1)} = 1, \quad \|S^{-1}\|_{Y_q(1)\to X_\rho(1)} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$Sx = f. \tag{1.5}$$

Известно [3], [4], что оператор S обратим, причем $S^{-1}(f;t) = -I(qf;t) + a_0$, где a_0 — произвольная константа. Из условия (1.1) получаем, что $a_0 = 0$.

Покажем, что операторы $S : X_\rho(1) \to Y_q(1)$, $S^{-1} : Y_q(1) \to X_\rho(1)$ непрерывны. Для этого достаточно показать, что они ограничены. Используя определения норм (1.2), (1.3), имеем

$$\|Sx\|_{Y_q(1)} = \|I(\rho x)\|_{Y_q(1)} = \|I(\rho x)\|_L + \left\|\tfrac{1}{q}I(qI(\rho x))\right\|_L = \|I(\rho x)\|_L + \|\rho x\|_L = \|x\|_{X_\rho(1)}, \tag{1.6}$$

$$\|S^{-1}f\|_{X_\rho(1)} = \|\rho x\|_L + \|I(\rho x)\|_L = \left\|\tfrac{1}{q}I(qf)\right\|_L + \|f\|_L = \|f\|_{Y_q(1)}. \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.6) и (1.7) следует утверждение леммы. □

Из леммы 1 и теории Рисса–Шаудера для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода, следует

Теорема 1. *Пусть ядро $h(t;\tau)$ таково, что оператор $V : X_\rho(1) \to Y_q(1)$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1.4)*, имеет только нулевое решение, то оператор $K : X_\rho(1) \to Y_q(1)$ непрерывно обратим.*

Обозначим через $\mathbb{H}_m$ множество всех алгебраических многочленов степени не выше m. Введем пару конечномерных подпространств

$$X_n(1) = \mathbb{H}_n \cap X_\rho(1), \quad Y_n(1) = \mathbb{H}_{n-1} \cap Y_q(1); \quad \dim X_n = \dim Y_n = n < \infty.$$

Теперь с. и. у. (0.1), а следовательно, и с. и. у. (1.4) будем решать с помощью общего проекционного метода, согласно которому приближенное решение $x_n^*(t) \in X_n(1)$ будем определять как точное решение функционального уравнения

$$K_n x_n \equiv Sx_n + P_n T x_n = P_n f \quad (x_n \in X_n(1), \quad P_n \in L(Y_q(1), Y_n(1))), \tag{1.8}$$

где $L(Y_q(1), Y_n(1))$ — множество линейных (т. е. аддитивных и однородных) проекционных полиномиальных операторов P_n из $Y_q = Y_q(1)$ в $Y_n = Y_n(1)$. Очевидно, уравнение (1.8) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $n \in \mathbb{N}$ относительно коэффициентов полинома $x_n(t) \in X_n(1)$.

Теорема 2. *Пусть с. и. у.* (1.4) *имеет единственное решение $x^* = K^{-1}f$ в $X_\rho(1)$ при любой правой части $f(t)$ из $Y_q(1)$ и ядро $h(t,\tau) \in Y_q(1) \times C$.*

Тогда при всех n, начиная с некоторого, аппроксимирующие уравнения (1.8) *также однозначно разрешимы и для погрешности приближенного решения $x_n^* = K_n^{-1}P_n f$ справедлива оценка*

$$\|x_n^* - x^*\|_{X_\rho(1)} = O\{\|h - P_n^t h\|_{Y_q,C} + \|y - P_n y\|_{Y_q}\} = O\{\|P_n\|_{Y_q(1)}[E_{n-1}(f)_q + E_{n-1}^t(h)_q]\},$$

где $E_{n-1}(\varphi)_q = \inf\{\|\varphi - \varphi_n\|_{Y_q(1)} : \varphi_n \in Y_n(1)\}$ — наилучшее приближение функции φ элементами из Y_n, $\|\varphi\|_{Y_q} = \|\varphi\|_{Y_q(1)}$, а P_n^t означает, что оператор P_n применен к функции $h(t,\tau)$ по переменной t.

