УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Р.М. Асхатов

Аннотация

Найдены фундаментальные решения сингулярного эллиптического уравнения, выраженные через гипергеометрические функции. С помощью фундаментальных решений построены потенциалы типа двойного и простого слоев. Основные краевые задачи для одного сингулярного эллиптического уравнения сведены к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их разрешимость.

Ключевые слова: фундаментальные решения, потенциалы типа двойного и простого слоев, краевые задачи, интегральные уравнения Фредгольма, оператор обобщенного сдвига.

К числу первых работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям второго рода относится работа [1], где впервые указаны случаи, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий и заменяться условием ограниченности решения. Позднее А.В. Бицадзе [2] указал, что условие ограниченности может быть заменено граничным условием с некоторой весовой функцией.

В работах [3, 4] построены явные формулы решений ряда задач для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \alpha < 1$$

для произвольных α в случае нормальной кривой. В [5] построена теория потенциала для указанного уравнения. Некоторые результаты для более общего сингулярного эллиптического уравнения были получены, например, в [6]. В настоящей работе построены и применены потенциалы типа двойного и простого слоев к исследованию краевых задач для одного сингулярного эллиптического уравнения.

Пусть E_2^+ – полуплоскость $y > 0$ евклидовой плоскости E_2, D – конечная область, симметричная относительно оси Ox и ограниченная кривой Γ. Обозначим через D^+ часть области D в E_2^+, ограниченную отрезком $\Gamma^{(0)} = [a, b]$ оси Ox и кривой Γ^+; $\widetilde{D}^{\,+} = D^+ \bigcup \Gamma^+$, $\overline{D}^{\,+} = \widetilde{D}^{\,+} \bigcup \Gamma^{(0)}$, $D_e^+ = E_2^+ \setminus \overline{D}^{\,+}$.

Рассмотрим сингулярное эллиптическое уравнение

$$T_\alpha^{(2)}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad 0 < k < 1, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

С помощью замены независимых переменных по формулам

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y}{1-k}\right)^{1-k}$$

уравнение (1) приводится к вырождающемуся эллиптическому уравнению первого рода

$$\eta^m \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad m = \frac{2k}{1-k}.$$

Известно [7], что фундаментальные решения уравнения (1) с особенностью в точке (ξ_0, η_0) имеют вид

$$w_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = A_1(\rho_1^2)^{-k/2} F\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k; 1-\sigma\right),$$

$$w_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = A_2^*(\rho_1^2)^{-k/2}(1-\sigma)^{1-k} F\left(1-\frac{k}{2}, 1-\frac{k}{2}, 2-k; 1-\sigma\right),$$

где $F(\cdot)$ – гипергеометрическая функция, A_1, A_2^* – некоторые постоянные,

$$\rho^2 = (\xi-\xi_0)^2 + (1-k)^2\left(\eta^{1/1-k} - \eta_0^{1/1-k}\right)^2,$$

$$\rho_1^2 = (\xi-\xi_0)^2 + (1-k)^2\left(\eta^{1/1-k} + \eta_0^{1/1-k}\right)^2, \quad \sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}.$$

Известно также [7], что фундаментальные решения обладают следующими свойствами.

1. w_1 и w_2 могут быть представлены соответственно в виде

$$w_1 = A_1(\rho_1^2)^{-k/2} F\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k; 1-\sigma\right) = B_1 \Phi_1 \ln\frac{1}{\rho} + \Psi_1,$$

где B_1 – нормирующая константа,

$$\Phi_1 = (\rho_1^2)^{-k/2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\,\sigma + \cdots\right),$$

$$\Psi_1 = A_1(\rho_1^2)^{-k/2}\left[\frac{2\,\Gamma(k)}{\Gamma^2(k/2)}\left(1 + \frac{k^2}{4}\,\sigma + \cdots\right)\ln\rho_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^4(k/2)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k/2+l)}{(l!)^2}\left[2\frac{\Gamma'(1+l)}{\Gamma(1+l)} - 2\frac{\Gamma'(k/2+l)}{\Gamma(k/2+l)}\right]\sigma^l\right],$$

и

$$w_2 = A_2^*(\rho_1^2)^{-k/2}(1-\sigma)^{1-k} F\left(1-\frac{k}{2}, 1-\frac{k}{2}, 2-k; 1-\sigma\right) = B_2\Phi_2 \ln\frac{1}{\rho} + \Psi_2,$$

