УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2022, Т. 164, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 271–284 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.248 doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.271-284

d-РИСК БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ УСПЕХА В ИСПЫТАНИЯХ БЕРНУЛЛИ

Н.Ф. Билалова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Рассмотрена статистическая проблема оценки вероятности p успеха в испытаниях Бернулли при априорном сведении о ее исключительной малости. В рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности статистического вывода построена байесовская оценка p при специальной функции потерь типа 1-0 с ограничением на относительную ошибку и априорном бета-распределении оцениваемого параметра. Вычислен d-риск байесовской оценки и установлена невозможность построения d-гарантийной процедуры оценивания по фиксированному объему испытаний.

Ключевые слова: испытания Бернулли, байесовская оценка вероятности, априорное бета-распределение, d-риск оценки

Введение

Оценка вероятности успеха p в испытаниях Бернулли, когда априори известно о чрезвычайной малости этой вероятности, скажем, меньше 0.01, является примером практически безнадежной для решения статистической задачи, если требуется, чтобы оценка удовлетворяла определенным ограничениям на ее точность и надежность. Когда в выборочных данных «сплошные нули» не представляется возможным использовать в практических целях даже верхнюю доверительную границу для p, ибо оптимальная равномерно наиболее точная верхняя доверительная граница является вырожденной, равной нулю (см. [3, гл. 3, пример 7]). Более того, когда решаются такие задачи, вряд ли имеет смысл накладывать ограничения на абсолютную ошибку оценки. Так, если мы не ошибемся при оценивании малой вероятности в два раза при умеренных объемах испытаний, то это будет большим практическим достижением, поэтому имеет смысл задавать ограничения только на относительную ошибку оценивания.

Мы будем решать данную проблему, имея в виду наличие некоторой, достаточно большой последовательности предыдущих схем испытаний Бернулли с изменяющейся случайным образом вероятностью p успешного исхода. Типичный пример такой ситуации – контроль и аттестация штучной продукции по количественному (альтернативному) признаку. Это та область статистических исследований, где наиболее целесообразно использовать байесовские методы принятия решений. Выбор априорного распределения p практически очевиден - это бета-распределение, плотность которого «свалена» в направлении нулевых значений (см. в связи с этим [4, гл. 3, пример 2.7]) . Наличие архива предыдущих испытаний позволит без труда оценить с высокой степенью точности параметры этого распределения.

Еще одной особенностью данной проблемы является особый способ ограничений на надежность оценки или, иначе говоря, на величину средних потерь. Нам кажется, что априорный риск оценки – слишком грубая конструкция, чтобы на его основе выявлять ее надежность. Лучше использовать условную вероятность выполнения заданных ограничений на относительную ошибку принятого решения о значении p. Это так называемый d-апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода, анонсированный в диссертации [10] (см. также [11] и [9]). Основная особенность данного подхода состоит в том, что контролируется вероятность не больших отклонений оценки от неизвестного (оцениваемого) значения параметра, а вероятность удаленности выданного априорным распределением значения параметра от принятого решения (значения оценки). Такой подход для решения аналогичных задач по оценке среднего значения нормального распределения использовался в публикациях [5, 6, 8].

В настоящей статье находится байесовская оценка вероятности p успеха в испытаниях Бернулли при априорном бета-распределении p и функции потерь типа 1-0, используемой в [8]. Вычисляется функция d-риска этой оценки. Графические представления позволяют высказать предположение, что эта функция монотонно убывает с ростом ее аргумента d. В таком случае невозможно планировать заранее объем испытаний, гарантирующий заданное ограничение на d-риск. Допускается только снять с графика величину d-риска от полученного значения оценки p. По-видимому, при решении этой проблемы следует использовать универсальную d-гарантийную процедуру (см. [11]).

1. Байесовская оценка вероятности и ее свойства

1.1. Постановка проблемы оценки p и выбор априорного распределения. Испытания Бернулли обычно трактуются как наблюдение случайной выборки $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ из двухточечного распределения Бернулли с параметром $p = P(X_k = 1)$. Поскольку в этой статистической модели существует достаточная статистика

$$T = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

то эта модель редуцируется к семейству биномиальных распределений $\mathrm{B}(n, p)$:

$$P(T = t) = \mathrm{C}_n^t \, p^t (1-p)^{n-t}, \quad t = 0, 1, \ldots, n.$$

Наша ближайшая цель – построить байесовскую оценку p при функции потерь

$$L(p, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } (1+\Delta)^{-1} \leqslant p/d \leqslant 1+\Delta, \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1}$$

и априорном бета-распределении с функцией плотности

$$g(p) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \, p^{a-1} (1-p)^{b-1}, \quad 0 < p < 1.$$

Выбор бета-распределения в качестве априорного определяется следующими причинами. Это распределение обладает исключительным разнообразием форм его функции плотности, так что с его помощью можно с практической точки зрения аппроксимировать любое унимодальное распределение на отрезке $[0, 1]$ (см. [2, гл. 2]). Оно является сопряженным к биномиальному распределению (см. [1, гл. 9]) и поэтому обладает привлекательными вычислительными свойствами с точки зрения явного вида апостериорного распределения и построения байесовской оценки. Наконец, поскольку мы интересуемся оценкой p при априорных сведениях об исключительной малости данного параметра, то не стоит пренебрегать советом корифея в области математической статистики Эмиля Лемана, который рекомендует в таком случае использовать бета-распределение с $b = 1$ при малом значении параметра a (см. [4, гл. 3, пример 2.7]). Естественно, случай $b < 1$ не представляет интереса для решения задачи оценки p при априорном значении его малости. Если a и b меньше единицы, то априорное распределение имеет U-образную функцию плотности, а это влечет достаточно большую априорную вероятность, что $p > 0$. Заметим также, что при увеличении b растет вероятность того, что p близко к нулю.

