УДК 519.1+519.7

ЦЕПНЫЕ КОДЫ И SNAKE-IN-THE-BOX PROBLEM

А.А. Евдокимов

Аннотация

Статья написана по материалам пленарного доклада «Цепные коды и Snake-in-the-Box Problem: современное состояние, обобщения, приложения», сделанного на XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики», Казанский федеральный университет, июнь, 2014 г. В статье мы обсуждаем современное состояние исследований по этой хорошо известной комбинаторной проблеме и её обобщениям. Даётся обзор результатов по нижним и верхним оценкам наибольшей длины цепи (snake) и цикла в n-мерном булевом кубе. Сравниваются известные методы конструирования змей и верхние оценки их максимальной длины. Приводится таблица точных значений наибольших длин для $n < 9$ и оценки для $n = 10$, 11 и 12. Описана простая конструкция змеи длины $\mathrm{const} \cdot 2^n$ со значением $\mathrm{const} > 0.26$. Анализируются свойства конструкций, влияющие на величину константы. Даётся обзор результатов по обобщающим змеи цепным кодам. Приводятся некоторые нерешённые задачи.

Ключевые слова: «змея в ящике», n-мерный куб, комбинаторика, символьные последовательности, цепные коды.

Введение

Кодированием множества называют отображение его элементов в множество слов некоторого конечного алфавита. Отображение обычно выбирается таким образом, чтобы его образ, то есть кодовое множество слов, удовлетворяло определённым условиям, зависящим от целей кодирования и информации о структурных свойствах кодируемого множества. Эти условия определяются содержательной задачей и назначением кода. Обычно решают вопросы существования, построения и оценки качества кодирования, стремясь найти код, свойства и числовые характеристики которого близки к оптимальным.

Дадим определение цепных кодов, их различные интерпретации и приведём краткий обзор результатов. Если $I = \{0, 1\}$ – множество из двух элементов, то, как обычно, $I^n = \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n \text{ раз}}$, а элементы множества I^n называем двоичными n-ками, или словами длины n. Множество единиц булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определённой на I^n, обозначаем через N_f^1. Множество нулей есть N_f^0, расстояние Хемминга в I^n определяется по формуле

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Конечная последовательность $\widetilde{\alpha_0}, \widetilde{\alpha_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_l$ двоичных n-ок $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, образует цепной код с расстоянием d, если:

1) $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}) = 1$ при $i = 0, 1, \ldots, l-1$;

2) из $|i - j| \geq d$ следует $\rho(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\alpha_j}) \geq d$ для всех $0 \leq i, j \leq l$, где $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ – расстояние Хемминга между n-ками $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, причём $l \geq d$, чтобы не рассматривать вырожденные случаи.

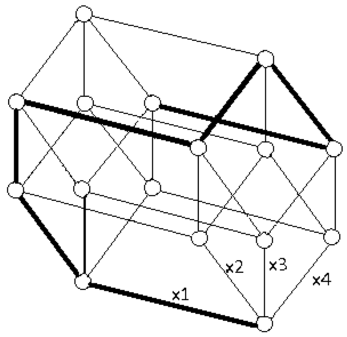

Рис. 1

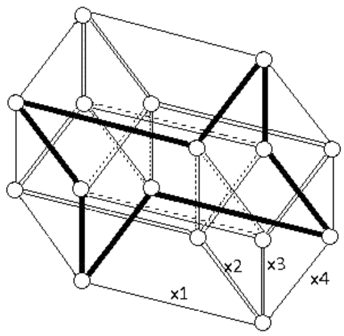

Рис. 2

Будем такой цепной код называть (n,d)-цепью длины l.

Пусть $L(n,d)$ – наибольшая длина такого кода, то есть (n,d)-цепи для заданных n и d. При $d=2$ такую цепь называют «змеёй в ящике».

Геометрически в графе единичного n-мерного куба цепному (n,d)-коду соответствует в силу 1) путь по рёбрам этого куба, который в силу свойства 2) не подходит сам к себе ближе, чем на расстояние d.