где B_2 – нормирующая константа,

$$\Phi_2 = (\rho_1^2)^{-k/2}(1-\sigma)^{1-k}\left(1 + \frac{(2-k)^2}{4}\,\sigma + \cdots\right),$$

$$\Psi_2 = A_2^*(\rho_1^2)^{-k/2}(1-\sigma)^{1-k}\left[\frac{2\,\Gamma(2-k)}{\Gamma^2(1-k/2)}\left(1 + \frac{(2-k)^2}{4}\,\sigma + \cdots\right)\ln\rho_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(2-k)}{\Gamma^4(1-k/2)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(1-k/2+l)}{(l!)^2}\left[2\frac{\Gamma'(1+l)}{\Gamma(1+l)} - 2\frac{\Gamma'(1-k/2+l)}{\Gamma(1-k/2+l)}\right]\sigma^l\right].$$

Очевидно, что Ψ_1 и Ψ_2 – непрерывные функции. Они сами и их первые частные производные интегрируемы по любой конечной кривой, расположенной в верхней полуплоскости;

2. w_1 и w_2 удовлетворяют соответственно предельным соотношениям

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial w_1}{\partial\eta}=0,\quad \text{и}\quad \lim_{\eta\to 0}w_2=0.$$

Возвращаясь к переменным x, y от переменных ξ, η, получаем для уравнения (1) фундаментальные решения с особенностью в точке (x_0,y_0) вида

$$w_1=B_1\Phi_1\ln\frac{1}{r}+\Psi_1, \tag{2}$$

где

$$\Phi_1=(r_1^2)^{-k/2}\left(1+\frac{k^2}{4}\,\tau+\cdots\right),$$

$$\Psi_1=A_1(r_1^2)^{-k/2}\left[\frac{2\,\Gamma(k)}{\Gamma^2(k/2)}\left(1+\frac{k^2}{4}\,\tau+\cdots\right)\ln r_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(k)}{\Gamma^4(k/2)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(k/2+l)}{(l!)^2}\left[2\frac{\Gamma'(1+l)}{\Gamma(1+l)}-2\frac{\Gamma'(k/2+l)}{\Gamma(k/2+l)}\right]\tau^l\right],$$

и

$$w_2=B_2\Phi_2\ln\frac{1}{r}+\Psi_2, \tag{3}$$

где

$$\Phi_2=(r_1^2)^{-k/2}(1-\tau)^{1-k}\left(1+\frac{(2-k)^2}{4}\,\tau+\cdots\right),$$

$$\Psi_2=A_2(r_1^2)^{-k/2}(1-\tau)^{1-k}\left[\frac{2\,\Gamma(2-k)}{\Gamma^2(1-k/2)}\left(1+\frac{(2-k)^2}{4}\,\tau+\cdots\right)\ln r_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2-k)}{\Gamma^4(1-k/2)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(1-k/2+l)}{(l!)^2}\left[2\frac{\Gamma'(1+l)}{\Gamma(1+l)}-2\frac{\Gamma'(1-k/2+l)}{\Gamma(1-k/2+l)}\right]\tau^l\right];$$

$$r^2=(x-x_0)^2+\alpha^{2/(k-1)}(y-y_0)^2,$$

$$r_1^2=(x-x_0)^2+\alpha^{2/(k-1)}(y+y_0)^2,\quad \tau=\frac{r^2}{r_1^2}.$$

Функции w_1 и w_2, заданные с помощью (2) и (3), являются фундаментальными решениями уравнения (1), так как они имеют логарифмическую особенность. Кроме того, они удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{y\to 0}y^k\frac{\partial w_1}{\partial y}=0,\quad \lim_{y\to 0}w_2=0.$$

Определение 1. Регулярное решение u уравнения (1) в области D^+ называется $T_\alpha^{(2)}$-гармонической функцией в этой области.

Множество всех $T_\alpha^{(2)}$-гармонических в D^+ и непрерывных в $\overline{D}^{\,+}$ функций обозначим через $T_\alpha^{(2)}(\overline{D}^{\,+})$.