Доказательство. Оценим близость точного оператора K и аппроксимирующих его операторов K_n. С этой целью для любого $x_n \in X_n$ из (1.8) и (1.4) находим

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_{Y_q} = \|Vx_n - P_n V x_n\|_{Y_q} =$$

$$= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)h(t;\tau)x_n(\tau)d\tau - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)P_n^t h(t;\tau)x_n(\tau)d\tau\right\|_{Y_q} =$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \rho(\tau)[h(t;\tau) - P_n^t(h(t;\tau))] x_n(\tau) d\tau \right\|_{Y_q} \le \|h - P_n^t h\|_{Y_q, C} \|x_n\|_{X_\rho}.$$

На основании теоремы 7 ([7], гл. I) для всех $n \in \mathbb{N}$, для которых выполнено неравенство $\|K^{-1}\| \, \|K - K_n\| < 1$, уравнения (1.8) однозначно разрешимы и

$$\|x_n^* - x^*\|_{X_{\rho(1)}} = O\{\|h - P_n^t h\|_{Y_q, C} + \|y - P_n y\|_{Y_q}\}.$$

Пусть $\overline{\varphi}_n$ — полином наилучшего приближения порядка $n-1$ в пространстве Y_q. Тогда с учетом проекционности оператора P_n имеем

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{Y_q} \le \|\varphi - \overline{\varphi}_n\|_{Y_q} + \|P_n(\overline{\varphi}_n - \varphi)\|_{Y_q} \le \|P_n\|_{Y_q \to Y_q} E_{n-1}(\varphi)_q,$$

и вторая часть оценки теоремы также установлена. □

Следствие. Если правая часть $f(t)$, ядро $h(t,\tau)$ с. и. у. (0.1) и оператор P_n таковы, что $\|h - P_n^t h\|_{Y_q, C} \to 0$, $\|y - P_n y\|_{Y_q} \to 0$, $n \to \infty$, то в условиях теоремы имеет место сходимость приближенных решений к точному в интегральной метрике

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_L = \|\rho(x^* - x_n^*)\|_L \to 0, \quad n \to \infty.$$

Покажем, что предположения следствия вполне реальны.

Пусть $P_n = \Phi_n$ — оператор Фурье, который ставит в соответствие любой функции $\varphi \in L[-1,+1]$ ее отрезок ряда Фурье $\Phi_n\varphi$ по ортогональным полиномам с весом $q(t)$ на $[-1,+1]$

$$\Phi_n\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}^U(\varphi) U_{k-1}(t),$$

где $U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$, $n = 0, 1, \dots,$ — полиномы Чебышева II рода,

$$c_k^U(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\tau^2}\, \varphi(\tau) U_k(\tau) d\tau$$

— коэффициенты Фурье–Чебышева.

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in L[-1,+1]$ справедливы оценки*

$$\|\Phi_n\varphi\|_{Y_{q(1)}} \le (5 + 3\ln n)\|\varphi\|_L = O(\ln n)\|\varphi\|_{Y_q}.$$

Доказательство. По определению нормы (1.3)

$$\|\Phi_n\varphi\|_{Y_{q(1)}} = \|\Phi_n\varphi\|_L + \Big\|\frac{1}{q} I(q\Phi_n\varphi)\Big\|_L. \tag{1.9}$$

Для первого слагаемого (1.9) имеем

$$\|\Phi_n\varphi\|_L = \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}^U(\varphi) U_{k-1}(t) \right| dt =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left| \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \sum_{k=1}^{n} \sin k \arccos\tau \frac{\sin k \arccos t}{\sqrt{1-t^2}} d\tau \right| dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{+1} |\varphi(\tau)| \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{k=1}^{n} \sin k \arccos\tau \frac{\sin k \arccos t}{\sqrt{1-t^2}} \right| dt\, d\tau.$$

Делая в интегралах замену переменных $t = \cos s$, $\tau = \cos\sigma$ и проводя несложные преобразования, получим

$$\|q\Phi_n\varphi\|_L \le \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n \sin k\sigma \sin ks\right| ds \sin\sigma\, d\sigma \le$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\left(\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n \cos k(s+\sigma)\right| ds + \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n \cos k(s-\sigma)\right| ds\right)\sin\sigma\, d\sigma.$$