Как показано в [1, § 9.3] (формула (1)), апостериорное распределение параметра p в случае априорного бета-распределения является также бета-распределением с функцией плотности

$$g(p|T) = \frac{1}{\mathrm{B}(a+T, b+n-T)}\, p^{a+T-1}(1-p)^{b+n-T-1}.$$

Маргинальная (безусловная) функция плотности статистики T вычисляется по формуле

$$f_G(t) = \frac{C_n^t}{B(a,b)} \int\limits_0^1 p^{a+t-1}\,(1-p)^{b+n-t-1}\,dp = C_n^t\,\frac{B(a+t, b+n-t)}{B(a,b)},$$

это функция известного бета-биномиального распределения.

1.2. Апостериорная надежность параметра p и его байесовская оценка. Форма функции потерь (1) указывает на целесообразность вычисления не апостериорного риска (среднего значения функции потерь по апостериорному распределению p), а так называемой апостериорной надежности:

$$H(d\,|\,T) = E\{L(d\,|\,p)\,|\,T\} = P\left\{\frac{d}{1+\Delta} \leqslant p \leqslant d(1+\Delta)\,\middle|\, T\right\} = \\ = \frac{1}{B(a+T, b+n-T)} \int\limits_{d/(1+\Delta)}^{\min(d(1+\Delta),1)} p^{a+T-1}(1-p)^{b+n-T-1}\,dp. \quad (2)$$

Естественно, апостериорный риск равен $1 - H(d|T)$.

Байесовская оценка есть точка достижения минимума по d апостериорного риска или, что проще вычислить, точка максимума функции надежности.

Теорема 1. *Байесовская оценка параметра p равна*

$$\widehat{p}_n(T) = \min\left\{\frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2-\tau},\ \frac{1}{(1+\Delta)}\right\},$$

где

$$\tau = (1+\Delta)^{(-2(a+T))/(b+n-T-1)}. \quad (3)$$

Доказательство. Точку достижения максимума апостериорной надежности будем искать стандартными методами дифференциального исчисления.

Рассмотрим сначала случай, когда верхний предел интегрирования в интеграле (2) меньше единицы.

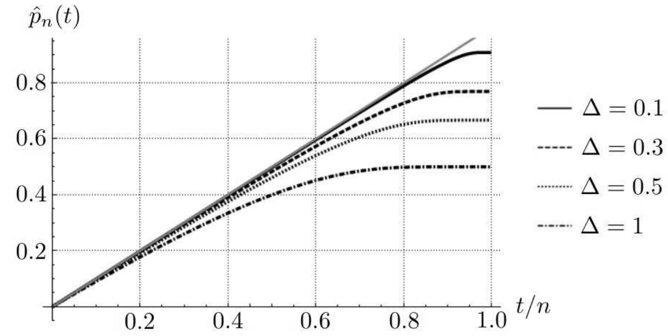

Рис. 1. График байесовской оценки $\widehat{p}_n(t)$ как функции от t/n при $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ и различных значениях параметра точности Δ. Серым цветом представлена классическая оценка t/n

Дифференцируя по d функцию

$$w(d) = \int\limits_{d(1+\Delta)^{-1}}^{d(1+\Delta)} p^{a+T-1}\,(1-p)^{b+n-T-1}\,dp$$

и приравнивая производную нулю, получаем уравнение для отыскания байесовской оценки

$$\left[\frac{1-d(1+\Delta)}{1-d(1+\Delta)^{-1}}\right]^{b+n-T-1} = (1+\Delta)^{-2(a+T)}.$$

Полагая

$$\tau = (1+\Delta)^{(-2(a+T))/(b+n-T-1)},$$

получаем линейное уравнение относительно d

$$1 - d\,(1+\Delta) = \tau\,(1 - d(1+\Delta)^{-1}).$$

При $d < (1+\Delta)^{-1}$ точка достижения максимума функции надежности (одна из компонентов байесовской оценки) равна

$$\widehat{p}_n(T) = \frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2 - \tau}.$$

В случае когда верхний предел интегрирования в (1) равен единице, требуется найти максимум по d функции:

$$v(d) = \int\limits_{d\,(1+\Delta)^{-1}}^{1} p^{a+T-1}\,(1-p)^{b+n-T-1}\,dp.$$

Очевидно, максимум достигается при наименьшем значении нижнего предела этого интеграла, то есть при $d^* = (1+\Delta)^{-1}$ (вторая компонента байесовской оценки). $\square$

График байесовской оценки $\widehat{p}_n(t)$ как функции от переменной t/n представлен на рис. 1. Заметим, что при $\Delta = 0.1$ байесовская оценка в области $t/n < 0.7$ практически совпадает с классической оценкой T/n вероятности успеха в испытаниях Бернулли.

