Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 14–22 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0079*

М.С. ЕРЯШКИН

ИНВАРИАНТЫ ДЕЙСТВИЯ ПОЛУПРОСТОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ХОПФА НА АЛГЕБРАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация. В этой работе обобщаются некоторые классические результаты теории инвариантов конечных групп на случай действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа H на алгебре A специального вида, которая гомоморфно отображается на коммутативную область целостности, и ядро этого отображения не содержит ненулевых H-устойчивых идеалов. Доказана конечная порожденность алгебры A как модуля над подалгеброй инвариантов, и конечная порожденность подалгебры инвариантов как $\mathbf{k}$-алгебры. Для неполупростой алгебры Хопфа построен контрпример к конечной порожденности.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, кольцо инвариантов.

УДК: 512.667

Abstract. In this paper we extend classical results of the invariant theory of finite groups to the action of a finite-dimensional semisimple Hopf algebra H on a special algebra A, which is homomorphically mapped onto a commutative integral domain, and the kernel of this map contains no nonzero H-stable ideal. We prove that the algebra A is finitely generated as a module over a subalgebra of invariants, and the latter is finitely generated as a $\mathbf{k}$-algebra. We give a counterexample for the finite generation of a non-semisimple Hopf algebra.

Keywords: Hopf algebras, invariant rings.

1. Введение

В данной работе обобщаются некоторые классические результаты теории инвариантов конечных групп на случай действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебре специального вида, гомоморфно отображающейся на коммутативную область целостности.

Все рассматриваемые алгебры, коалгебры и алгебры Хопфа определены над полем $\mathbf{k}$. Алгебры предполагаются ассоциативными с единицей, коалгебры — коассоциативными с коединицей. Через $\Delta : C \to C \otimes C$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ — коединицу коалгебры C. Далее всюду H — алгебра Хопфа и A — ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра. Все необходимые факты, касающиеся алгебр Хопфа, можно найти в [1]. Все тензорные произведения, если не оговорено противное, берутся над $\mathbf{k}$, а Hom — это $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}$.

Поступила 20.05.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-01-00431, и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (гос. контракт П267).

Определение 1.1. Алгебра H действует на A, если A наделена структурой левого H-модуля и для любых $h \in H$, $a, b \in A$

$$h \cdot (ab) = \sum_h (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b), \quad h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A.$$

Алгебра A с заданным действием H называется *H-модульной алгеброй.*

Определение 1.2. Алгебра H кодействует на A, если A наделена структурой правого H-комодуля и $\rho : A \to A \otimes H$ является гомоморфизмом алгебр.

В этом случае также говорят, что A является *H-комодульной алгеброй.*

Если H конечномерна, то H^* является алгеброй Хопфа, и любой левый H-модуль U можно считать правым H^*-комодулем с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(H \otimes U, U) \cong \mathrm{Hom}(U, U \otimes H^*)$. Также любая H-модульная алгебра превращается в H^*-комодульную относительно структурного отображения

$$\rho : A \to A \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}(H, A),$$
$$\rho(a)(h) = h \cdot a, \quad h \in H, \quad a \in A.$$

Поэтому все утверждения, сформулированные для H-модульной алгебры (H-комодульной алгебры), остаются верными и для H-комодульной алгебры (H-модульной алгебры).

Определение 1.3. Коалгебра C называется кополупростой, если для любого C-комодуля V и подкомодуля $U \subseteq V$ существует подкомодуль $W \subseteq V$ такой, что $V = U \oplus W$.

Определение 1.4. Элемент $a \in A$ называется инвариантом, если $h \cdot a = \varepsilon(h) a$ для всех $h \in H$ в случае H-модульной алгебры, $\rho(a) = a \otimes 1$ в случае H-комодульной алгебры.

Непосредственная проверка показывает, что множество инвариантов A^H является подалгеброй в A.

Понятие действия алгебры Хопфа обобщает действия групп автоморфизмами и действия алгебр Ли дифференцированиями на ассоциативной алгебре ([1], раздел 7.0).