Пусть $u,\, v \in C^{(2)}(D^+)\bigcap C^{(1)}(\overline{D}^{\,+})$. Тогда

$$\iint\limits_{D^+} vT_\alpha^{(2)}(u)\, y^k\, dx\, dy + \iint\limits_{D^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) y^k\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma^+} v\frac{\partial u^*}{\partial n}\, y^k\, d\Gamma, \tag{4}$$

$$\iint\limits_{D^+}\left(vT_\alpha^{(2)}(u) - uT_\alpha^{(2)}(v)\right) y^k\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma^+}\left(v\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial v^*}{\partial n}\right) y^k\, d\Gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \cos(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2\cos(y,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{6}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к ∂D^+ в точке $P(x,y)$.

Формулы (4) и (5) представляют собой соответственно первую и вторую формулы Грина для оператора $T_\alpha^{(2)}$.

Пусть $M_0 \in D^+$. Рассмотрим окружность $C_{M_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиусом ε такую, что $C_{M_0\varepsilon} \subset D^+$. Обозначим $D_\varepsilon = D^+ \setminus K_{M_0\varepsilon}$, где $K_{M_0\varepsilon}$ – круг с центром в точке M_0 и радиусом ε.

Применим вторую формулу Грина для оператора $T_\alpha^{(2)}$ к функциям w_1 и $u \in T_\alpha^{(2)}$ в области D_ε:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{D_\varepsilon}\left(w_1(r)T_\alpha^{(2)}(u) - uT_\alpha^{(2)}(w_1(r))\right) y^k\, dx\, dy = \\ \int\limits_{\Gamma^+}\left(w_1(r)\frac{\partial u}{\partial n}^* - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n}\right) y^k\, d\Gamma + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(w_1(r)\frac{\partial u}{\partial n}^* - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon}.\end{gathered} \tag{7}$$

Так как $T_\alpha^{(2)}(u) = 0$ в D^+, $T_\alpha^{(2)}(w_1(r)) = 0$ в D_ε, равенство (7) принимает вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma^+}\left(w_1(r)\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n}\right) y^k\, d\Gamma + \\ + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(w_1(r)\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon} = \int\limits_{\Gamma^+}\left(w_1(r)\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n}\right) y^k\, d\Gamma + \\ + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(B_1\Phi_1\ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\,\frac{\partial\big(B_1\Phi_1\ln(1/r)\big)^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon} + \\ + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(\Psi_1^*\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon} = I_1 + I_2 + I_3 = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Ясно, что $I_3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Интеграл I_2 представим в виде

$$\begin{gathered}I_2 = B_1\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(\Phi_1\ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon} - \\ - B_1\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(u\Phi_1\frac{\partial\ln(1/r)}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon} - B_1\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(u\ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial n}\right) y^k\, dC_{M_0\varepsilon}.\end{gathered} \tag{9}$$

Согласно формуле о среднем значении с учетом того, что $\left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right| \le M$ при $\varepsilon \to 0$ и на окружности $r = \varepsilon$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} B_1(\overline{u\Phi_1 y^k})\, 2\pi\varepsilon = 2^{1-k}\pi B_1 u(M_0)\alpha^{k/(1-k)}.$$

Находим нормирующую константу:

$$B_1 = \frac{1}{2^{1-k}\pi\alpha^{k/(1-k)}}.$$

Из (8) и (9) получаем интегральное представление $T_\alpha^{(2)}$-гармонической функции $u(x,y)$:

$$u(M_0) = \int\limits_{\Gamma^+} \left(w_1(r)\frac{\partial u^*}{\partial n} - u\frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) y^k\, d\Gamma. \tag{10}$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид

$$w_1 = \frac{1}{2^{1-k}\pi\alpha^{k/(1-k)}}\, \Phi_1 \ln\frac{1}{r} + \Psi_1.$$

Теорема 1. *Если* $u(x,y) \in T_\alpha^{(2)}\left(\overline{D}^+\right)$, *то функция* u *принимает наибольшее и наименьшее значения на границе области.*

Доказательство. Обозначим через M наибольшее значение функции u в $\overline{D}^+$, а через N наибольшее значение функции u на границе области.