Точностные свойства байесовской оценки в сравнении с классической оценкой T/n исследовались методом статистического моделирования при $p = 0.01$, $n = 100$, $a = 0.01$, $b = 1$ и $\Delta = 0.1$. Генерировалась тысяча значений статистики T и по полученным значениям вычислялись оценки смещений и стандартных отклонений $\widehat{p}_n(T)$ и T/n.

Были получены следующие результаты: $\mathbb{E}(\widehat{p}_n(T)) = 0.00979$, $\sigma(\widehat{p}_n(T)) = 0.00949$, $\mathbb{E}(T/n) = 0.00979$, $\sigma(T/n) = 0.09601$.

При столь большом числе испытаний ($n = 100$) обе оценки имеют одинаковые точностные свойства: совпадают средние значения и стандартные отклонения, вычисленные по моделированным данным.

Следует заметить, что аналогичные заключения справедливы и при меньших объемах выборки, например при $n = 50$. Этого следовало ожидать, поскольку при таких значениях n биномиальное распределение практически нормальное.

1.3. Свойства байесовской оценки. В отличие от классической оценки T/n, байесовская оценка имеет достаточно сложный вид – неясно даже ее наименьшее значение и поведение как функции от статистики T. Следующая теорема дает ответы на эти вопросы.

Теорема 2. *Байесовская оценка $\widehat{p}_n(t)$ обладает следующими свойствами:*
1^0. *$\widehat{p}_n(t)$ – неубывающая функция аргумента t;*
2^0. *Справедливо неравенство*

$$\frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2-\tau} \le \frac{1}{(1+\Delta)},$$

то есть байесовская оценка $\widehat{p}_n(t)$ определяется левой частью этого неравенства;
3^0. $\displaystyle\min_{0\le t\le n} \widehat{p}_n(t) = \frac{(1+\Delta)(1-(1+\Delta)^{-2a/(b+n-1)})}{(1+\Delta)^2-(1+\Delta)^{-2a/(b+n-1)}}$.

Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция*

$$\tau(t) = (1+\Delta)^{(-2(a+t))/(b+n-t-1)}, \quad t = 1,\dots,n,$$

имеет область значений $0 \le \tau(t) < 1$.

Доказательство. Очевидно, что $\tau(t) \ge 0$, а также $\tau(t) < 1$, поскольку $1 + \Delta > 1$ и степень этого двучлена отрицательна. □

Обратимся теперь к доказательству теоремы 2.

Доказательство. 1^0. Для доказательства того, что байесовская оценка $\widehat{p}_n(t)$ является неубывающей функцией от t, достаточно показать, что функция

$$\tau = \tau(t) = (1+\Delta)^{(-2(a+t))/(b+n-t-1)}$$

убывает по t. Но это очевидно, поскольку

$$\frac{-2(a+t)}{(b+n-t-1)}$$

монотонно возрастает по t.

Теперь утверждение теоремы 1^0 следует из представления оценки как функции от монотонно убывающей функции τ:

$$\widehat{p}_n(T) = \frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2-\tau} = (1+\Delta)\Big[1 - \frac{(1+\Delta)^2-1}{(1+\Delta)^2-\tau}\Big].$$

2^0. Требуется показать, что

$$0 < \frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2-\tau} < \frac{1}{1+\Delta}.$$

Левая часть этого неравенства очевидна, поскольку $\tau < 1$ (см. утверждение леммы 1). Для доказательства правой части неравенства запишем его в виде

$$(1+\Delta)^2(1-\tau) < (1+\Delta)^2 - \tau.$$

Но это неравенство, очевидно, эквивалентно $(1+\Delta)^2 > 1$.

3^0. Как было показано выше, $\widehat{p}_n(t)$ не убывает по t, когда $0 \le t \le n$. Следовательно, байесовская оценка достигает своего минимума при $T = 0$. Для вычисления этого минимума достаточно в формулу (3) для $\tau = \tau(T)$ подставить значение $T = 0$ и затем вставить $\tau(0)$ в формулу для байесовской оценки.

Имеем

$$\tau(0) = (1+\Delta)^{-2a/(b+n-1)}.$$

Подстановка $\tau(0)$ в формулу, определяющую байесовскую оценку как функцию от τ, дает нижнюю границу байесовской оценки

$$\widehat{p}_n(T) \ge \frac{(1+\Delta)(1-\tau(0))}{(1+\Delta)^2-\tau(0)} = \frac{(1+\Delta)(1-(1+\Delta)^{-2a/(b+n-1)})}{(1+\Delta)^2-(1+\Delta)^{-2a/(b+n-1)}}.$$

Теорема доказана □

Замечания:

1^0 *Наименьшее значение байесовской оценки* $\widehat{p}_n(0)$ *убывает с ростом объема выборки* n.