Как обобщение классического результата в случае действия конечной группы на коммутативной алгебре в [2] поставлен вопрос о том, будет ли коммутативная H-модульная A целым расширением подалгебры инвариантов A^H ([2], с. 45, 4.2.6). Положительный ответ на данный вопрос был получен в следующих случаях: $\mathrm{char}\, \mathbf{k} = p > 0$ или A не содержит ненулевых нильпотентных идеалов, устойчивых относительно действия H ([3], предложение 2.7); или H — точечная и A — аффинная целостная алгебры ([4], теорема 4). В общем случае в [5], [6] были построены контрпримеры.

Аналогичный вопрос о том, будет ли A конечно порожденным модулем над A^H, и A^H — конечно порожденной $\mathbf{k}$-алгеброй, представляет интерес и для некоммутативной H-модульной алгебры ([2], с. 45–48, 4.3). В работе этот вопрос рассматривается в случае кодействия кополупростой алгебры Хопфа на специальном классе алгебр.

Определение 1.5. H-комодульная алгебра A принадлежит классу $\mathcal{A}$, если A есть конечно порожденная $\mathbf{k}$-алгебра с идеалом $I_A \subset A$ таким, что A/I_A — коммутативная область целостности, причем I_A не содержит ненулевых устойчивых относительно кодействия H идеалов алгебры A.

В разделе 2 изучены первоначальные свойства H-комодульных алгебр из класса $\mathcal{A}$. Также для любого конечномерного H-комодуля V построена H-комодульная алгебра $S_H(V)$ из класса $\mathcal{A}$. В случае, когда H коммутативна, $S_H(V)$ совпадает с симметрической алгеброй $S(V)$.

В разделе 3 доказано, что A будет конечно порожденным модулем над A^H, и A^H — конечно порожденной $\mathbf{k}$-алгеброй в случае кодействия кополупростой алгебры Хопфа на алгебре A из класса $\mathcal{A}$. Данное утверждение допускает переформулировку на действия полупростой алгебры Хопфа. Если известно, что A нетерова, то этот результат немедленно следует из ([2], с. 47–49, 4.3.7 и 4.4.2), однако нетеровость алгебр из класса $\mathcal{A}$ удается вывести только из теоремы 3.1.

В разделе 4 построен контрпример к конечной порожденности в случае кодействия некополупростой алгебры Хопфа.

2. Предварительные результаты

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа. Рассматриваются H-комодульные алгебры A из класса $\mathcal{A}$. Заметим, что I_A не содержит ненулевых H-подкомодулей, так как для любого H-подкомодуля $U \subseteq I_A$ множество AUA является устойчивым относительно кодействия H идеалом алгебры A, содержащимся в I_A.

Положим $S = A/I_A$ и обозначим через $\pi : A \to S$ каноническую проекцию.

Предложение 2.1. *Пусть A — H-комодульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Тогда отображение*

$$\pi\,|_{A^H} : A^H \to S$$

инъективно. При этом A^H содержится в центре A.

Доказательство. Так как $A^H \cap \ker\pi$ — H-комодуль, содержащийся в I_A, то $A^H \cap \ker\pi = 0$. Значит, $\pi\,|_{A^H}$ инъективно.

Пусть $a \in A^H$. Покажем, что a содержится в центре A. Обозначим $U = \{ab - ba \mid b \in A\}$. Пусть $x = ab - ba$ для некоторого $b \in A$, тогда

$$\begin{aligned}\rho(x) = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a) &= \sum_{(b)} ab_{(0)} \otimes b_{(1)} - b_{(0)}a \otimes b_{(1)} = \\ &= \sum_{(b)} (ab_{(0)} - b_{(0)}a) \otimes b_{(1)} \in U \otimes H.\end{aligned}$$

Значит, $\rho(U) \subset U \otimes H$. Кроме того, $U \subseteq \ker\pi$, так как S коммутативна. Следовательно, $U = 0$. Таким образом, a содержится в центре A. □