Делая в первом интеграле замену $s_1 = -s$, затем объединяя интегралы и делая замену переменной $s = s_1 - \sigma$ с учетом 2π-периодичности подинтегральной функции и известных результатов [8], имеем

$$\|\Phi_n\varphi\|_L \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\int_{-\pi}^\pi \left|\sum_{k=1}^n \cos ks\right| ds \sin\sigma\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\int_{-\pi}^\pi \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}} - \frac{1}{2}\right| ds \sin\sigma\, d\sigma \le$$
$$\le (3+\ln n)\int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\sigma\, d\sigma = (3+\ln n)\|\varphi\|_L.$$

Итак,

$$\|\Phi_n\varphi\|_L \le (3+\ln n)\|\varphi\|_L. \tag{1.10}$$

Для второго слагаемого из (1.9), учитывая известное соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\rho(t)U_{k-1}(t)}{\tau - t}dt = -T_k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

находим

$$\left\|\tfrac{1}{q}I(q\Phi_n\varphi)\right\|_L = \int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,\Phi_{n-1}^U(\varphi;\tau)d\tau}{\tau - t}\right| dt =$$
$$= \int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\sum\limits_{k=1}^n c_{k-1}^U(\varphi)U_{k-1}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right| dt =$$
$$= \int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left|\sum_{k=1}^n c_{k-1}^U(\varphi)T_k(t)\right| dt =$$
$$= \int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left|\sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\tau^2}\,\varphi(\tau)U_{k-1}(\tau)T_k(t)d\tau\right| dt \le$$
$$\le \int_{-1}^{+1}|\varphi(\tau)|\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left|\sum_{k=1}^n \sin k\arccos\tau \cos k\arccos t\right| dt\, d\tau.$$

Делая в интеграле замену переменной $t = \cos s$ и $\tau = \cos\sigma$, получим

$$\left\|\tfrac{1}{q}I(q\Phi_n\varphi)\right\|_L \le \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n \sin k\sigma \cos ks\right| ds \sin\sigma\, d\sigma =$$
$$= \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n \sin k(\sigma+s) + \sin k(\sigma - s)\right| ds \sin\sigma\, d\sigma \le$$

$$\leq \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sin k(s-\sigma) \Big| ds \sin\sigma \, d\sigma \leq$$

$$\leq \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\cos\frac{s-\sigma}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})(s-\sigma)}{2\sin\frac{s-\sigma}{2}} \right| ds \sin\sigma \, d\sigma =$$

$$= \int_0^\pi |\varphi(\cos\sigma)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1)\frac{s-\sigma}{2} \sin n\frac{s-\sigma}{2}}{\sin\frac{s-\sigma}{2}} \right| ds \sin\sigma \, d\sigma.$$

Отсюда с учетом известных результатов [8] получаем

$$\big\| \tfrac{1}{q} I(q\Phi_n\varphi) \big\|_L \leq 2(1+\ln n)\|\varphi\|_L. \tag{1.11}$$

Тогда из (1.9) и оценок (1.10) и (1.11) следует утверждение леммы. □

Обозначим через $W^r H_1^\alpha[-1,1]$ множество функций, имеющих производные до r-го порядка, удовлетворяющих условию Гёльдера в $L = L_1[-1,1]$, а $E_n(\varphi)_L$ — наилучшее приближение функции φ в L всевозможными полиномами порядка $n-1$.

Лемма 3. *Если $\varphi(t) \in W^r H_1^\alpha$, то справедливо соотношение*

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{Y_q(1)} = O\bigg(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\bigg), \quad r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Доказательство. По определению нормы (1.3)

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{Y_q(1)} = \|\varphi - \Phi_n\varphi\|_L + \big\| \tfrac{1}{q} Iq(\varphi - \Phi_n\varphi) \big\|_L. \tag{1.12}$$

Обозначим через φ_n полином наилучшего приближения в пространстве L порядка $n-1$. Для первого слагаемого (1.12) с учетом оценки леммы 2 и аналога теоремы Джексона [9] имеем

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_L \leq \|\varphi - \varphi_n\|_L + \|\Phi_n(\varphi - \varphi_n)\|_L \leq$$

$$\leq E_n(\varphi) + \|\Phi_n\|_{L\to Y_q} E_n(\varphi) = (1 + \|\Phi_n\|_{L\to Y_q}) E_n(\varphi) = O\bigg(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\bigg).$$