Действительно, легко видеть, что $\tau(0)$ растет с ростом n. С другой стороны, как было показано в теореме 2 п. 2^0, значение байесовской оценки убывает при увеличении τ.

2^0 *Апостериорный риск байесовской оценки* $R_n(\widehat{p}_n(t))$ *убывает с ростом числа* t *успехов в испытаниях Бернулли* (рис. 2).

Это фундаментальное свойство играет определяющую роль в построении последовательной процедуры оценки p (см., например, [8]). К сожалению, мы не обладаем математическим доказательством этого факта и оставляем эту проблему открытой.

2. Функция d-риска байесовской оценки

Утверждение 2^0 теоремы 2 позволяет вычислить d-риск байесовской оценки простой подстановкой в апостериорный риск $1-H(d\,|\,T)$ вместо T корня уравнения $\widehat{p}_n(T) = d$.

Теорема 3. *d-Риск байесовской оценки равен*

$$R_n(d) = 1 - \frac{1}{B(a+t, b+n-t)} \int\limits_{d/(1+\Delta)}^{\min(d(1+\Delta),1)} \theta^{a+t-1}\,(1-\theta)^{b+n-t-1}\,d\theta\,,$$

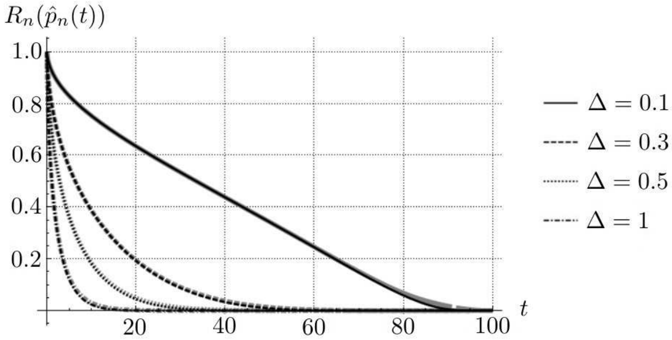

Рис. 2. Апостериорный риск байесовской оценки как функции от t при $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ и различных значениях параметра точности Δ. Черные линии изображают функции апостериорного риска байесовской оценки, серые линии – апостериорный риск классической частотной оценки T/n при соответствующих значениях Δ

где

$$t = \frac{2a\ln(1+\Delta) + (b+n-1)\ln\gamma}{\ln\gamma - 2\ln(1+\Delta)}, \qquad \gamma = \frac{(1+\Delta) - d\,(1+\Delta)^2}{1+\Delta-d}. \tag{4}$$

Доказательство. d-Риск оценки $\widehat{p}_n(t)$ равен условному математическому ожиданию апостериорного риска относительно σ-алгебры, порожденной статистикой $\widehat{p}_n(t)$. Поскольку $\widehat{p}_n(t)$ - монотонная функция t, так что существует единственное решение (2) уравнения $\widehat{p}_n(t) = d$, то в силу регулярности апостериорной (условной) вероятности $1-H(d\,|\,T)$ условное математическое ожидание от него вычисляется простой подстановкой вместо $T = t$, где t вычисляется по формуле (4).

Докажем, что (4) есть корень уравнения $\widehat{p}_n(t) = d$, то есть корень уравнения

$$\widehat{p}_n(t) = \frac{(1+\Delta)(1-\tau)}{(1+\Delta)^2 - \tau} = d, \tag{5}$$

где

$$\tau = (1+\Delta)^{-2(a+t)/(b+n-t-1)}.$$

Уравнение (5) есть линейное уравнение относительно τ как функции от d. Опуская тривиальные выкладки, получаем следующее соотношение:

$$\gamma = \tau(t(d)) = \frac{(1+\Delta) - d\,(1+\Delta)^2}{1+\Delta-d}.$$

Остается только решить уравнение

$$(1+\Delta)^{-2(a+t)/(b+n-t-1)} = \gamma.$$

Логарифмируя обе части этого уравнения, получаем линейное уравнение относительно t:

$$\frac{-2(a+t)}{b+n-t-1}\,\ln(1+\Delta) = \ln\gamma.$$

Его решение

$$t = \frac{2a\ln(1+\Delta) + (b+n-1)\ln\gamma}{\ln\gamma - 2\ln(1+\Delta)}.$$

Теорема доказана. □

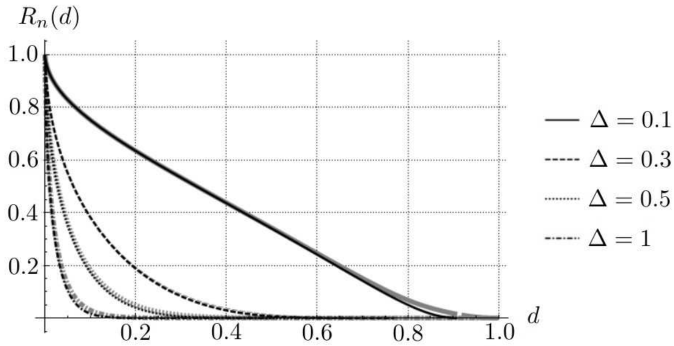

Рис. 3. d-Риск байесовской оценки как функции от d при $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ и различных значениях параметра точности Δ. Черные линии изображают функции d-риска байесовской оценки, серые линии – d-риск классической частотной оценки T/n при соответствующих значениях Δ

