Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 34–39 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0081*

И.Н. МАЛИЕВ, М.А. ПЛИЕВ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ КОЛЬЦЕВЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ $C^\star$-АЛГЕБР

Аннотация. Устанавливается, что кольцевой гомоморфизм, действующий из локальной $\sigma{-}C^\star$-алгебры в локальную $C^\star$-алгебру, является непрерывным отображением.

Ключевые слова: локальные $C^\star$-алгебры, гомоморфизмы, положительные операторы.

УДК: 517.98 : 519.46

Abstract. We show that a ring homomorphism from a local $\sigma{-}C^\star$-algebra to a local $C^\star$-algebra is a continuous mapping.

Keywords: local $C^\star$-algebras, homomorphisms, positive operators.

Введение

В настоящее время теория операторных алгебр является высокоразвитой областью математики, лежащей на стыке алгебры и функционального анализа. К наиболее изученному классу таких алгебр следует отнести введенные И.М. Гельфандом и М.А. Наймарком $C^\star$-алгебры. Вместе с тем во второй половине прошлого столетия в ряде работ была исследована структура более общих инволютивных топологических алгебр, где топология задавалась семейством полунорм, удовлетворяющих $C^\star$-аксиомам [1]–[4]. В настоящее время структурная теория таких алгебр и модулей над ними интенсивно развивается, что нашло отражение в монографической литературе [5]–[7] и статьях [8]–[16]. Данная статья продолжает этот круг исследований. Нами устанавливается, что любой кольцевой $\star$-гомоморфизм, действующий из локальной $\sigma{-}C^\star$-алгебры в локальную $C^\star$-алгебру, является непрерывным отображением.

1. Предварительные сведения

Все необходимые сведения о $C^\star$-алгебрах и более общих топологических алгебрах с инволюцией можно найти в [17], [5], [7]. Теория матричных операторных алгебр изложена в [18]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

1.1. Алгебра с инволюцией A называется инволютивной LMC-*алгеброй*, если A — локально выпуклое топологическое векторное пространство, где топология задается семейством полунорм $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяющих следующим условиям:
1) $P_\lambda(xy) \le P_\lambda(x)P_\lambda(y)$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in \Lambda$,
2) $P_\lambda(x) = P_\lambda(x^\star)$ для любых $x \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

Поступила 28.04.2010

Инволютивная LMC-алгебра называется локальной $C^\star$*-алгеброй*, если она полна и справедливо равенство

3) $P_\lambda(xx^\star) = P_\lambda(x)^2$ для любых $x \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

Полунормы, обладающие указанными свойствами, называются $C^\star$*-полунормами*. Если в локальной $C^\star$-алгебре существует единица, то алгебра называется *унитальной*. Пусть A — локальная $C^\star$-алгебра. Если семейство $C^\star$-полунорм в A счетно, то A называется *локальной* $\sigma - C^\star$*-алгеброй*.

1.2. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Каждая $C^\star$-алгебра является локальной $C^\star$-алгеброй.

Пример 2. Каждая замкнутая $\star$-подалгебра локальной $C^\star$-алгебры также является локальной $C^\star$-алгеброй.

Пример 3. Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство ([19], с. 96), и пусть $C(Q)$ — алгебра непрерывных комплекснозначных функций, заданных на Q. Для каждого компактного множества $K \subset Q$ введем полунорму

$$p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|; \quad f \in C(Q).$$

Тогда p_K будет $C^\star$-полунормой и топологическая алгебра $C(Q)$ с топологией, заданной семейством полунорм p_K, является локальной $C^\star$-алгеброй.

Пример 4. Пусть Δ — направленное вверх множество индексов, $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ — семейство гильбертовых пространств таких, что $H_\lambda \subset H_\mu$ при $\lambda \le \mu$ и