Например, (4,2)-цепь кода наибольшей длины 7, или «змею в ящике» с параметрами $n=4$ и $d=2$ и длиной 7, образует последовательность наборов:

$$\widetilde{\alpha}_0=(0000),\quad \widetilde{\alpha}_1=(0001),\quad \widetilde{\alpha}_2=(0011),\quad \widetilde{\alpha}_3=(0111),$$

$$\widetilde{\alpha}_4=(0110),\quad \widetilde{\alpha}_5=(1110),\quad \widetilde{\alpha}_6=(1100),\quad \widetilde{\alpha}_7=(1101).$$

Этой (4,2)-цепи соответствует в 4-мерном булевом кубе путь длины 7, изображенный на рис. 1, а 1231421 – переходная последовательность этого пути, записанная сменой номеров координатных позиций в его вершинах.

Если $d=1$, то $(n,1)$-цепь есть простой, то есть без самопересечений, путь, для $d=2$ это путь без хорд и т. д.

Циклически замкнутый путь называется (n,d)-циклом. В англоязычной литературе «змея в ящике» называется “snake-in-the-box”, а для цикла стали употреблять термин “coil”.

На рис. 2 чёрным цветом выделен (4,2)-цикл, дополнение множества вершин которого образует второй (4,2)-цикл. Показано также разбиение множества всех 32 рёбер на 4 таких цикла, каждый из которых получается из другого аффинным преобразованием.

1. Конструкции и нижние оценки

Исследования по цепным кодам и проблеме, называемой «змея в ящике», имеют давнюю историю. Но в последние годы, наряду с продолжающимися математическими исследованиями кодов этого типа, появилось большое число публикаций, в которых для поиска конструкций кодов и нахождения «рекордных» значений их параметров применяется богатый арсенал различного типа эвристических и полуэвристических методов и вычислительных технологий. Появился даже термин «охота на змей», а сама задача стала тестовой для сравнения эффективности применяемых вычислительных технологий и их различных модификаций (см. конец статьи и два указанных там сайта).

Отметим совсем недавно полученный результат – после многочисленных попыток разных авторов найдено точное значение максимальной длины змеи в 8-мерном булевом кубе.

Табл. 1

Последние значения

n	«Змея»	Цикл
2	2	4
3	4	6
4	7	8
5	13	14
6	26	26
7	50	48
8	98	96
9	190	188
10	370	348
11	697	640
12	1278	1238

Как обычно в теории кодирования, по отношению к (n,d)-кодам возникают вопросы их явного конструирования при различном выборе параметров n, d, l, экстремальные задачи нахождения оптимального значения одного из параметров при фиксированных двух других, существования эффективных алгоритмов кодирования и декодирования и т. п.

Основным в задаче является нахождение $L(n,d)$ и конструкции (n,d)-цепей длины, близкой к $L(n,d)$.

Легко найти, что $L(n,1) = 2^n - 1$, построив в n-кубе гамильтонову цепь. Такая цепь легко строится, например, индукцией по n. Отметим, что $(n,1)$-цепи называются еще кодами Грея, и они находят широкое применение. Обычно для этих цепей полагают $\rho(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_l) = 1$, то есть говорят о цепях типа «цикла», что несущественно меняет задачу. Известно много конструкций и реализаций данных кодов с различными дополнительными свойствами в зависимости от направления их применения. Известная задача о числе гамильтоновых циклов n-куба, то есть кодов Грея, не решена и оказалась очень трудной даже для нахождения приближённых оценок.

В табл. 1 приведены значения $L(n,2)$, точные для $n < 9$, и оценки снизу для остальных значений.

Известен ряд работ, посвящённых нахождению нижних оценок функции $L(n,2)$ вида c^n, где $1 < c < 2$, которые интересны, поскольку получены с помощью простых конструкций [1–3].

Ю.Л. Васильевым доказано [4], что для любого $n \geq 8$

$$L(n,2) \geq \frac{2^{n-1}}{n}(1 - \varepsilon_n), \quad \text{где} \ \ \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \ \ n \to \infty.$$

L. Danzer и V. Klee [5] усилили оценку в 2 раза, получив неравенства

$$L(n,2) \geq \frac{2^{n+1}}{n}, \quad \text{если} \ \ n = 2^k, \ \ k = 2, 3, \ldots$$

$$L(n,2) \geq \frac{7}{4}\frac{2^n}{n-1} \quad \text{для всех} \ \ n \geq 5.$$

А.А. Евдокимов [6, 8] нашёл порядок величины $L(n,2)$:

$$L(n,2) > \mathrm{const} \cdot 2^n$$

и в [7] доказал что $\mathrm{const} > 0.26$.