Предположим, что $M > N$, функция достигает наибольшего значения во внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ области D^+.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$v = u + \frac{M-N}{4l^2}\, T_{x,\,y}^{x_0,\,y_0}(x^2+y^2),$$

где l – наибольшее расстояние между двумя точками границы области D^+, $T_{x,\,y}^{x_0,\,y_0}(\cdot)$ – оператор обобщенного сдвига [8].

Ясно, что $v(M_0) = M$. Оценим значение v на границе:

$$v \le N + \frac{M-N}{4} = \frac{M+3N}{4} < \frac{M+3M}{4} = M.$$

Значит, v принимает наибольшее значение во внутренней точке D^+.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – та точка области D^+, где v принимает наибольшее значение. Тогда

$$T_\alpha^{(2)}(u)_{M_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} < 0.$$

С другой стороны, подставляя v в уравнение (1), получаем

$$T_\alpha^{(2)}(u)_{M_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что функция u не может достигать наибольшего значения во внутренних точках области D^+. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает наибольшего значения на границе. Предложение о наименьшем значении доказывается аналогично. $\square$

Рассмотрим следующие краевые задачи.

Внутренняя задача Дирихле $(D_i^{(0)})$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D^+, непрерывную в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma^{(0)}} = 0,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача Дирихле $(D_e^{(0)})$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D_e^+, непрерывную в $\overline{D}_e^+$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внутренняя задача типа Неймана (K_i). Требуется найти функцию $u(x,y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D}^+$, непрерывную в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = f(P), \quad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma^{(0)}} = 0,$$

где $f(P)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача типа Неймана (K_e). Требуется найти функцию $u(x,y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D_e^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D}_e^+$, непрерывную в $\overline{D}_e^+$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = f(P), \quad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0,$$

где $f(P)$ – непрерывная функция.

Имеют место следующие теоремы единственности.

Теорема 2. *Внутренняя задача Дирихле $D_i^{(0)}$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два предполагаемых решения задачи Дирихле. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ будет $T_\alpha^{(2)}$-гармонической в области D^+, непрерывной в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющей граничным условиям

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad u|_{\Gamma^{(0)}} = 0.$$

В силу теоремы Вейерштрасса функция достигает наибольшего и наименьшего значений в $\overline{D}^+$. Но согласно принципу максимума эти значения не могут достигаться во внутренних точках области D^+. Следовательно,

$$u \equiv 0, \quad u_1 \equiv u_2.$$

□

Теорема 3. *Внешняя задача Дирихле $D_e^{(0)}$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме, предложенной при доказательстве соответствующей теоремы, например, в [9].

Теорема 4. *Внутренняя задача типа Неймана K_i не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два предполагаемых решения задачи типа Неймана. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ будет $T_\alpha^{(2)}$-гармонической в области D^+, один раз непрерывно дифференцируемой в $\widetilde{D}^{\,+}$ и удовлетворяющей граничным условиям задачи K_i. Согласно первой формуле Грина при $v = u$, $T_\alpha^{(2)} = 0$ получаем

$$\iint\limits_{D^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] y^k \, dx \, dy = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0.$$

Согласно граничным условиям задачи имеем

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0.$$

□

Теорема 5. *Внешняя задача типа Неймана K_e не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме, предложенной при доказательстве соответствующей теоремы, например, в [9].

Координаты переменной точки на кривой Γ^+ будем обозначать через $P = P(\xi_1, \xi_2)$. Считаем, что Γ является кривой Ляпунова.

С помощью фундаментального решения w_1 строим потенциалы типа двойного и простого слоев. Они имеют соответственно вид

$$W(M) = \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \, \frac{\partial w_1}{\partial n} \, \xi_2^k \, d\Gamma_P = 0,$$

$$V(M) = \int\limits_{\Gamma^+} \mu(P) \, w_1 \, \xi_2^k \, d\Gamma_P = 0,$$

где $\sigma(P)$ и $\mu(P)$ – плотности этих потенциалов.