Предложение 2.2. *Пусть A — H-комодульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Если S конечно порождена как $\pi(A^H)$-модуль, то A конечно порождена как A^H-модуль, и A^H — конечно порожденная* $\mathbf{k}$*-алгебра.*

Доказательство. Пусть $M = \mathrm{Hom}^H(H^*, A)$ — множество гомоморфизмов правых H-комодулей, и $N = \mathrm{Hom}(H^*, S)$. Зададим на M и N структуры A^H-модулей, полагая для M $(a\phi)(v) = a(\phi(v))\quad \forall a \in A^H$, $\phi \in M$, $v \in H^*$ (в силу того, что оператор левого умножения на a коммутирует с кодействием H, имеем $a\phi \in M$), а для N $(a\phi)(v) = \pi(a)(\phi(v))\quad \forall a \in A^H$, $\phi \in N$, $v \in H^*$. Так как $N \cong H \otimes S$ конечно порожден как S-модуль, а S конечно порождена как $\pi(A^H)$-модуль, то N конечно порожден как A^H-модуль.

Покажем, что M конечно порожден. Рассмотрим отображение $\Phi : M \to N$ $(\phi \mapsto \pi \circ \phi)$. Заметим, что Φ — гомоморфизм A^H-модулей. Проверим инъективность Φ. Пусть $\phi \in M$ и $\Phi(\phi) = 0$, значит, $\phi(H^*) \subseteq \ker\pi$, но так как ϕ — морфизм H-комодулей, то $\phi(H^*)$ — H-комодуль, содержащийся в $\ker\pi$. Значит, $\phi(H^*) = 0$, следовательно, $\phi = 0$. Так как S — конечно порожденная алгебра и S конечно порождена как A^H-модуль, то $\pi(A^H) \cong A^H$ —

конечно порожденная алгебра ([7], с. 101, предложение 7.8) и, следовательно, она нетерова. Значит, M конечно порожден.

Так как $M = \mathrm{Hom}_{H^*}(H^*, A)$, а H^* — образующий в категории левых H^*-модулей, то $\sum\limits_{\phi \in M} \phi(H^*) = A$. На $M \otimes H^*$ можно задать структуру A^H-модуля: $a(\phi \otimes h) = (a\phi) \otimes h$ для $a \in A^H$, $h \in H^*$. Рассмотрим отображение $\Psi : M \otimes H^* \to A$ $(\phi \otimes h \mapsto \phi(h))$, которое является сюръективным гомоморфизмом A^H-модулей. Так как $M \otimes H^*$ является конечно порожденным A^H-модулем, то алгебра A конечно порождена как A^H-модуль. □

Пусть V — правый конечномерный H-комодуль, задаваемый отображением $\rho : V \to V \otimes H$. Тогда ρ продолжается до гомоморфизма алгебр $\rho' : T(V) \to T(V) \otimes H$, где $T(V)$ — тензорная алгебра для V. Тем самым $T(V)$ становится H-комодульной алгеброй. Обозначим через $I'(V)$ идеал алгебры $T(V)$, порожденный $\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$. Определим

$$S_H(V) = T(V)/I(V),$$

где $I(V)$ — наибольший H-устойчивый справа идеал, содержащийся в $I'(V)$. Тогда ρ' продолжается до гомоморфизма алгебр $\overline{\rho} : S_H(V) \to S_H(V) \otimes H$ и $S_H(V)$ становится H-комодульной алгеброй из класса $\mathcal{A}$, так как ее идеал $I_{S_H(V)} = I'(V)/I(V)$ не содержит ненулевых устойчивых относительно кодействия H идеалов алгебры $S_H(V)$, и $S_H(V)/I_{S_H(V)} \cong T(V)/I'(V) \cong S(V)$ — симметрическая алгебра для V.