Рекордное из известных (2014 г.) значение величины константы const > 0.3105 получено H. Abbott и M. Kachalsky в [9, 10] (см. также [11]).

В [12] в общей форме описан метод вложения в гиперкубы цепей и циклов без хорд (змей), длина которых оптимальна по порядку величины. Показано, что, используя сведение задачи вложения к задаче существования и построения слов в n-буквенном алфавите, не содержащих «запрещённых» подслов определённого вида, можно выделить основной элемент всех конструкций, влияющий на величину константы в нижних оценках длины вида $L(n) > \mathrm{const} \cdot 2^n$.

В более общем контексте рассмотрение задач конструирования цепных кодов и исследования их свойств на языке комбинаторики слов с ограничениями и «запретами» на подслова оказалось не просто интерпретацией и удобной формой записи переходными символьными последовательностями, а идеей, оказавшейся продуктивной для исследования.

В [12, 13] показано, каким образом константа в нижней оценке для $L(n,2)$ зависит от наименьшего числа букв алфавита, достаточного для существования управляющей бесконечной последовательности. Отображение $f : N \to A$ множества натуральных чисел $N = 1, 2, \ldots$ в алфавит A определяет управляющую последовательность, если для любых натуральных x и y, удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \psi(x + y)$, буквы в каждой четвёрке $\{f(x-1),\, f(x),\, f(y),\, f(y+1)\}$ все различны, где $\psi(m)$ – наибольшая степень двойки, делящая m (при $x = 1$ и $x = y$ имеем не четвёрку, а тройку букв). Подробнее об управляющих последовательностях и их роли в конструкциях змей говорится в [12].

Заметим, что известные конструкции цепей и циклов в гиперкубе, длины которых оптимальны по порядку величины, явно или неявно опираются на построение управляющей последовательности с «малым» значением мощности её алфавита. Значение этой мощности, равное не зависящей от n константе, и даёт результат $L(n,2) > \mathrm{const} \cdot 2^n$. Явление «скачка» этой мощности при переходе к «большим размерностям» (значениям n) было обнаружено в [14], а семибуквенная управляющая последовательность была построена в [7]. Применяя метод из [14], можно доказать, что 7 – это наименьшая мощность алфавита управляющей последовательности. Отсюда следует, что известные методы получения нижних оценок для $L(n,2)$ не могут дать нижней границы, асимптотически равной 2^{n-1}. Заметим, что не известно, существует ли предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(n,2)}{2^n},$$

и справедливо ли асимптотическое неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{L(n,2)}{2^n} < \frac{1}{2}.$$

Приведём конструкцию $(n,2)$-цепей, длина которых при $n > 6$ не менее $0.26 \cdot 2^n$. Эта нижняя оценка не была опубликована, хотя доказана ещё в диссертации [7]. Поскольку конструкция имеет простое описание и высокое значение константы, хотя и не рекордное, то мы приводим эту конструкцию ниже.

Исходим из $(m,1)$-кода Грея в алфавите $\langle 1, 2, \ldots, m\rangle$, заданного стандартной переходной последовательностью 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 5 1 2 1 $\ldots$, считая её словом бесконечной длины в алфавите $\langle 1, 2, 3, \ldots\rangle$ растущей мощности.

В промежутки между буквами этой последовательности мы будем вставлять слова в четырёхбуквенном алфавите $\langle a, b, c, d\rangle$ (которые еще предстоит определить) так, чтобы префикс получающейся последовательности длины const $\cdot\, 2^n$ и определял $(n,2)$-цепь в алфавите из n букв, для чего, очевидно, надо взять $m = n - 4$.

В [14] определена раскраска в 5 цветов бесконечного графа, который задан бинарным отношением

$$|x-y| < \psi(x+y),$$

на множестве натуральных чисел. Это отношение определяет управляющую последовательность в алфавите из 5 символов, соответствующих 5 цветам раскраски графа этого бинарного отношения [15].