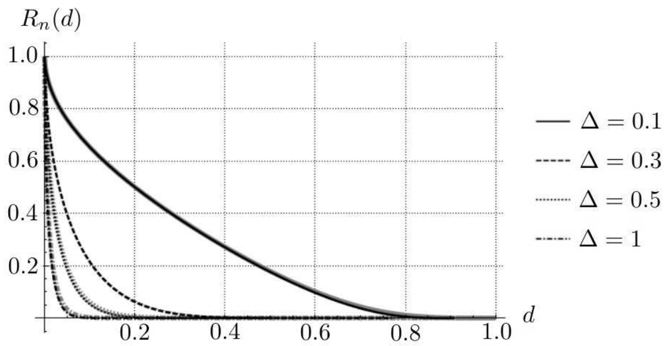

Рис. 4. d-Риск байесовской оценки как функции от d при $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 200$ и различных значениях параметра точности Δ. Черные линии изображают функции d-риска байесовской оценки, серые линии – d-риск классической частотной оценки T/n при соответствующих значениях Δ

Как видно из рис. 3, 4, функция d-риска монотонно убывает с ростом d и достигает наибольшего значения при $d = d_0$, соответствующего наименьшему значению байесовкой оценки $\widehat{p}_n(0)$ (см. теорема 2, п. 3^0). К сожалению, такого рода утверждение не удалось доказать математически. Мы не обладаем также доказательствами следующих свойств d-риска, которые можно заметить на графиках, формулируя свойства как некоторые гипотетические утверждения, требующие самостоятельных доказательств.

Так, при любых значениях Δ и n предельное значение d-риска практически не меняется, принимая большие, близкие к единице значения. С ростом n это наибольшее значение d-риска также растет (см. рис. 5, 6).

Поскольку наибольшее значение d-риска является определяющим фактором при планировании объема испытаний, который доставляет заданное ограничение на d-риск, то следует признать, что *планирование объема испытаний с ориентированием на наибольшее значение d-риска не представляется возможным* (рис. 5 и 6). Однако графики апостериорной надежности байесовской оценки показывают, что она возрастает при каждом значении n с увеличением статистики T. Это замечание позволяет надеяться на возможность построения d-гарантийной оценки вероятности p.

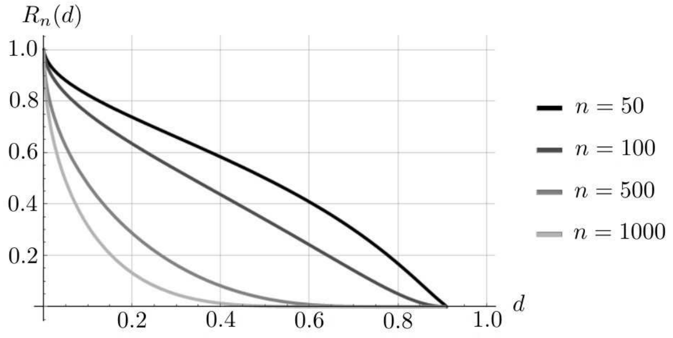

Рис. 5. d-Риск байесовской оценки как функции от d при $a = 0.0022$ $b = 1$, $\Delta = 0.3$ и различных значениях объема выборки n

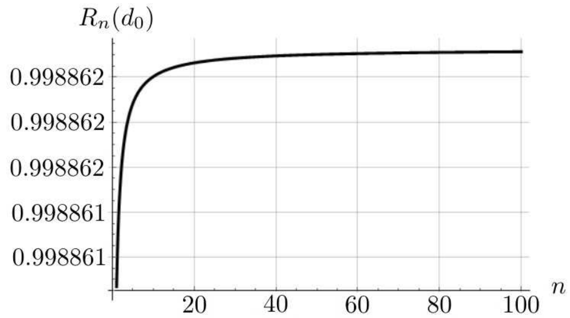

Рис. 6. График функции максимума d-риска байесовской оценки $R_n(\widehat{p}_n(0))$ как функции от n при $d = d_0 = \widehat{p}_n(0)$, $a = 0.0022$, $b = 1$, $\Delta = 0.3$

Следующая теорема представляет формулу для вычисления наибольшего значения d-риска – значения d-риска в точке $d = d_0$.

Теорема 4. *Значение $d = d_0$, соответствующее наименьшему значению байесовской оценки $\widehat{p}_n(0)$, вычисляется по формуле*

$$d_0 = \frac{(1+\Delta)(1-e^w)}{(1+\Delta)^2 - e^w},$$

где

$$w = \frac{-2a\ln(1+\Delta)}{(b+n-1)}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2, $\widehat{p}_n(t)$ принимает наименьшее значение при $t = 0$ и формула (4) определяет корень уравнения $\widehat{p}_n(t) = d$.