Для второго слагаемого в (1.12) с учетом леммы 2 и аналога теоремы Джексона в L имеем

$$\big\| \tfrac{1}{q} Iq(\varphi - \Phi_n\varphi) \big\|_L \leq \bigg\| \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{q} Iq\{(\Phi_{2^k n} - \Phi_{2^{k-1}n})(\varphi - \varphi_{2^{k-1}n})\} \bigg\|_L \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \big\| \tfrac{1}{q} Iq(\Phi_{2^k n} - \Phi_{2^{k-1}n}) \big\|_{L\to Y_q} E_{2^{k-1}n}(\varphi) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \big(\big\| \tfrac{1}{q} I(q\Phi_{2^k n}) \big\| + \big\| \tfrac{1}{q} I(q\Phi_{2^{k-1}n}) \big\| \big) E_{2^{k-1}n}(\varphi) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} [2(1 + \ln(2^k n)) + (1 + \ln(2^{k-1}n))] \frac{1}{(2^{k-1}n)^{r+\alpha}} = O\bigg(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\bigg).$$

Тогда из (1.12) и полученных оценок следует утверждение леммы. □

Теорема 2 и леммы 2 и 3 позволяют теоретически обосновать метод ортогональных многочленов решения исходного уравнения (0.1) (напр., [1], [5]) в введенных пространствах как конкретную реализацию общего проекционного метода.

2. Случай $\varkappa = 0$

Пусть $X_\rho(0)$ — пространство суммируемых на $[-1,+1]$ функций $x(t)$, для которых $\frac{1}{\sqrt{1\mp t}}x$ и $\frac{1}{\sqrt{1\pm t}}I(\rho x)$ также являются суммируемыми функциями, $Y_q(0)$ — пространство суммируемых функций $f(t)$ таких, что $\frac{1}{\sqrt{1\pm t}}f(t)$ и $\frac{1}{\sqrt{1\mp t}}I(qf;t)$ являются суммируемыми функциями с нормами соответственно

$$\|x\|_{X_\rho(0)} = \left\|\frac{1}{\sqrt{1\mp t}}x\right\|_L + \left\|\frac{1}{\sqrt{1\pm t}}I(\rho x)\right\|_L, \quad x\in X_\rho(0), \quad \rho(t) = \sqrt{\tfrac{1\pm t}{1\mp t}}, \tag{2.1}$$

$$\|f\|_{Y_q(0)} = \left\|\frac{1}{\sqrt{1\pm t}}f\right\|_L + \left\|\frac{1}{\sqrt{1\mp t}}I(qf)\right\|_L, \quad f\in Y_q(0), q(t) = \frac{1}{\rho(t)}. \tag{2.2}$$

Тогда исходное с. и. у. (0.1) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$Kx = Sx + Vx = f \quad (x\in X_\rho(0), \quad f\in Y_q(0)), \tag{2.3}$$

где $Sx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\rho(\tau)x(\tau)}{\tau-t}d\tau$, $Vx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau$.

Корректность с. и. у. (2.3), а значит, и исходного (0.1) устанавливает

Теорема 3. *Пусть ядро $h(t;\tau)$ таково, что оператор $V: X_\rho(0)\to Y_q(0)$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (2.3)*, имеет только нулевое решение, то оператор $K: X_\rho(0)\to Y_q(0)$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Непрерывная обратимость оператора $S: X_\rho(0)\to X_q(0)$ устанавливается тем же способом, что в лемме 1. Тогда утверждение теоремы следует из теории Рисса–Шаудера для уравнений, приводящихся к уравнениям II рода. □

Будем решать с. и. у. (2.3) общим проекционным методом. Введем пару конечномерных подпространств: $X_n(0) = \mathbb{H}_{n-1}\cap X_\rho(0)$, $Y_n(0) = \mathbb{H}_{n-1}\cap Y_q(0)$.

Приближенное решение $x^*(t)\in X_n(0)$ будем определять как точное решение функционального уравнения

$$K_nx_n \equiv Sx_n + P_nTx_n = P_nf \quad (x_n\in X_n(0), \quad P_n\in L(Y_q(0), Y_n(0))), \tag{2.4}$$

где $L(Y_q(0), Y_n(0))$ — множество линейных (т. е. аддитивных и однородных) проекционных полиномиальных операторов P_n из $Y_q = Y_q(0)$ в $Y_n = Y_n(0)$.