Пусть $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ – управляющая последовательность в алфавите $W = \langle x, y, z, u, v\rangle$. Образуем последовательность в алфавите $\langle \alpha, \beta, W\rangle$ следующим образом:

$$\alpha\omega_1\beta\omega_2\alpha\omega_3\beta\omega_4\ldots\alpha\omega_i\beta\omega_{i+1}\ldots \tag{1}$$

Здесь каждая пара последовательных букв есть либо пара $(\alpha\omega_i), (\beta\omega_i)$, либо пара $(\omega_i\alpha), (\omega_i\beta)$. Поскольку $|W| = 5$, то таких различных пар будет не более 20 (в действительности все 20 пар встречаются). Каждой паре поставим в соответствие слово в новом четырёхбуквенном алфавите $\langle a, b, c, d\rangle$ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
(\alpha x) \to bacd, & (\beta x) \to bcd, & (x\alpha) \to abcd, & (x\beta) \to abcad,\\
(\alpha y) \to cabcd, & (\beta y) \to bd, & (y\alpha) \to bad, & (y\beta) \to bd,\\
(\alpha z) \to bacbd, & (\beta z) \to cd, & (z\alpha) \to cad, & (z\beta) \to cd,\\
(\alpha u) \to bc, & (\beta u) \to bac, & (u\alpha) \to dbcd, & (u\beta) \to dbcad,\\
(\alpha v) \to bd, & (\beta v) \to bad, & (v\alpha) \to bd, & (v\beta) \to bad.
\end{array}$$

Пусть φ – функция этого соответствия, то есть

$$\varphi((\alpha x)) = bacd, \quad \varphi((\alpha y)) = cabcd \ \text{ и т. д.}$$

Заменим в (1) каждую пару последовательных букв словом в соответствии с действием φ-функции. Получим бесконечную последовательность букв алфавита $\langle a, b, c, d\rangle$

$$\varphi(\alpha\omega_1)\varphi(\omega_1\beta)\varphi(\beta\omega_2)\varphi(\omega_2\alpha)\varphi(\alpha\omega_3)\ldots$$

Тогда бесконечная последовательность в алфавите $\langle a, b, c, d, 1, 2, 3, \ldots\rangle$

$$\varphi(\alpha\omega_1)1\varphi(\omega_1\beta)2\varphi(\beta\omega_2)1\varphi(\omega_2\alpha)3\varphi(\alpha\omega_3)1\ldots$$

и есть нужная нам последовательность. Таким образом, для данного n, взяв $m = n-4$ и начальный отрезок этой последовательности до первого вхождения буквы $m+1$, получим слово в алфавите $\langle a, b, c, d, 1, 2, 3, \ldots, m\rangle$, которое является переходной последовательностью $(n, 2)$-цепи, длина которой не менее $0.26 \cdot 2^n$. Подсчёт длины несложно провести, учитывая кратность вхождения букв в переходную последовательность $(m, 1)$-кода Грея и определяемые этими буквами кратности вхождений слов в алфавите $\langle a, b, c, d\rangle$, вставляемых согласно действию φ-функции замены.

2. NP-полнота

Заметим, что обобщения задач о локально изометрических вложениях графов в гиперкубы, в частности вложений (n, d)-цепей и циклов при малых значениях $d = 1, 2$, даже при незначительном их расширении оказываются NP-трудными. Приведём два примера обобщений этого типа. Ниже следуем принятой форме записи NP-полных задач.

Пример 1. Рассматривая вложения $f : X \to Y$ для $X = \{0, 1, \ldots, l-1\}$, $\rho_X = |i-j|$, $Y = \{0, 1\}^n$, расширим класс хемминговых пространств $\{Y, \rho_Y\}$ до класса $\{G, \rho_G\}$ всех двудольных графов.

Условие. Даны двудольный граф $G = (V, E)$ и число $l \leq |V|$.

Вопрос. Существует ли вложение $f : X \to G$ для $|X| = l$, которое сохраняет расстояния 1 и 2 в $f(X) \to G$ и не содержит хорд?