Следовательно, в силу монотонности байесовской оценки d-риск принимает наибольшее значение при $d = d_0$, которое находится из уравнения (4) при $t = 0$:

$$0 = \frac{2a\ln(1+\Delta) + (b+n-1)\ln\gamma}{\ln\gamma - 2\ln(1+\Delta)}.$$

Если решить это уравнение относительно $\ln\gamma$, то оно преобразуется в следующее уравнение относительно d:

$$\frac{(1+\Delta) - d\,(1+\Delta)^2}{1+\Delta-d} = \exp\left\{\frac{-2a\ln(1+\Delta)}{(b+n-1)}\right\}.$$

Это линейное уравнение относительно d, решая которое получаем утверждение теоремы относительно вида d_0 как функции от n и Δ при фиксированных значениях a и b. $\square$

3. Эмпирическое задание параметров априорного распределения

Вычисление байесовской оценки по результату t наблюдений достаточной статистики $T = \sum_{k=1}^{n} X_k$ возможно лишь при известных значениях параметров a и b. Мы предлагаем два способа оценки этих параметров (общий подход к построению эмпирических процедур статистического вывода в рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности статистического вывода см. в [9]).

Если статистик располагает архивом данных $t_1, \ldots, t_N$ предыдущих N наблюдений, то параметры a и b можно оценить по методу моментов или по методу максимального правдоподобия, используя маргинальное бета-биномиальное распределение статистики T (см. [2, гл. 9]).

В этом случае данные $t_1, \ldots, t_N$ представляют собой результат наблюдения случайной выборки $T^{(N)} = T_1, \ldots, T_N$ из бета-биномиального распределения с функцией плотности

$$f_G(t) = \ C_n^t \, \frac{B(a+t, b+n-t)}{B(a,b)}.$$

.

Первые два момента этого распределения имеют вид

$$\mu = n\frac{a}{a+b}, \quad \sigma^2 = n\frac{ab}{(a+b)^2}\frac{a+b+n}{(a+b+1)}.$$

Приравнивая μ выборочному среднему архива, а σ^2 выборочной дисперсии архива, получаем систему их двух уравнений

$$n\frac{a}{a+b} = \overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} T_k, \quad n\frac{ab}{(a+b)^2}\frac{a+b+n}{(a+b+1)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(T_k - \overline{T})^2,$$

решение которых доставляет эмпирические оценки $\widehat{a}_N$ и $\widehat{b}_N$ параметров априорного распределения.

Однако, как известно, оценки по методу моментов обладают большим смещением и большой дисперсией. Асимптотически эффективными являются оценки по методу максимального правдоподобия. Во втором случае оценка векторного параметра (a, b) есть точка достижения максимума функции логарифмического правдоподобия

$$\mathfrak{L}(a,\, b \,|\, T^{(N)}) = \sum_{1}^{N} \Big[\ln B(a+T_k, b+n-T_k) - \ln B(a,b) \Big].$$

Другой метод основан на использовании априорных знаний об уровне входного качества Q_{in} – вероятности того, что качество любой выпускаемой партии изделий удовлетворяет заданным ограничениям. Например, стандартное ограничение на долю кондиционных патронов в партии равно 0.01, то есть при отстреле патронов вероятность осечки должна быть не больше чем 0.01. Естественно, чтобы удовлетворить этому ограничению, входное качество Q_{in} должно быть не меньше чем 0.99. В таком случае параметры a и b априорного распределения должны

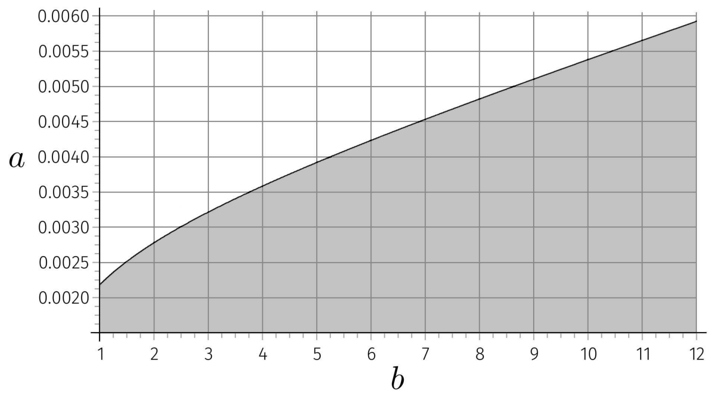

Рис. 7. Заштрихованная область соответствует значениям параметров a и b, удовлетворяющих неравенству (8)

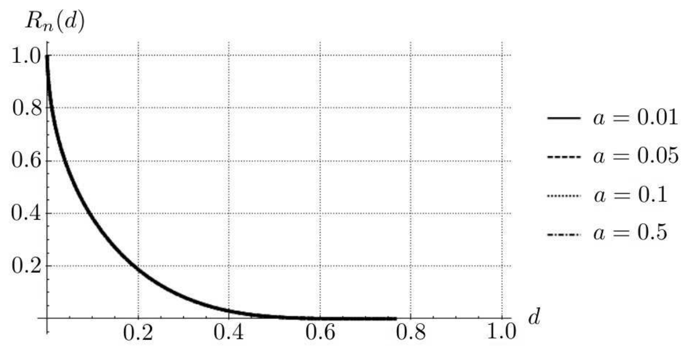

Рис. 8. d-Риск байесовской оценки при $b = 1$, $n = 100$, $\Delta = 0.3$ и различных значениях a

удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{1}{B(a,b)} \int\limits_{0}^{0.01} t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt \ \geq 0.99. \tag{6}$$

Область значений a и b представлена на рис. 7.