Предложение 2.3. *Пусть V — H-комодуль и A — H-комодульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Пусть $q : V \to A$ — морфизм H-комодулей и $q(V)$ порождает A как алгебру. Тогда если $S_H(V)$ конечно порождена как $S_H(V)^H$-модуль, то A конечно порождена как A^H-модуль.*

Доказательство. Продолжим q до сюръективного гомоморфизма H-комодульных алгебр $q' : T(V) \to A$. Так как $(\pi_A \circ q')(ab - ba) = 0 \quad \forall a, b \in T(V)$ в силу коммутативности A/I_A, то $q'(I'(V)) \subseteq \ker \pi_A$. Так как $q'(I(V))$ — H-комодуль, содержащийся в $\ker \pi_A$, то $q'(I(V)) = 0$. Тогда q' продолжается до сюръективного гомоморфизма H-комодульных алгебр $\overline{q} : S_H(V) \to A$. Так как $\overline{q}(S_H(V)^H) \subseteq A^H$, то заключение очевидно. □

Предложение 2.4. *Пусть U_1, U_2 — H-комодули. Если $S_H(U_i)$ конечно порождена как $S_H(U_i)^H$-модуль $\forall i \in \overline{1,2}$, то $S_H(U_1 \oplus U_2)$ конечно порождена как $S_H(U_1 \oplus U_2)^H$-модуль.*

Доказательство. Морфизм H-комодулей $q_i : U_i \to U_1 \oplus U_2$ продолжается до гомоморфизма H-комодульных алгебр $\overline{q_i} : S_H(U_i) \to S_H(U_1 \oplus U_2)$, а также до гомоморфизма симметрических алгебр $\widehat{q_i} : S(U_i) \to S(U_1 \oplus U_2)$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} S_H(U_i) \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "\overline{q_i}"] & S(U_i) \arrow[d, "\widehat{q_i}"] \\ S_H(U_1 \oplus U_2) \arrow[r, "\pi"] & S(U_1 \oplus U_2) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Заметим, что $S(U_1 \oplus U_2) \cong S(U_1) \otimes S(U_2)$. Пусть $\phi : S(U_1 \oplus U_2) \to S(U_1) \otimes S(U_2)$ задает этот изоморфизм. Тогда $\phi \circ \widehat{q_1}(a) = a \otimes 1 \quad \forall a \in S(U_1)$ и $\phi \circ \widehat{q_2}(a) = 1 \otimes a \quad \forall a \in S(U_2)$. Значит,

$$\pi_1(S_H(U_1)^H) \otimes 1 = \phi \circ \widehat{q_1}(\pi_1(S_H(U_1)^H)) = \phi \circ \pi(\overline{q_1}(S_H(U_1)^H)) \subseteq \phi \circ \pi(S_H(U_1 \oplus U_2)^H).$$

Аналогично $1 \otimes \pi_2(S_H(U_2)^H) \subseteq \phi \circ \pi(S_H(U_1 \oplus U_2)^H)$. Таким образом,

$$\pi_1(S_H(U_1)^H) \otimes \pi_2(S_H(U_2)^H) \subseteq \phi \circ \pi(S_H(U_1 \oplus U_2)^H).$$

Так как $S_H(U_i)$ конечно порождена как $S_H(U_i)^H$-модуль, то $S(U_i)$ конечно порождена как $\pi_i(S_H(U_i)^H)$-модуль. Пусть $\{e_k^i\}_{k\in\overline{1,m_i}} \in S(U_i)$ порождают $S(U_i)$ как $\pi_i(S_H(U_i)^H)$-модуль, тогда $\{e_i^1 \otimes e_k^2\} \in S(U_1) \otimes S(U_2) \cong S(U_1 \oplus U_2)$ порождают $S(U_1 \oplus U_2)$ как $\pi(S_H(U_1 \oplus U_2)^H)$-модуль. По предложению 2.2 алгебра $S_H(U_1 \oplus U_2)$ конечно порождена как $S_H(U_1 \oplus U_2)^H$-модуль. □

3. Инварианты кодействия кополупростой алгебры Хопфа

В этом разделе доказывается основной результат работы об алгебрах инвариантов кодействия кополупростой алгебры Хопфа.