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda = \langle\cdot,\cdot\rangle_\mu|_{H_\lambda}, \quad \lambda \le \mu,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ — скалярное произведение в пространстве H_λ, $\lambda \in \Delta$. Локально выпуклое пространство

$$H := \bigcup_\lambda H_\lambda$$

с топологией индуктивного предела называется *локальным гильбертовым пространством*. Обозначим через $L(H)$ пространство линейных операторов $T : H \to H$ таких, что

$$T = \lim_{\to} T_\lambda, \quad T_\lambda \in B(H_\lambda),$$

где $B(H_\lambda)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H_λ, и $(T_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ — семейство операторов $T_\lambda \in B(H_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Delta$. Тогда $L(H)$ будет алгеброй и, кроме того, с каждым семейством $(T_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ можно связать семейство $(T_\lambda)^\star_{\lambda\in\Delta}$, где $T_\lambda^\star \in B(H_\lambda)$. Тогда отображение

$$\star : L(H) \to L(H); \quad T \mapsto T^\star = \lim_{\to} T_\lambda^\star$$

будет инволюцией, заданной на $L(H)$. Если $\|\cdot\|_\lambda$ — операторная норма, заданная на $B(H_\lambda)$, то функция

$$p_\lambda(T) := \|T_\lambda\|_\lambda, \quad T \in L(H),$$

будет $C^\star$-полунормой на $L(H)$ для каждого $\lambda \in \Delta$ и $L(H)$ — локальная $C^\star$-алгебра относительно семейства полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$.

Пусть A — локальная $C^\star$-алгебра с заданным семейством полунорм $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Пусть

$$I_\lambda := \{x \in A : P_\lambda(x) = 0\}.$$

Фактор-пространство A/I_λ будет также инволютивной алгеброй. Для произвольного элемента $x \in A$ через $\widetilde{x}_\lambda$ обозначим его образ в фактор-пространстве A/I_λ.

Пусть A и B — локальные $C^\star$-алгебры. Отображение $\varphi : A \to B$ называется *$\star$-гомоморфизмом* алгебр A и B, если для любых $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют место формулы

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{1}$$

$$\varphi(\lambda y) = \lambda\varphi(y), \tag{2}$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{3}$$

$$\varphi(x^\star) = \varphi(x)^\star. \tag{4}$$

Отображение $\varphi : A \to B$, для которого справедливы формулы (1), (3) и (4), называется *кольцевым $\star$-гомоморфизмом* алгебр A и B. Отметим, что в общем случае кольцевой гомоморфизм не является однородным [9].

Напомним, что для $C^\star$-алгебры A элемент $x \in A$ называется *положительным*, если $x = x^\star$ и $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(x)$ — спектр элемента x. Если x представлен линейным ограниченным оператором T в гильбертовом пространстве H, то x положителен тогда и только тогда, когда $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ для любых векторов $\xi \in H$.

Для локальной $C^\star$-алгебры A рассмотрим подалгебру

$$A_b := \{x \in A : \sup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(x) < \infty\}.$$

Подалгебра A_b называется *ограниченной частью* алгебры A. Известно ([5], теорема 10.23), что A_b — $C^\star$-алгебра относительно нормы $\|x\| := \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(x)$ и является плотной подалгеброй алгебры A. Если A — унитальная локальная $C^\star$-алгебра, $x \in A$, e — единица в A, $t > 0$, то элемент $x(e + tx^\star x)^{-1} \in A_b$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ справедлива оценка ([5], лемма 10.22)

$$P_\lambda(x(e + tx^\star x)^{-1})^2 \leq \frac{1}{4t}.$$

2. О непрерывности кольцевого гомоморфизма

В этом разделе установим, что кольцевой $\star$-гомоморфизм, действующий из локальной $\sigma{-}C^\star$-алгебры в $C^\star$-алгебру, будет непрерывным отображением. В работе [20] аналогичный результат получен для $C^\star$-алгебр. Схема доказательства, использованная в [20], может быть применена и в более общей ситуации.

2.1. Для дальнейшего потребуется одно вспомогательное утверждение, которое хорошо известно специалистам. В целях полноты изложения приведем его доказательство.