Согласно рекомендациям Э. Лемана (см. [4, пример 2.7, гл. 3]) о выборе значений параметров a и b при априорном сведении о чрезвычайной малости значений p выпускаемой партии изделий, следует выбирать $b = 1$, а a - по возможности самое малое. Графики d-риска при различных значениях a (рис. 8) показывают, что a практически не влияет на величину d-риска, в связи с чем, обращаясь к рис. 7, мы рекомендуем в этом примере выбирать при $b = 1$ значение $a = 0.0022$. Эти значения a и b использовали для построения всех графиков.

Заключение

Дано решение статистической проблемы оценки вероятности успеха p в испытаниях Бернулли в рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности статистического выбора. Основное внимание уделялось наличию априорных сведений об исключительно малых значениях вероятности p, в связи с чем была введена специальная функция потерь типа 1-0, учитывающая относительную ошибку принятого решения. В случае априорного бета-распределения построена байесовская оценка и изучены ее свойства, из которых особенно следует отметить то, что всегда она отлична от нуля. Найден d-риск байесовской оценки и определено его наибольшее значение. С помощью функции d-риска статистик всегда может вычислить d-риск полученного значения оценки. Графики d-риска показывают, что максимум d-риска растет с ростом объема наблюдений. Таким образом, при фиксированном объеме наблюдений невозможно построить d-гарантийную процедуру оценки, и поэтому следует обратиться к последовательным процедурам оценивания, как это делалось в аналогичных работах [5, 6, 8]. Предложены два эмпирических метода задания параметра априорного распределения.

Литература

1. *DeGroot M.H.* Optimal Statistical Decisions. – N. Y.: McGraw-Hill, 1970. – xvi, 489 p.

2. *Gupta A.K., Nadaraiah S.* Handbook of Beta Distribution and Its Applications. – N. Y.: Marcel Dekker, 2004. – viii, 571 p.

3. *Lehmann E.L.* Testing Statistical Hypotheses. – Berlin: Springer, 1997. – 625 p.

4. *Lehmann E.L., Casella G.* Theory of Point Estimation. – N. Y.; Berlin; Heidelberg: Springer, 1998. – 616 p.

5. *Salimov R.F., Turilova E.A., Volodin I.N.* Sequential procedures for assessing the percentage of harmful impurities with the given limitations on the accuracy and reliability of statistical inference // 16th Int. Multidiscip. Sci. GeoConf. SGEM 2016, SGEM Vienna GREEN Ext. Sci. Sess.: SGEM2016 Conf. Proc. – 2016. – Book 1, V. 4. – P. 175–180. – doi: 10.5593/SGEM2016/HB14/S01.023.

6. *Salimov R.F., Turilova E.A., Volodin I.N., Yang S.-F.* Estimation of the mean value for the normal distribution with constraints on d-risk // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No 3. – P. 377–387. – doi: 10.1134/S1995080218030174.

7. *Salimov R.F., Volodin I.N., Nasibullina N.F.* Sequential d-guaranteed estimate of the normal mean with bounded relative error // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2019. – Т. 161, кн. 1. – С. 145–151. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.145-151.

8. *Salimov R.F., Volodin A.I., Volodin I.N., Yang S.-F.* Estimation of mean value a normal distribution with constraints on the relative error and d-risk // J. Stat. Comput. Simul. – 2020. – V. 90, No 7 – P. 1286–1300. – doi: 10.1080/00949655.2020.1724292.

9. *Simushkin S.V.* The empirical d-posterior approach to the problem of guaranteedness of statistical inference // Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.). – 1983. – V. 27, No 11 – P. 47–67.

10. *Володин И.Н.* Гарантийные процедуры статистического вывода: определение объема выборки: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Казань, 1980. – 239 с.

11. *Володин И.Н.* Гарантийные процедуры статистического вывода (определение объема выборки) // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – Вып. 10. – С. 13–53.

12. *Володин И.Н., Симушкин С.В.* О d-апостериорном подходе к проблеме статистического вывода // 3-я Вильнюс. междунар. конф. по теории вероятностей и матем. статистике: Тез. докл. – Вильнюс, 1981. – Т. 1. – С. 100–101.

Поступила в редакцию
10.08.2022

Билалова Наль Фанилевна, студент кафедры математической статистики, лаборант кафедры математической статистики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *bnfnal@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 4, pp. 271–284

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.271-284

The d-Risk of Bayesian Estimation for the Probability of Success in Bernoulli Trials

N.F. Bilalova

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *bnfnal@gmail.com*

Received August 10, 2022

Abstract

This article considers the problem of estimating the probability p of success in Bernoulli trials when it is a priori the smallest. Using the d-posterior approach to the problem of guaranteed statistical inference, a Bayesian estimation of p was performed for a special loss function of type 1-0 with the relative error restriction and the beta prior distribution of the estimated parameter. The d-risk of the Bayesian estimation was calculated, and the impossibility to design a d-guaranteed estimation procedure for a fixed amount of tests was revealed.