Потенциалы можно представить соответственно в виде

$$W(M) = \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \, \frac{\partial \left(B_1 \Phi_1 \ln (1/r) + \Psi_1 \right)}{\partial n} \, \xi_2^k \, d\Gamma_P =$$

$$= B_1 \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \Phi_1 \, \frac{\partial \ln (1/r)}{\partial n} \, \xi_2^k \, d\Gamma_P + R_1^*,$$

где

$$R_1^* = B_1 \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \, \ln \frac{1}{r} \, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \, \xi_2^k \, d\Gamma_P + \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \, \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \, \xi_2^k \, d\Gamma_P$$

есть непрерывная функция
и

$$V(M) = B_1 \int\limits_{\Gamma^+} \mu(P)\Phi_1 \ln\frac{1}{r}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P + R_1^{**},$$

где

$$R_1^{**} = \int\limits_{\Gamma^+} \mu(P)\Psi_1\,\xi_2^k\, d\Gamma_P$$

есть непрерывно дифференцируемая функция.

Рассмотрим потенциал типа двойного слоя, плотность которого равна единице,

$$W^{(0)}(M) = \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P.$$

Теорема 6. *Если* Γ *– кривая Ляпунова, то значения интеграла типа Гаусса для фундаментального решения* w_1 *уравнения* (1) *определяются по формуле*

$$W^{(0)}(M) = \begin{cases} -1, & M \in D^+, \\ 0, & M \bar{\in} \overline{D}^+, \\ -1/2, & M \in \Gamma^+. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $M \in D^+$. Полагая $u = 1$ в формуле интегрального представления (10), получаем

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P = -1.$$

Пусть $M \bar{\in} \overline{D}^+$. Полагая $u = 1$ во второй формуле Грина (5), имеем

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P = 0.$$

Пусть $M \in \Gamma^+$. Опишем вокруг точки M круг $K_{M\varepsilon}$. Обозначим через $D_\varepsilon^* = D^+ \bigcup K_{M\varepsilon}$, $D_\varepsilon^{'} = D^+ \setminus K_{M\varepsilon}$, $K_{M\varepsilon}^* = D^+ \bigcap K_{M\varepsilon}$, $K_{M\varepsilon}^{'} = K_{M\varepsilon} \setminus K_{M\varepsilon}^*$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma^+ \setminus K_{M\varepsilon}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon \cup K_{M\varepsilon}^*} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P = 0, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon \cup K_{M\varepsilon}^{'}} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P = -1. \tag{12}$$

Складывая (11) и (12), получаем

$$2\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P + J_\varepsilon = -1, \tag{13}$$

где

$$J_\varepsilon = \int\limits_{K_{M\varepsilon}^{'}} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P - \int\limits_{K_{M\varepsilon}^*} \frac{\partial w_1}{\partial n}\,\xi_2^k\, d\Gamma_P.$$

Заметим, что $J_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С учетом этого замечания (13) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial w_1}{\partial n}\, \xi_2^k \, d\Gamma_P = -\frac{1}{2}.$$

Потенциалы типа двойного и простого слоев на границе ведут себя так же, как и их аналоги для уравнения Лапласа.

□

Теорема 7. *Если Γ – кривая Ляпунова и $\sigma(P)$ – непрерывная функция на Γ^+, то для потенциала типа двойного слоя справедливы следующие предельные соотношения*

$$W_i(P_0) = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)}, \quad W_e(P_0) = \frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)}, \tag{14}$$

где через $W_i(P_0)$ и $W_e(P_0)$ обозначены соответствующие предельные значения потенциала типа двойного слоя в точке $P_0 \in \Gamma^+$, когда $P \to P_0$ изнутри и извне Γ^+, а через $\overline{W(P_0)}$ – прямое значение потенциала типа двойного слоя.

Теорема 8. *Пусть Γ – кривая Ляпунова и $\mu(P)$ – непрерывная функция на Γ^+. Потенциал типа простого слоя имеет нормальную производную как изнутри, так и извне Γ^+. Тогда предельные значения нормальной производной потенциала типа простого слоя выражаются с помощью формул*

$$\frac{\partial V_i(P_0)}{\partial n} = \frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{\frac{\partial V(P_0)}{\partial n}}, \quad \frac{\partial V_e(P_0)}{\partial n} = -\frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{\frac{\partial V(P_0)}{\partial n}}, \tag{15}$$

где $\dfrac{\partial V_i(P_0)}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial V_e(P_0)}{\partial n}$ – соответствующие предельные значения потенциала типа простого слоя в точке $P_0 \in \Gamma^+$, когда $P \to P_0$ изнутри и извне Γ^+, а $\overline{\dfrac{\partial V(P_0)}{\partial n}}$ – прямое значение потенциала типа простого слоя.