Предложение 3.1. *Пусть H — кополупростая алгебра Хопфа и пусть V, U — H-комодули, а $q : V \to U$ — сюръективный морфизм H-комодулей. Тогда $q\,|_{V^H}: V^H \to U^H$ также сюръективно.*

Доказательство. Пусть $M = \ker q$. Так как H кополупроста, то M — прямое слагаемое в V. Так как q — эпиморфизм, то $V \cong U \oplus M$. Для заданного $a \in U^H$ элемент $x = a \oplus 0 \in V$ — инвариант в V и $q(x) = a$. □

Для градуированного кольца $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ обозначим через $A_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ идеал кольца A.

Предложение 3.2. *Пусть $S = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов, и $C \subseteq S$ – градуированное подкольцо в S, $C_i \subseteq S_i$. Если $\forall 0 \neq x \in \mathbf{k}^n$ существует $f \in C_+$ такой, что $f(x) \neq 0$, то S конечно порождена как C-модуль.*

Доказательство. Пусть J — идеал алгебры S, порожденный C_+. Данное предложение является следствием леммы ([8], с. 91, 4.2.6), в которой утверждается, что $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ порождают S как C-модуль, если $\{e_\alpha + J\}_{\alpha\in\Lambda}$ — базис векторного пространства S/J.

Так как множество нулей $V(J) = \{x \in \mathbf{k}^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in J\}$ равно $\{0\}$, то по теореме Гильберта о нулях $\forall f \in S_+$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f^m \in J$. Значит, для любого $k \in \overline{1,n}$ элемент $x_k + J$ нильпотентен в S/J и алгебра S/J конечномерна. Следовательно, S конечно порождена как C-модуль, и S — целое кольцо над C. □

Подалгебра B в алгебре Хопфа H называется *правой коидеальной подалгеброй*, если B является правым коидеалом в H, т. е. $\Delta(B) \subseteq B \otimes H$.

Частным случаем ([9], теорема 6.1. (i)) для конечномерной алгебры Хопфа является

Предложение 3.3. *Если H — конечномерная алгебра Хопфа, а B — правая коидеальная подалгебра в H, то в B нет нетривиальных устойчивых относительно кодействия H идеалов.*

Лемма. *Пусть H — конечномерная кополупростая алгебра Хопфа, и V — конечномерный H-комодуль. Тогда алгебра $S_H(V)^H$ конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра и алгебра $S_H(V)$ конечно порождена как $S_H(V)^H$-модуль.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \xi \in V^*$. Тогда ξ продолжается до гомоморфизма алгебр $\overline{\xi} : S_H(V) \to \mathbf{k}$. Определим $\beta_\xi : S_H(V) \to H$ как композицию гомоморфизмов алгебр

$$S_H(V) \xrightarrow{\rho_{S_H(V)}} S_H(V) \otimes H \xrightarrow{\overline{\xi}\otimes 1} \mathbf{k} \otimes H \cong H.$$

Покажем, что β_ξ — морфизм H-комодульных алгебр. Для $a \in S_H(V)$ имеем

$$\Delta(\beta_\xi(a)) = \sum_{(a)} \Delta(\overline{\xi}(a_{(0)})a_{(1)}) = \sum_{(a)} \overline{\xi}(a_{(0)})a_{(1)} \otimes a_{(2)} =$$
$$= \sum_{(a)} \beta_\xi(a_{(0)}) \otimes a_{(1)} = (\beta_\xi \otimes 1) \circ \rho_{S_H(V)}(a).$$

Значит, $B = \beta_\xi(S_H(V))$ — правая коидеальная подалгебра в H.