Пример 2. Пусть теперь $\{Y, \rho_Y\}$ – хеммингово пространство, $Y = \{0,1\}^n$, а $\{X, \rho_X\}$ расширим до класса связных деревьев $\{D, \rho_D\}$.

Условие. Даны дерево D с l вершинами и число n.

Вопрос. Существует ли вложение $f : D \to Y$ дерева D для $\dim\{Y, \rho_Y\} \leq n$, которое сохраняет расстояния 2 и не содержит хорд?

Оба указанных расширения являются NP-полными задачами. О вложениях деревьев в гиперкубы при различных ограничениях на классы деревьев см. [16].

Много интересной информации об изометрических вложениях графов в гиперкубы можно найти в монографии [17], где, в частности, рассматриваются и вопросы сложности задач изометрического вложения.

3. Верхние оценки

Верхние оценки для $L(n, 2)$ получали многие исследователи. Первую нетривиальную оценку получил В.В. Глаголев [18], показав, что при $n > 5$ справедливо неравенство $L(n, 2) < 2^{(n-1)}$.

D.G. Larman [19] доказал, что

$$L(n, 2) \leq 2^{n-1} - \frac{2^{n-5}}{n^5} \quad \text{при} \quad n \geq 5.$$

R.J. Douglas [20] усилил оценку, доказав, что

$$L(n, 2) \leq 2^{n-1} - \frac{2^n - 12}{7n(n-1)^2 + 2} \quad \text{при} \quad n \geq 6.$$

Используя лемму В.В. Глаголева из [18], можно получить оценку

$$L(n, 2) < 2^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(n-2)^2 - 1}\right) \quad \text{при} \quad n > 7.$$

Этим методом, но точнее учитывая структуру локального строения вершин змеи, было получено несколько результатов различными авторами. Наилучшую верхнюю оценку $L(n, 2)$ получил G. Zemor [21]:

$$L(n, 2) \leqslant 2^{n-1}\left(1 - \frac{1}{89n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Другие верхние оценки для $L(n, 2)$ опубликовали L. Danzer & V. Klee (1967), K. Deimer (1985), Ф.И. Соловьева (1987), H.S. Snevily (1994), П.Г. Емельянов (1995), P.G. Emelyanov & A. Lukito (2000), J. Zanten (2001) и др. Но все попытки понизить оценку не изменили асимптотического поведения её главного члена. В некоторых работах называлось гипотетическое значение константы, равное $3/8$. А.Д. Коршунов в [27] анонсировал асимптотическую оценку $L(n, 2) < \lambda \cdot 2^n$, где $\lambda < 1/2$, но доказательство не представлено (см. также [33]).

4. Цепные коды для $d > 2$

По-видимому, R.C. Singleton [29] первым исследовал (n, d)-циклы для $d > 2$. Для произвольного нечётного d, имея (n, d)-цепь длины l, легко построить обычный помехоустойчивый (n, d)-код мощности $[l/d] + 1$, исправляющий $(d-1)/2$ ошибок.

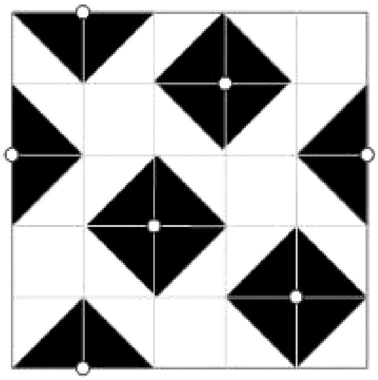

Рис. 3

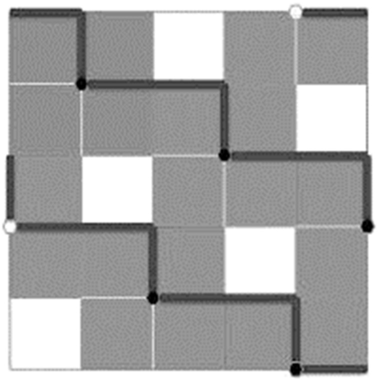

Рис. 4

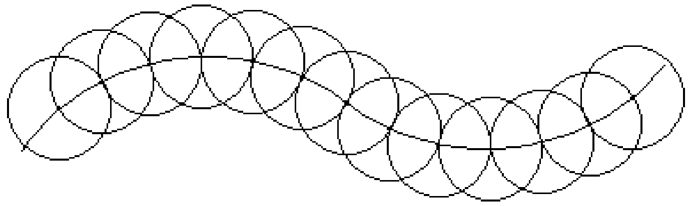

Рис. 5

Для этого, двигаясь вдоль по (n, d)-цепи, будем зачислять в код каждую d-ю по порядку вершину цепи, откуда следует, что

$$L(n, d) < d \cdot A(n, d),$$

где $A(n, d)$ – наибольшая мощность (n, d)-кода.