Лемма 1. *Пусть A — унитальная локальная $C^\star$-алгебра относительно семейства полунорм $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ фактор-алгебра A/I_λ будет $C^\star$-алгеброй относительно нормы $\|x + I_\lambda\| := P_\lambda(x)$.*

Доказательство. Ясно, что A/I_λ — нормированная алгебра с инволюцией. Требуется установить полноту. Возьмем A_b — ограниченную часть алгебры A и рассмотрим идеал

$$J_\lambda := A_b \cap I_\lambda = \{x \in A_b :\, P_\lambda(x) = 0\}.$$

Тогда J_λ — замкнутый самосопряженный идеал в A_b и фактор-алгебра A_b/J_λ будет $C^\star$-алгеброй. Обозначим $C^\star$-норму в A_b/J_λ через $\|\cdot\|^b_\lambda$. Тогда отображение

$$\xi : A_b/J_\lambda \to \mathbb{R}_+ : x + J_\lambda \mapsto P_\lambda(x)$$

также будет $C^\star$-нормой на A_b/J_λ и ввиду единственности $C^\star$-нормы $\xi(x) = \|x\|^b_\lambda$. Введем теперь отображение

$$\psi : A_b/J_\lambda \to A/I_\lambda : x + J_\lambda \mapsto x + I_\lambda.$$

Ясно, что ψ будет $\star$-изометрией. Покажем, что ψ — сюръекция. Используя непрерывность фактор-отображения $\pi_\lambda : A \to A/I_\lambda$, можем написать

$$\widetilde{x}_\lambda = \pi_\lambda(x) = \pi_\lambda(\lim_{t\to 0}(x(e+tx^\star x)^{-1})) = \lim_{t\to 0}\pi_\lambda(x(e+tx^\star x)^{-1}) =$$
$$= \lim_{t\to 0}(x(e+tx^\star x)^{-1} + I_\lambda) = \lim_{t\to 0}\psi(x(e+tx^\star x)^{-1} + J_\lambda),\ t>0.$$

Отсюда получаем, что образ $\psi(A_b/J_\lambda)$ плотен в A/I_λ. В силу полноты A_b/J_λ получаем, что ψ — биективная изометрия и, таким образом, A/I_λ —$C^\star$-алгебра. □

2.2. Важным техническим утверждением является

Лемма 2. *Пусть A — унитальная локальная $C^\star$-алгебра, x — произвольный элемент A и r — положительное действительное число. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) $P_{\lambda_0}(x) \le r$ *для некоторого* $\lambda_0 \in \Lambda$,
2) *для* $\lambda_0 \in \Lambda$ *матрица* $\begin{pmatrix} r1_A & \widetilde{x}_{\lambda_0} \\ \widetilde{x^\star}_{\lambda_0} & r1_A \end{pmatrix}$ *будет положительным элементом в* $M_2(A_{\lambda_0})$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\pi_{\lambda_0} : A_{\lambda_0} \to B(H_{\lambda_0})$ — представление $C^\star$-алгебры A_{λ_0} в гильбертовом пространстве H_{λ_0}, и пусть $T_{\lambda_0} := \pi_{\lambda_0}(x) = \widetilde{x}_{\lambda_0}$. Тогда $\|T_{\lambda_0}\| \le r$ и для любых векторов $\xi, \psi \in H_{\lambda_0}$ имеем

$$\left\langle \begin{pmatrix} r1_A & T_{\lambda_0} \\ T^\star_{\lambda_0} & r1_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle = r\langle\xi,\xi\rangle + \langle T_{\lambda_0}\psi,\xi\rangle + \langle T^\star_{\lambda_0}\xi,\psi\rangle + r\langle\psi,\psi\rangle \ge$$
$$\ge r\|\xi\|^2 - 2\|T_{\lambda_0}\|\,\|\xi\|\,\|\psi\| + r\|\psi\|^2 \ge 0.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть для индекса λ_0 справедливо неравенство $\|T_{\lambda_0}\| > r$. Тогда в гильбертовом пространстве H_{λ_0} найдутся такие единичные векторы ξ и ψ, что имеют место $\langle T_{\lambda_0}\xi,\psi\rangle < -r$ и $\langle T^\star_{\lambda_0}\xi,\psi\rangle < -r$. Отсюда получаем

$$r\langle\xi,\xi\rangle + \langle T_\lambda\psi,\xi\rangle + \langle T^\star_\lambda\xi,\psi\rangle + r\langle\psi,\psi\rangle < 0.$$ □

2.3. В следующей лемме будет установлена $\mathbb{Q}$-линейность кольцевого $\star$-гомоморфизма.