Теорема 4. *Пусть с. и. у.* (0.1) *имеет единственное решение $x^* = K^{-1}f$ в $X_\rho(0)$ при любой правой части $f(t)$ из $Y_q(0)$ и ядро $h(t,\tau)\in Y_q(0)\times C$.*

Тогда при всех n, начиная с некоторого, аппроксимирующие уравнения (2.4) *также однозначно разрешимы и для погрешности приближенного решения $x_n^* = K_n^{-1}P_nf$ справедлива оценка*

$$\|x_n^* - x^*\|_{X_\rho(0)} = O\{\|h - P_n^th\|_{Y_q,C} + \|y - P_ny\|_{Y_q}\} = O\{\|P_n\|_{Y_q(0)}[E_{n-1}(f)q + E_{n-1}^t(h)_q]\},$$

где $E_{n-1}(\varphi)_q = \inf\{\|\varphi-\varphi_n\|_{Y_q(0)} : \varphi_n\in Y_n(0)\}$ — наилучшее приближение функции φ элементами из Y_n, $\|\varphi\|_{Y_q} = \|\varphi\|_{Y_q(0)}$, а P_n^t означает, что оператор P_n применен к функции $h(t,\tau)$ по переменной t.

3. Случай $\varkappa = -1$

Пусть $X_\rho(-1)$ — пространство суммируемых на $[-1,+1]$ функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $\frac{1}{\rho}I(\rho x;t)$ также является суммируемой функцией, а $Y_q(-1)$ — пространство суммируемых функций $f(t)$ таких, что $I(qf;t)$ является суммируемой функцией и выполнено условие

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t) - V(x,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

где $Vx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau,\ \rho(t) = \sqrt{1-t^2},\ q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$.

Нормы в этих пространствах определим соответственно следующим образом:

$$\|x\|_{X_\rho(-1)} = \|x\|_L + \Big\|\frac{1}{\rho}I(\rho x)\Big\|_L, \quad x \in X_\rho(-1),$$
$$\|f\|_{Y_q(-1)} = \|qf\|_L + \|I(qf)\|_L, \quad f \in Y_q(-1).$$

Корректность исходной задачи в этой паре пространств устанавливается тем же способом, что и в пп. 1, 2.

Введем пару конечномерных подпространств:

$$X_n(-1) = \mathbb{H}_{n-1} \cap X_\rho(-1), \quad Y_n(-1) = \mathbb{H}_n \cap Y_q(-1).$$

Приближенное решение x_n^* будем определять как точное решение функционального уравнения

$$K_n x_n \equiv Sx_n + P_nTx_n = P_nf \quad (x_n \in X_n(-1), \quad P_n \in L(Y_q(-1), Y_n(-1))),$$

где $L(Y_q(-1), Y_n(-1))$ — множество линейных (т. е. аддитивных и однородных) проекционных полиномиальных операторов P_n из $Y_q = Y_q(-1)$ в $Y_n = Y_n(-1)$.

Аналогично случаям $\varkappa = 1$ и $\varkappa = 0$ устанавливается теоретическое обоснование этого метода в введенной паре пространств $(X_\rho(-1), Y_q(-1))$ при дополнительном условии, что $P_n\varphi \in Y_n(-1)$ для $\varphi \in Y_q(-1)$.

При этом установлена оценка погрешности приближенного решения $x^* = K_n^{-1}P_nf$ в норме пространства $X_\rho(-1)$ и (как простое следствие) в пространстве $L[-1,1]$.

Литература

[1] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.

[2] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

[3] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.

[4] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука*, 1968. – 512 с.

[5] Ожегова А.В., Валиуллова Л.Э. *О равномерной аппроксимации решения сингулярного интегрального уравнения I рода проекционными методами* // Матеріали Першої Міжнародної науково-практичної конференції “Науковий потенціал світу’2004”. Т. 31. Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. - С. 64.

[6] Ожегова А.В. *Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дисс. . . . канд. физ.- матем. наук. – Казань, 1996. – 96 с.

[7] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.

[8] Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

[9] Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

А.В. Ожегова

доцент, кафедра теории функций и приближений,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: Alla.Ozhegova@ksu.ru

A.V. Ozhegova

Associate Professor, Chair of Theory of Functions and Approximations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Alla.Ozhegova@ksu.ru