Keywords: Bernoulli trials, Bayesian probability estimation, beta prior distribution, d-risk estimation

Figure Captions

Fig. 1. Graph for Bayesian estimation $\widehat{p}_n(t)$ as a function of t/n at $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ and different values of the accuracy parameter Δ. Classical estimation t/n is indicated by gray color.

Fig. 2. Posterior risk of Bayesian estimation as a function of t at $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ and different values of the accuracy parameter Δ. Black lines – the posterior risk functions of Bayesian estimation, gray lines – the posterior risk of the classical frequency estimation T/n at the corresponding values of Δ.

Fig. 3. d-Risk of Bayesian estimation as a function of d at $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ and different values of the accuracy parameter Δ. Black lines – the d-risk of Bayesian estimation, gray lines – the d-risk of the classical frequency estimation T/n at the corresponding values of Δ.

Fig. 4. d-Risk of Bayesian estimation as a function of d at $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 200$ and different values of the accuracy parameter Δ. Black lines – the d-risk of Bayesian estimation, gray lines – the d-risk of the classical frequency estimation T/n at the corresponding values of Δ.

Fig. 5. d-Risk of Bayesian estimation as a function of d at $a = 0.0022$ $b = 1$, $\Delta = 0.3$ and different values of the sampling size n.

Fig. 6. Graph of the maximum d-risk of Bayesian estimation $R_n(\widehat{p}_n(0))$ as a function of n at $d = d_0 = \widehat{p}_n(0)$, $a = 0.0022$, $b = 1$, $\Delta = 0.3$.

Fig. 7. The shaded area shows the values of the parameters a and b satisfying the inequality (8).

Fig. 8. d-Risk of Bayesian estimation at $b = 1$, $n = 100$, $\Delta = 0.3$ and different values of a.

References

1. DeGroot M.H. *Optimal Statistical Decisions.* New York, McGraw-Hill, 1970. xvi, 489 p.
2. Gupta A.K., Nadaraiah S. *Handbook of Beta Distribution and Its Applications.* New York, Marcel Dekker, 2004. viii, 571 p.
3. Lehmann E.L. *Testing Statistical Hypotheses.* Berlin, Springer, 1997. 625 p.
4. Lehmann E.L., Casella G. *Theory of Point Estimation.* New York, Berlin, Hidelberg, Springer, 1998. 616 p.
5. Salimov R.F., Turilova E.A., Volodin I.N. Sequential procedures for assessing the percentage of harmful impurities with the given limitations on the accuracy and reliability of statistical inference. *16th Int. Multidiscip. Sci. GeoConf. SGEM 2016, SGEM Vienna GREEN Ext. Sci. Sess.: SGEM2016 Conf. Proc.*, 2016, book 1, vol. 4, pp. 175–180. doi: 10.5593/SGEM2016/HB14/S01.023.
6. Salimov R.F., Turilova E.A., Volodin I.N., Yang S.-F. Estimation of the mean value for the normal distribution with constraints on d-risk. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 3, pp. 377–387. doi: 10.1134/S1995080218030174.
7. Salimov R.F., Volodin I.N. Nasibullina N.F. Sequential d-guaranteed estimate of the normal mean with bounded relative error. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 1, pp. 145–151. doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.145-151.
8. Salimov R.F., Volodin A.I., Volodin I.N., Yang S.-F. Estimation of mean value a normal distribution with constraints on the relative error and d-risk. *J. Stat. Comput. Simul.*, 2020, vol. 90, no. 7, pp. 1286–1300. doi: 10.1080/00949655.2020.1724292.
9. Simushkin S.V. The empirical d-posterior approach to the problem of guaranteedness of statistical inference. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1983, vol. 27, no. 11, pp. 47–67.
10. Volodin I.N. Guaranteed procedures of statistical inference: Choosing the optimal sample size. *Doct. Phys.-Math. Sci. Diss.* Kazan, 1980. 239 p. (In Russian)
11. Volodin I.N. Guaranteed statistical inference procedures (determination of the optimal sample size). *J. Sov. Math.*, 1989, vol. 44, no. 5, pp. 568–600. doi: 10.1007/Bf01095166.
12. Volodin I.N., Simushkin S.V. On the d-posterior approach to the problem of statistical inference. *3-ya Vil'nyusskaya mezhdunar. konf. po teorii veroyatnostei i matem. statistike: Tez. dokl.* [Proc. 3rd Vilnius Int. Conf. on the Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Vilnius, 1981, pp. 100–101. (In Russian)

Для цитирования: *Билалова Н.Ф.* d-Риск байесовской оценки для вероятности успеха в испытаниях Бернулли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 271–284. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.271-284.

For citation: Bilalova N.F. The d-risk of Bayesian estimation for the probability of success in Bernoulli trials. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 271–284. doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.271-284. (In Russian)