Лемма 3. *Пусть A и B — унитальные локальные $C^\star$-алгебры и φ — кольцевой $\star$-гомоморфизм алгебр A и B. Тогда $\varphi(rx) = r\varphi(x)$ для любых $r \in \mathbb{Q}$ и $x \in A$.*

Доказательство. Равенство $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ справедливо для любых $x \in A$ и $k \in \mathbb{Z}$ в силу аддитивности φ. Кроме того, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, когда элемент x обратим. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ элемент $k1_A$ обратим и его обратным является $\frac{1}{k}1_A$. Тогда можем написать

$$\varphi\left(\frac{1}{k}1_A\right) = \varphi((k1_A)^{-1}) = (\varphi(k1_A))^{-1} = (k1_B)^{-1} = \left(\frac{1}{k}1_B\right) = \frac{1}{k}\varphi(1_B).$$

Таким образом, для любых $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{k}{l}$ и $x \in A$ справедливы равенства

$$\varphi(rx) = \varphi\left(\frac{k}{l}x\right) = k\varphi\left(\frac{1}{l}x\right) = \frac{k}{l}\varphi(x) = r\varphi(x).$$ □

2.4. Теперь можем доказать основной результат.

Теорема. *Пусть A — унитальная локальная σ–$C^\star$-алгебра, B — унитальная локальная $C^\star$-алгебра, $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейства $C^\star$-полунорм, задающих топологию на A и B, φ — кольцевой $\star$-гомоморфизм алгебр A и B. Тогда φ — непрерывное отображение.*

Доказательство. Учитывая $\mathbb{Q}$-однородность отображения φ, достаточно проверить непрерывность в нуле. Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ — сходящаяся к нулю сеть элементов алгебры A. Покажем, что $(\varphi(x_\alpha))_{\alpha\in\Delta}$ также сходится к нулю. Предположим, что найдутся такие индекс $\lambda_0 \in \Lambda$ и рациональное число $r > 0$, что существует счетное множество индексов $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \subset \Delta$, для которых $P_{\lambda_0}(\varphi(x_{\alpha_k})) > r$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Возьмем теперь произвольный номер $n_0 \in \mathbb{N}$, фактор-алгебру $A_{n_0} := A/J_{n_0}$ и рассмотрим $\pi_{n_0} : A \to A_{n_0}$ — $\star$-гомоморфизм локальных $C^\star$-алгебр. Тогда согласно теореме 5.2 из [4] отображение π_{n_0} будет непрерывным. Кроме того, определен кольцевой $\star$-гомоморфизм $C^\star$-алгебр A_{n_0} и B_{λ_0}, для которого сохраним то же обозначение φ. Отметим, что отображение $\varphi_1 : M_2(A_{n_0}) \to M_2(B_{\lambda_0})$, где

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix},$$

будет кольцевым $\star$-гомоморфизмом $C^\star$-алгебр $M_2(A_{n_0})$ и $M_2(B_{\lambda_0})$. В силу непрерывности оператора π_{n_0} найдется такой номер $\alpha' \in \Lambda$, что для всех $\alpha \geq \alpha'$ справедливо неравенство $\|x_\alpha\| < r$. Тогда для каждого x_α справедливо $\left(\begin{smallmatrix} r1_A & x_\alpha \\ x_\alpha^\star & r1_A \end{smallmatrix}\right) \geq 0$ и $\left(\begin{smallmatrix} r1_A & x_\alpha \\ x_\alpha^\star & r1_A \end{smallmatrix}\right) = L_\alpha^\star L_\alpha$ для некоторого $L_\alpha \in M_2(A)$. Значит, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r1_A & x_\alpha \\ x_\alpha^\star & r1_A \end{smallmatrix}\right) = \varphi(L_\alpha^\star L_\alpha) = \varphi(L_\alpha^\star)\varphi(L_\alpha) \geq 0$. Таким образом, получаем

$$\varphi\begin{pmatrix} r1_A & x_\alpha \\ x_\alpha^\star & r1_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(r1_A) & \varphi(x_\alpha) \\ \varphi(x_\alpha^\star) & \varphi(r1_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\varphi(1_A) & \varphi(x_\alpha) \\ \varphi(x_\alpha^\star) & r\varphi(1_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r1_B & \varphi(x_\alpha) \\ \varphi(x_\alpha^\star) & r1_B \end{pmatrix},$$