Стандартная градуировка тензорной алгебры $T(V)$ индуцирует градуировку $S_H(V) = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} S_H(V)_i$, в которой все однородные компоненты $S_H(V)_i$ — H-комодули. Тогда $S_H(V)_+ = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} S_H(V)_i$ — устойчивый относительно кодействия H идеал в $S_H(V)$. Так как $\beta_\xi(S_H(V)_+)$ — ненулевой устойчивый относительно кодействия H идеал в $\beta_\xi(S_H(V))$, то по предложению 3.3 $\beta_\xi(S_H(V)_+) = \beta_\xi(S_H(V))$. Тогда в силу предложения 3.1 $\beta_\xi(S_H(V)_+^H) = \beta_\xi(S_H(V))^H$.

Значит, существует $a \in S_H(V)_+^H$ такой, что $\beta_\xi(a) = 1 = \overline{\xi}(a)1$. Поэтому для любого $0 \neq \xi \in V^*$ существует $a \in S_H(V)_+^H$ такой, что $\overline{\xi}(a) \neq 0$. Пусть $C = \pi(S_H(V)^H)$. Так как $\overline{\xi}$ продолжается до гомоморфизма алгебр $\widehat{\xi} : S(V) \to \mathbf{k}$ ($\widehat{\xi} \circ \pi = \overline{\xi}$), то для любого $0 \neq \xi \in V^*$ существует $a \in C_+$ такой, что $\widehat{\xi}(a) \neq 0$. Кольцо $S(V)$ можно отождествить с кольцом многочленов $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, где $n = \dim V$, а элементы из V^* — с точками в $\mathbf{k}^n$ и $\widehat{\xi}(f) = f(\xi) \quad \forall f \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Тогда по предложению 3.2 кольцо $S(V)$ конечно порождено как C-модуль. Остается применить предложение 2.2. □

Теорема. *Пусть H — конечномерная кополупростая алгебра Хопфа и A — H-комодульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Тогда алгебра A^H конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра и алгебра A конечно порождена как A^H-модуль.*

Доказательство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ порождают A как алгебру. Определим U как H-подкомодуль в A, порожденный $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Так как любой конечно порожденный H-комодуль конечномерен ([1], с. 38, теорема 2.1.3), то $\dim(U) < \infty$. Тогда по лемме 3.1 алгебра $S_H(U)$ конечно порождена как $S_H(U)^H$-модуль, и можно воспользоваться предложением 2.3 и предложением 7.8 из ([7], с. 101). □

4. Контрпример к конечной порожденности

В общем случае для H-комодульной алгебры A из класса $\mathcal{A}$ ответ на вопрос о конечной порожденности A как A^H-модуля, и A^H как $\mathbf{k}$-алгебры отрицателен. Это показывает следующий пример, в котором используется четырехмерная алгебра Хопфа из [1]. Будем считать, что $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$.

Пусть $H = \mathbf{k}\langle g, x\rangle/(g^2 - 1, x^2, xg + gx)$, где $\mathbf{k}\langle g, x\rangle$ — свободная алгебра, порожденная элементами g и x. Коумножение на H задается по формулам

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x.$$

Предложение 4.1. *Пусть U — правый H-комодуль, и $\{e_1, e_2\}$ образуют базис U над $\mathbf{k}$, кодействие на котором задается по формулам*

$$\rho(e_2) = e_2 \otimes g, \quad \rho(e_1) = e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes x.$$

Тогда $A = S_H(U)$ не конечно порождена как A^H-модуль, и A^H не конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра.

Доказательство. Будем рассматривать e_1, e_2 либо как элементы алгебры A, либо как элементы коммутативной алгебры $S = S(U)$ в зависимости от контекста.

Покажем, что $\pi(a)$ делится на e_2 для любого $a \in \pi(A_+^H)$.

