

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной деятельности КФУ  
Проф. Д.К. Нурғалиев



« 23 » сентября 2015 г.

**Программа дисциплины**

Б1.В.ОД.7 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль) подготовки: 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань  
2015

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в соответствии с общими целями основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования (далее - образовательная программа послевузовского профессионального образования) являются:

- 1) формирование у аспирантов представлений о вариационных методах постановок краевых задач для дифференциальных уравнений;
- 2) овладение современными методами исследования нелинейных дифференциальных уравнений.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливая логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями краевых задач.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Данная учебная дисциплина включена в раздел Б1.В.ОД.7 ООП. Осваивается на 3 курсе, в 5 семестре.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

В результате изучения данной дисциплины аспирант

- **должен знать:** основные понятия и результаты по дифференциальным уравнениям;
- **должен уметь:** применять вариационные неравенства для постановки и решения различных задач математической физики;
- **должен владеть:** методами анализа свойств простейших различных дифференциальных операторов;
- **должен демонстрировать способность и готовность:** квалифицированно обсуждать основные понятия и результаты по теории вариационных неравенств;
- **должен уметь вычислять** инвариантные подпространства для ряда нелинейных дифференциальных операторов;
- **понимать место и роль** дифференциальных уравнений в современной математике и иметь представление о ее связи с другими разделами математики и физике;
- **владеть аппаратом** вариационных постановок краевых задач при решении творческих задач, а также навыками самостоятельных исследований и уметь на основе полученных знаний составлять модели в прикладных науках, а также гибко владеть широким арсеналом методов, позволяющих эффективно решать соответствующие математические задачи;
- **уметь ориентироваться** в истории создания теории дифференциальных уравнений в частных производных и владеть основными методами их решения; адекватно излагать полученные результаты и оформлять их в виде научных публикаций, применять полученные знания на практике.

В результате освоения дисциплины у обучающегося формируются компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
УК-1	способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
УК-3	готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессио-

	нальной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий;
ПК-1	способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в профессиональной области, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов;
ПК-2	способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях;
ПК-3	способность к преподаванию механико-математических дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

##### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: экзамен в 5 семестре.

	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Лекции	Самостоятельная работа
4	Тема 1. Элементы теории вариационных неравенств.	5	1-5	10	20
2	Тема 2. Вариационные неравенства для монотонных операторов. Некоэрцитивные операторы.	5	6-10	10	20
3	Тема 3. Приложения вариационных неравенств к постановкам краевых задач для дифференциальных уравнений	5	11-15	10	20
4	Тема 4. Методы нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных	5	16-18	6	12
	ИТОГО		1-18	36	72

#### 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Курсы лекций, занятия, организованные по стандартной технологии.

#### 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

## ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

### **Тема 1. Элементы теории вариационных неравенств.**

#### *лекционное занятие*

Вариационные неравенства в конечномерных пространствах. Вариационные неравенства в Гильбертовых пространствах. Чебышевские множества. Проблема выпуклости Чебышевского множества в Гильбертовом пространстве. Коэрцитивные операторы.

### **Тема 2. Вариационные неравенства для монотонных операторов. Некоэрцитивные операторы.**

#### *лекционное занятие*

Вариационные неравенства для монотонных операторов. Некоэрцитивные операторы. Полулинейные уравнения. Квазилинейные операторы.

### **Тема 3. Приложения вариационных неравенств к постановкам краевых задач для дифференциальных уравнений.**

#### *лекционное занятие*

Вариационная постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Вариационная постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Вариационная постановка краевых задач для уравнений параболического типа.

### **Тема 4. Методы нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.**

#### *лекционное занятие*

Метод обобщенного разделения переменных и применение для нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод нахождения инвариантных подпространств для нелинейных дифференциальных операторов.

### **Контрольные вопросы**

#### **Тема 1. Элементы теории вариационных неравенств.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вариационные неравенства в конечномерных пространствах. Вариационные неравенства в Гильбертовых пространствах. Чебышевские множества. Проблема выпуклости Чебышевского множества в Гильбертовом пространстве. Коэрцитивные операторы.

#### **Тема 2. Вариационные неравенства для монотонных операторов. Некоэрцитивные операторы.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вариационные неравенства для монотонных операторов. Некоэрцитивные операторы. Полулинейные уравнения. Квазилинейные операторы.