т. е. $\left(\begin{smallmatrix} r1_B & \varphi(x_\alpha) \\ \varphi(x_\alpha^\star) & r1_B \end{smallmatrix}\right) \geq 0$ в $C^\star$-алгебре B_{λ_0}. Поэтому из леммы 2 получаем $P_{\lambda_0}(\varphi(x_{\alpha_k})) \leq r$. Пришли к противоречию. □

Следствие. Пусть A и B такие же, как в теореме, и φ — кольцевой $\star$-гомоморфизм из A в B. Тогда $\varphi(rx) = r\varphi(x)$ для любых $x \in A$ и $r \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $x \in A$ и $r \in \mathbb{R}$. Выберем последовательность рациональных чисел $(p_n)_{n=1}^\infty$, сходящуюся к r. Тогда можем написать

$$\varphi(rx) = \varphi(\lim_{n\to\infty} p_n x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n x) = \lim_{n\to\infty} p_n \varphi(x) = r\varphi(x). \qquad \square$$

Литература

[1] Apostol C. *$b^\star$-algebras and their representation*, J. London Math. Soc. Ser. 2 **3**, 30–38 (1971).

[2] Fragoulopoulou M. *An introduction to the representation theory of topological $\star$-algebras*, Schriftenr. Math. Inst. Univ. Münster, Ser. 2 **48**, 1–81 (1988).

[3] Inoue A. *Locally $C^\star$-algebras*, Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. Ser. A. **25**, 197–235 (1971).

[4] Phillips C.N. *Inverse limits of $C^\star$-algebras*, J. Oper. Theory **19** (1), 159–195 (1988).

[5] Fragoulopoulou M. *Topological algebras with involution* (Amsterdam, Elsevier, 2005).

[6] Joita M. *Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras* (Univ. Bucharest Press, 2006).

[7] Mallios A. *Topological algebras. Selected topics*, North-Holland Math. Studies, 124. Notas de Matemática, 109 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986).

[8] Khosravi A., Asgari M.S. *Frames and basis in Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras*, Int. J. Pure Appl. Math. **14** (2), 171–190 (2004).

[9] Joita M. *Strict completely positive maps between locally $C^\star$-algebras and representations of Hilbert modules*, J. London Math. Soc. Ser. 2 **66** (2), 421–432 (2002).

[10] Joita M. *Crossed products of locally $C^\star$-algebras*, Rocky Mountain J. Math. **37** (5), 1623–1644 (2007).

[11] Joita M. *Morita eqivalence for locally $C^\star$-algebras*, Bull. London Math. Soc. **36** (6), 802–810 (2004).

[12] Joita M. *Tenzor products of Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras*, Chechoslovak Math. J. **54** (3), 727–737 (2004).

[13] Joita M. *On tensor products of completely positive linear maps between pro-$C^\star$-algebras*, Positivity **13** (2), 307–319 (2009).

[14] Joita M. *On frames in Hilbert modules over pro-$C^\star$-algebras*, Topology Appl. **156** (1), 83–92 (2008).
[15] Joita M. *Frames of multipliers in tenzor product of Hilbert modules over pro-$C^\star$-algebras*, J. Math. Anal. Appl. **367** (2), 522–534 (2010).
[16] Sharipov F., Zhuraev Yu.I. *Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras*, Preprint, arXiv:math/0011053v3.
[17] Мерфи Д. *$C^\star$-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).
[18] Paulsen V. *Completely bounded maps and operator algebras* (Cambridge Univ. Press, 2002).
[19] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1976).
[20] Tomforde M. *Continuity of ring $\star$-homomorphisms between $C^\star$-algebras*, Preprint, arXiv:0810.0422v4.

И.Н. Малиев

доцент, кафедра теоретической и математической физики,
Северо-Осетинский государственный университет,
ул. Ватутина, д. 46, г. Владикавказ, 362025,

e-mail: malieff@inbox.ru

М.А. Плиев

старший научный сотрудник, Южный математический институт РАН,
ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027,

e-mail: plimarat@yandex.ru

I.N. Maliev

Associate Professor, North Osetian State University,
Vatutin str. 46, Vladikavkaz, 362025 Russia,

e-mail: malieff@inbox.ru

M.A. Pliev

Senior Reseacher, Southern Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Markus str. 22, Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: plimarat@yandex.ru