Отображение $\overline{\rho} = (\pi \otimes 1) \circ \rho : A \to S \otimes H$ — гомоморфизм алгебр. Вычисления дают $\overline{\rho}(e_1^k) = (e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes x)^k = e_1^k \otimes 1 + k e_1^{k-1} e_2 \otimes x$. Покажем, что

$$\overline{\rho}(e_1^{k_1} e_2 e_1^{k_2} e_2 \dots e_1^{k_n} e_2 e_1^{k_{n+1}}) = e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i} e_2^n \otimes g^n + \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} k_i\right) e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i - 1} e_2^{n+1} \otimes x g^n,$$

рассуждая по индукции. Для $n = 0$ это уже проверено. Предполагая, что данное равенство верно для $n - 1$ вхождения e_2, находим

$$\begin{aligned}
&\overline{\rho}(e_1^{k_1} e_2 e_1^{k_2} e_2 \dots e_1^{k_n} e_2 e_1^{k_{n+1}}) = \overline{\rho}(e_1^{k_1} e_2 e_1^{k_2} e_2 \dots e_1^{k_{n-1}} e_2 e_1^{k_n}) \overline{\rho}(e_2 e_1^{k_{n+1}}) = \\
&\qquad = \left(e_1^{\sum_{i=1}^{n} k_i} e_2^{n-1} \otimes g^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} k_i\right) e_1^{\sum_{i=1}^{n} k_i - 1} e_2^n \otimes x g^{n-1}\right) \times \\
&\qquad\qquad \times (e_1^{k_{n+1}} e_2 \otimes g - k_{n+1} e_1^{k_{n+1}-1} e_2^2 \otimes x g) = \\
&= e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i} e_2^n \otimes g^n + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} k_i\right) e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i - 1} e_2^{n+1} \otimes x g^n - (-1)^{n-1} k_{n+1} e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i - 1} e_2^{n+1} \otimes x g^n,
\end{aligned}$$

что дает требуемое равенство для n вхождений e_2.

Пусть $a = \sum\limits_{n=0}^{N} \sum\limits_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} e_1^{k_1} e_2 e_1^{k_2} e_2 \dots e_1^{k_n} e_2 e_1^{k_{n+1}} \in A_+^H$ с коэффициентами $\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} \in \mathbf{k}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}(a) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} &\Bigg(\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i} e_2^n \otimes g^n + \\
&+ \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} k_i\right) e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i - 1} e_2^{n+1} \otimes x g^n\Bigg) = \pi(a) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Зададим $\xi \in H^*$ по правилу $\xi(x) = 1$, $\xi(1) = \xi(g) = \xi(xg) = 0$. Тогда

$$0 = (1 \otimes \xi)\overline{\rho}(a) = \sum_{p=0}^{[N/2]} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{2p+1}} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{2p+1}} \left(\sum_{i=1}^{2p+1} (-1)^{i-1} k_i\right) e_1^{\sum_{i=1}^{2p+1} k_i - 1} e_2^{2p+1}.$$

Значит, $\sum\limits_{k1} \alpha_{k_1} k_1 e_1^{k_1 - 1} = 0$ (при $p = 0$), откуда $\alpha_{k_1} = 0 \quad \forall k_1 > 0$. Поэтому

$$\pi(a) = \alpha_0 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}} e_1^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i} e_2^n.$$

Так как $a \in A_+$, то $\alpha_0 = 0$ и $\pi(a)$ делится на e_2.

Покажем, что элементы $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n} e_1^{n-i} e_2 e_1^i e_2$ принадлежат A^H для любого $n \geq 0$. Используя равенство

$$\rho(e_1^k) = (e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes x)^k = e_1^k \otimes 1 + \sum_{p=0}^{k-1} e_1^{k-p-1} e_2 e_1^p \otimes x,$$

находим

$$\rho(e_1^{n-i}e_2) = e_1^{n-i}e_2 \otimes g + \sum_{p=0}^{n-i-1} e_1^{n-i-p-1}e_2e_1^pe_2 \otimes xg,$$

$$\rho(e_1^ie_2) = e_1^ie_2 \otimes g + \sum_{j=0}^{i-1} e_1^{i-j-1}e_2e_1^je_2 \otimes xg,$$

$$\rho(e_1^{n-i}e_2e_1^ie_2) = e_1^{n-i}e_2e_1^ie_2 \otimes 1 - \sum_{j=0}^{i-1} e_1^{n-i}e_2e_1^{i-j-1}e_2e_1^je_2 \otimes x +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-i-1} e_1^{n-i-p-1}e_2e_1^pe_2e_1^ie_2 \otimes x.$$