Доказательство этих теорем проводится по схеме, предложенной при доказательстве соответствующих теорем, например, в [9].

Решение уравнения (1), зависящее от $r = \sqrt{x^2 + \alpha^{2/(k-1)} y^2}$, имеет вид

$$v = C_1 r^{-k} + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Пусть $C_1 = A_1$, $C_2 = 0$. Тогда $v = A_1 r^{-k}$ является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в начале координат.

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi_1(x, \xi) = A_1 T^{x_1, -x_2}_{\xi_1, \xi_2}(r^{-k}).$$

Ясно, что эта функция является регулярным решением уравнения (1) в E_2^+. Имеют место также следующие предельные соотношения:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial(w_1 - \psi_1)}{\partial n_P} = 0, \quad \lim_{y \to 0} (w_1 - \psi_1) = 0.$$

Решение задачи $(D_i^{(0)})$ ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P) \frac{\partial(w_1 - \psi_1)}{\partial n}\, \xi_2^k \, d\Gamma_P.$$

Неизвестную плотность σ найдем из требования, чтобы эта функция удовлетворяла граничному условию $u|_{\Gamma^+} = \varphi(P)$. С этой целью подставим ее в указанное граничное условие. В результате имеем

$$\lim_{M\to P_0} = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_P}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = \varphi(P_0).$$

Отсюда получим эквивалентное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для неизвестной функции σ

$$\sigma(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_P}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = -2\varphi(P_0), \quad P_0 \in \Gamma^+.$$

Используя формулы (14) и (15) для предельных значений, а также граничные условия основных краевых задач, получим эквивалентные интегральные уравнения для трех остальных задач. Для удобства выпишем все интегральные уравнения вместе:

$$(D_i^{(0)}): \quad \sigma(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_P}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = -2\varphi(P_0), \tag{16}$$

$$(D_e^{(0)}): \quad \sigma(P_0) + 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_P}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = 2\varphi(P_0), \tag{17}$$

$$(K_i): \quad \mu(P_0) + 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_{P_0}}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = 2f(P_0), \tag{18}$$

$$(K_e): \quad \mu(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)\,\frac{\partial(w_1-\psi_1)}{\partial n_{P_0}}\,\xi_2^k\,d\Gamma_P = -2f(P_0). \tag{19}$$

В уравнениях (16)–(19) точка P_0 принадлежит границе Γ^+.

Уравнения (16)–(19) – интегральные уравнения со слабой особенностью, причем уравнения (16), (19) и (17), (18) являются попарно сопряженными. Для этих интегральных уравнений, как и в случае уравнения Лапласа, справедливы теоремы Фредгольма.

Исследование первой и второй пары сопряженных уравнений проводится по схеме, предложенной, например, в [9].

Summary

R.M. Askhatov. The Solution of the Basic Boundary Value Problems for a Singular Elliptic Equation by the Method of Potentials.

We have found fundamental solutions to a singular elliptic equation, expressed via hypergeometric functions. Using these fundamental solutions, we have built the simple and double layer potentials. We have reduced the basic boundary value problems for a singular elliptic equation to the equivalent Fredholm integral equations of the second kind and proved their solvability.

Keywords: fundamental solutions, simple and double layer potentials, boundary value problems, Fredholm integral equations, generalized shift operator.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.
2. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
3. *Кароль И.Л.* К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Матем. сборник. – 1956. – Т. 38, № 3. – С. 261–282.
4. *Терсенов С.А.* К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Сиб. матем. журн. – 1965. – Т. 6, № 5. – С. 1120–1143.
5. *Хайруллин Р.С.* Теория потенциала для модельного уравнения второго рода // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 3. – С. 64–73.
6. *Асхатов Р.М.* Принцип экстремума и задача Дирихле для одного сингулярного эллиптического уравнения. – Казань, 1999. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.11.99, № 3289-В99.
7. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
8. *Мухлисов Ф.Г.* Потенциалы, порожденные оператором обобщенного сдвига, и краевые задачи для одного класса сингулярных эллиптических уравнений: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 1993. – 324 с.
9. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.

Поступила в редакцию
15.10.13

Асхатов Радик Мухаметгалеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Radik.Ashatov@kpfu.ru*