На рис. 3 изображена упаковка квадратов размера 2×2 в решётке 5×5, на рис. 4 – змея-цикл без хорд длины 15. Упаковка содержит наибольшее число квадратов и единственна с точностью до автоморфизма тора. На рис. 5 показан код, определяемый змеёй и образующий в решётке плотную упаковку шаров радиуса 1.

Кстати, этот пример хорошо иллюстрирует и вторую полезную для конструкций (n, d)-цепей «базовую» идею: представление n-куба как n-мерного тора $C_2^n = C_2 \times \times \cdots \times C_2$ с метрикой Ли, которая в двузначном случае совпадает с метрикой Хемминга, а рёбра булева n-куба заменяются циклами C_2 длины 2. Задачу Snake-in-the-box тогда лучше ассоциировать не с упаковкой «змеи в ящик», а с путями в решётках на многомерных торах. Это подобно известным задачам о бильярдах и траекториях динамических систем, «обматывающих тор всюду плотно» [28, 30].

Для оценки $L(n, d)$ сверху можно воспользоваться любой из известных верхних оценок для $A(n, d)$. В частности, из модели плотной упаковки шаров при фиксированном $d = 2t + 1$ и $n \to \infty$ следует, что

$$L(n, d) \le \frac{2^n}{n^t}.$$

Более точный учёт взаимных пересечений шаров, взятых вдоль по (n, d)-цепи, даёт оценку

$$L(n, 2t + 1) \le \frac{2^n}{C_n^t - 2C_{n-1}^{t-1}}.$$

Эта оценка была улучшена R.J. Douglas [20]:

$$L(n, 2t+1) \leq \frac{2^n}{C_n^t - 2C_{n-1}^{t-1} + P(n)},$$

где $P(n)$ – полином от n степени t с коэффициентом при старшем члене $1/t!$, $t \geq 1$.

Нижние оценки функции $L(n, d)$ и конструкции (n, d)-цепей из $(n, d-1)$-цепей для чётного d, установленные V. Klee [35], есть обобщение полученных ранее результатов Ю.Л. Васильева и L. Danzer, V. Klee для $d = 2$ [4, 5].

Нижняя оценка вида

$$L(n, d) \geq \frac{2^n}{n^{d(1+\varepsilon_n)}}, \quad \text{где } \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

доказана Я.М. Курляндчиком [31] и позднее F. Preparata и J. Nievergelt [36], метод построения (n, d)-цепей которых близок к тому, что дан в [31]. Наилучшая известная нижняя оценка

$$L(n, d) \geq \frac{2^n}{n^{t(1+\varepsilon_n)}}, \quad \text{где } \varepsilon_n = \frac{2\log_2\log_2 n}{\log_2 n},$$

получена А.А. Евдокимовым [32], она в n^t раз лучше оценок, полученных ранее. Конструкция довольно проста и, как в работе автора [6], опирается на построение с помощью арифметических средств и анализа структуры подслов в переходных последовательностях (n, d)-цепей. Некоторые точные значения $L(n, d)$ и оценки для начальных значений $n \leq 30$ и $d \leq 7$ приводятся в таблицах во многих уже указанных публикациях. Отметим результат, полученный R.C. Singleton [29] и R.J. Douglas [20]. Они нашли точные значения наибольшей длины (n, d)-цикла для значений d, близких к n:

$$L'(n, d) = 2n \quad \text{при } n < \left[\frac{3d}{2}\right] + 2,$$

$$L'(3m+2, 2m) = 8m + 6,$$

$$L'(3m+3, 2m+1) = 8m + 8,$$

$$L'(3m+4, 2m+10) = 8m + 12 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Заключение

В заключение приведём работы в которых для поиска змей рекордной длины применялись различные компьютерные технологии исследования задач дискретной оптимизации. Эти работы легко найти по ключевым словам или на сайтах, на которых даётся и информация о новых результатах по Snake-in-the-Box.