Таким образом,

$$\rho(a_n) = a_n \otimes 1 - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} e_1^{n-i}e_2e_1^{i-j-1}e_2e_1^je_2 \otimes x + \sum_{i=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-i-1} e_1^{n-i-p-1}e_2e_1^pe_2e_1^ie_2 \otimes x = a_n \otimes 1.$$

Значит, $a_n \in A^H$, и $\forall n \quad e_1^ne_2^2 \in \pi(A^H)$. Предположим, что $\pi(A^H)$, изоморфная A^H, конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра. Пусть $\{f_1e_2, \ldots, f_ne_2\}$ — система однородных порождающих. Обозначим $N = \max_i(\deg(f_ie_2))$. Так как $e_1^{2N}e_2^2 \in \pi(A^H)$, то

$$e_1^{2N}e_2^2 = \sum \alpha_{k_1,\ldots,k_n} f_1^{k_1}\ldots f_n^{k_n} e_2^{\sum k_i} = Ge_2^3 + F,$$

где $G = \sum\limits_{\sum k_i \geq 3} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} f_1^{k_1}\ldots f_n^{k_n} e_2^{\sum k_i - 3}$ и $F = \sum\limits_{i\leq j} \beta_{i,j}f_if_je_2^2 + \sum\limits_i \gamma_if_ie_2$. Значит,

$$2\,(2N)! = \left(\frac{\partial}{\partial e_1}\right)^{2N}\left(\frac{\partial}{\partial e_2}\right)^2 e_1^{2N}e_2^2 = \left(\frac{\partial}{\partial e_1}\right)^{2N}\left(\frac{\partial}{\partial e_2}\right)^2 (Ge_2^3) + \left(\frac{\partial}{\partial e_1}\right)^{2N}\left(\frac{\partial}{\partial e_2}\right)^2 (F)\,.$$

Так как $\deg(F) \leq \max_{i,j}[\deg(f_if_je_2^2), \deg(f_ie_2)] = 2N$ и применение $\frac{\partial}{\partial e_i}$ к многочлену уменьшает его степень, то $(\frac{\partial}{\partial e_1})^{2N}(\frac{\partial}{\partial e_2})^2F = 0$. Тогда получаем, что $2(2N)! = (\frac{\partial}{\partial e_2})^2[e_2^3\{(\frac{\partial}{\partial e_1})^{2N}G\}]$ делится на e_2. Следовательно, A^H не конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра. Таким образом, A не конечно порождена как A^H-модуль. □

Литература

[1] Sweedler M.E. *Hopf algebras* (W.A. Benjamin, New York, 1969).

[2] Montgomery S. *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **82** (Amer. Math. Soc., 1993).

[3] Skryabin S.M. *Invariants of finite Hopf algebras*, Adv. Math. **183** (2), 209–239 (2004).

[4] Артамонов В.А. *Инварианты алгебр Хопфа*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. механ., № 4, 45–49 (1996); *исправление*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. механ., № 2, с. 64 (1997).

[5] Zhu Shenglin. *Integrality of module algebras over its invariants*, J. Algebra **180** (1), 187–205 (1996).

[6] Тоток А.А. *Об инвариантах конечномерных точечных алгебр Хопфа*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. механ., № 3, 31–34 (1997).

[7] Атья М., Макдональд И. *Введение в коммутативную алгебру* (Мир, М., 1972).

[8] Спрингер Т. *Теория инвариантов* (Мир, М., 1981).

[9] Skryabin S.M. *Projectivity and freeness over comodule algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **(**359) (6), 2597–2623 (2007).

М.С. Еряшкин

*аспирант, НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. профессора Нужина, д. 1/37, Казань 420008,*

`e-mail:` darkghost@hitv.ru

M.S. Eryashkin

*Postgraduate, Chebotarev Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan 420008, Russia,*

`e-mail:` darkghost@hitv.ru