Problem. Hunting for Snakes Using:

1) …Genetic Algorithm to find Snake-in-the-Box;
2) …Simulated Annealing, 1994;
3) …Evolutionary Techniques to Hunt for Snakes and Coils, D. Casella, 2005;
4) …Genetic Algorithm and Heuristic Search Approach, S. Bitterman, 2004;
5) …Ant Colony Approach to the Snake-in-the-Box Problem, S. Hardas, 2005;
6) …A Comprehensive Framework for the S-i-B Problem, C. Taylor, 2007;
7) …Searching for snake-in-the-box codes with evolved pruning models, D.R. Tuohy, W.D. Potter, D.A. Casella, 2007;

8) . . . Based on Temporal Difference Learning, L. Wang W.D. Potter, 2009;

9) . . . Monte-Carlo Search for Snakes and Coils, D. Kinny, 2012;

10) . . . Investigating the snake-in-the-box problem with neuroevolution, J. Bishop, 2006

и много других (более 50).

Сайты:

Kinny D. Snake-in-the-Box Research Page. – Kyoto University, 2012. – URL: http://www.ai.soc.i.kyoto-u.ac.jp/ dnk/sitb.html/;

Snake-in-the-box. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Snake-in-the-box/.

Summary

A.A. Evdokimov. Circuit Codes and the Snake-in-the-Box Problem.

The article is based on the materials of the plenary talk “Circuit Codes and the Snake-in-the-Box Problem: Modern State, Generalizations, and Applications” presented at the XVII International Conference “Problems of Theoretical Cybernetics”, Kazan Federal University, June, 2014. In this paper we discuss the current state of research on this well-known combinatorial problem and its generalizations. A survey on the lower and upper bounds for the maximal length of a snake and a cycle in the n-dimensional Boolean cube is given. We compare the known methods for construction of snakes and the upper bounds for their lengths. A table of strict values of the maximal lengths for $n < 9$ and the bounds for $n = 10$, 11 and 12 is presented. A simple construction for a snake of length $\mathrm{const} \cdot 2^n$ with $\mathrm{const} > 0.26$ is given. We analyze the properties of the constructions which influence the value of the constant. A survey of the results on circuit codes (that are generalizations of snakes) is given. Several unsolved tasks are considered.

Keywords: snake-in-the-box, n-dimensional cube, combinatorics, symbolic sequences, circuit codes, upper and lower bounds.

Литература

1. *Kautz W.H.* Unit-distance error-checking codes // IRE Trans. Electron. Comp. – 1958. – V. EC-7, No 2. – P. 179–180.

2. *Журавлев Ю.И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. – М.: Физматлит, 1962. – № 8. С. 5–44.

3. *Klee V.* What is the maximum length of a d-dimensional snake? // Am. Math. Monthly. – 1970. – V. 77, No 1. – P. 63–65.

4. *Васильев Ю.Л.* О длине цикла в n-мерном единичном кубе // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 4. – С. 753–756.

5. *Danzer L., Klee V.* Length of snakes in boxes // J. Combin. Theory. – 1967. – V. 2. – P. 258–265.

6. *Евдокимов А.А.* О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, Вып. 3. – С. 309–319.

7. *Евдокимов А.А.* О максимальной длине цепи в n-мерном единичном кубе и некоторых родственных задачах: Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1971. – 60 с.

8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. – М.: Наука, 1974. – Т. I. – 313 с.

9. *Abbott H., Katchalski M.* On the snake in the box problem // J. Combin. Theory. Ser. B. – 1988. – V. 45, No 1. – P. 13–24.

10. *Abbott H., Katchalski M.* On the construction of snake-in-the-box codes // Utilitas Math. – 1991. – V. 40. – P. 97–116.
11. *Wojciechowski J.* A new lower bound for snake-in-the-box codes // Combinatorica. – 1989. – V. 9, No 1. – P. 91–99.
12. *Евдокимов А.А.* Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. – Вып. 50. – С. 10–25.
13. *Евдокимов А.А.* О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. – Вып. 34. – С. 8–26.
14. *Глаголев В.В., Евдокимов А.А.* О минимальной раскраске одного бесконечного графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1970. – Вып. 17. – С. 9–17.
15. *Евдокимов А.А., Пережогин А.Л.* Управляющие символьные последовательности в алфавите наименьшей мощности // Материалы конф. «Дискретный анализ и исследование операций». – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2004. – С. 84.
16. *Wagner A.S.* Embeedding Treesin the Hypercube: Ph.D.Diss. – Toronto: University of Toronto, 1987. – 118 p.
17. *Deza M.M., Laurent M.* Geometry of cuts and metrics // Algorithms and Combinatorics. V. 15. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 587 p.
18. *Глаголев В.В.*Верхняя оценка длины цикла в n-мерном единичном кубе // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. – Вып 6. – С. 3–7.
19. *Larman D.G.* On the right lower circular density of two-dimensional Jordan curves in the plane // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1968. – V. 64, No 1. – P. 67–70.
20. *Douglas R.J.* Upper bounds on the length of circuits of even spread in the d-cube // J. Combin. Theor. – 1969. – V. 7. – P. 206–214.
21. *Zemor G.* An upper bound on the size of the snake-in-the-box // Combinatorica. – 1997. – V. 17, No 2. – P. 287–298.
22. *Deimer K.* A new upper bound for the length of snakes // Combinatorica. – 1985. – V. 5, No 2. – P. 109–120.
23. *Solov'jeva F.I.* An upper bound for the length of a cycle in an n-dimensional unit cube // Diskretnyi Analiz. – 1987. – V. 45. – P. 71–76. (in Russian)
24. *Snevily H.S.* The snake-in-the-box problem: A new upper bound // Discrete Math. – 1994. – V. 133, No 1–3. – P. 307–314.
25. *Емельянов П.Г.* О верхней оценке длины змеи в единичном n-мерном кубе // Дискретный анализ и исслед. операций – 1995. – Т. 2, № 3. – С. 10–17.
26. *Lukito A., van Zanten A.J.* A new non-asymptotic upper bound for snake-in-the-box codes // J. Combin. Math. Combin. Comput. – 2001. – V. 39. – P. 147–156.
27. *Коршунов А.Д.* О верхней оценке длины «змеи» в n-мерном булевом кубе // Материалы XIII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». – М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-матем. фак. МГУ, 2002. – Ч. I. – С. 96–97.
28. *Евдокимов А.А., Малюгин С.А.* Код «змея в ящике» и пути в решетке на торе // Математика сегодня. – Киев: Вища шк., 1987. – С. 108–116.
29. *Singleton R.C.* Generalized snake-in-the-box codes // IEEE Trans. Electron. Comp. – 1966. – V. EC-15, No 4. – P. 596–602.

30. *Леонтьев В.К.* О некоторых комбинаторных задачах теоретико-числового содержания // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 3. – С. 402–407.

31. *Курляндчик Я.М.* О логарифмической асимптотике длины максимального цикла разброса $r > 2$ // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. – Вып. 19. – С. 48–55.

32. *Евдокимов А.А.* Цепные коды с произвольным расстоянием // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 228, № 6. – С. 1273–1276.

33. *Коршунов А.Д.* Некоторые нерешенные задачи дискретной математики и математической кибернетики // Усп. матем. наук. – 2009. – Т. 64, № 5(389). – С. 3–20.

34. *Kochut K.J.* Snake-in-the-box codes for dimension 7 // J. Combin. Math. Combin. Comput. – 1996. – V. 20. – P. 175–185.

35. *Klee V.* A method for constructing circuit codes // Journal of the ACM. – 1967. – V. 14, No 3. – P. 520–528.

36. *Preparata F.P., Nievergelt J.* Difference-preserving codes // IEEE Trans. Info. Theory. – 1974. – V.-20, No 5. – P. 643–649.

Поступила в редакцию
06.08.14

Евдокимов Александр Андреевич – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией дискретного анализа, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; профессор кафедры теоретической кибернетики, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия.

E-mail: *evdok@math.nsc.ru*