#### **Тема 3. Приложения вариационных неравенств к постановкам краевых задач для дифференциальных уравнений.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вариационная постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Вариационная постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Вариационная постановка краевых задач для уравнений параболического типа.

#### **Тема 4. Методы нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Метод обобщенного разделения переменных и применение для нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод нахождения инвариантных подпространств для нелинейных дифференциальных операторов.

## **Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену: все виды текущего контроля успеваемости и аттестации по итогам освоения дисциплины оцениваются по 100-балльной рейтинговой системе, принятой к КФУ. Экзамены оцениваются переводом набранных по дисциплине баллов в оценки: неудовлетворительно, посредственно, удовлетворительно, хорошо, очень хорошо, отлично.

Примерный экзаменационный билет.

1. Доказать, что в конечномерном пространстве любое Чебышевское множество является выпуклым. Пояснить, почему известное доказательство не работает в бесконечномерном случае.
2. Дать вариационную постановку задачи Дирихле.
3. Найти частное решение для нелинейного уравнения в частных производных (дается конкретное уравнение).

## **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **7.1. Регламент дисциплины**

Оценка «отлично»

Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений. Делаются обоснованные выводы. Ответ должен быть развернутым, уверенным, содержать достаточно четкие формулировки. Оценка "отлично" ставится аспирантам, которые при ответе:

- обнаруживают всестороннее систематическое и глубокое знание программного материала;
- способны творчески применять знание теории к решению профессиональных задач;
- владеют понятийным аппаратом;
- демонстрируют способность к анализу и сопоставлению различных подходов к решению заявленной в вопросе проблематики;
- подтверждают теоретические постулаты примерами из педагогической практики.

Оценка «хорошо»

Ответы на поставленные вопросы излагаются систематизировано и последовательно. Материал излагается уверенно. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер.

Оценка "хорошо" ставится за правильный ответ на вопрос, знание основных характеристик раскрываемых категорий. Обязательно понимание взаимосвязей между явлениями и процессами, знание основных закономерностей. Оценка "хорошо" ставится аспирантам, которые при ответе:

- обнаруживают твердое знание программного материала;
- способны применять знание теории к решению задач профессионального характера;
- допускают отдельные погрешности и неточности при ответе.

Оценка «удовлетворительно»

Допускаются нарушения в последовательности изложения. Демонстрируются поверхностное знание вопроса. Имеются затруднения с выводами. Допускаются нарушения норм литературной речи. Оценка "удовлетворительно" ставится аспирантам, которые при ответе:

- в основном знают программный материал в объеме, необходимом для предстоящей работы по профессии;

### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

#### **Письменное домашнее задание**

1. Доказать вариационное неравенство в конечномерном пространстве.
2. Обосновать вариационное неравенство в Гильбертовом пространстве.
3. Доказать, что Чебышевское множество является выпуклым.
4. Пояснить, почему доказательство выпуклости Чебышевского множества в конечномерном случае не проходит в Гильбертовом пространстве.
5. Дать определение коэрцитивного оператора и описать его основные свойства.
6. Обосновать вариационные неравенства для монотонных операторов.
7. Дать определение некоэрцитивного оператора и описать его свойства.
8. Дать определение полулинейного уравнения, привести примеры.
9. Дать определение квазилинейного оператора, привести примеры.
10. Дать вариационную постановку основных краевых задач для уравнений эллиптического типа.

11. Обосновать гладкость обобщенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа.
12. Дать вариационную постановку краевых задач для уравнений гиперболического типа.
13. Дать вариационная постановка краевых задач для уравнений параболического типа.
14. Описать метод обобщенного разделения переменных и применение для нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.
15. Описать метод нахождения инвариантных подпространств для нелинейных дифференциальных операторов.

### Контрольная работа на темы:

1. Простейшие вариационные неравенства, их приложения к задачам механики.
2. Вариационные постановки основных краевых задач математической физики
3. Нахождение частных решений нелинейных уравнений в частных производных.

### 7.3. Вопросы к экзамену

**Вопрос 1.** Вариационные неравенства в конечномерных пространствах.

**Вопрос 2.** Вариационные неравенства в Гильбертовых пространствах.

**Вопрос 3.** Чебышевские множества и их свойства.

**Вопрос 4.** Проблема выпуклости Чебышевского множества в Гильбертовом пространстве.

**Вопрос 5.** Коэрцитивные операторы и их свойства.

**Вопрос 6.** Вариационные неравенства для монотонных операторов.

**Вопрос 7.** Некоэрцитивные операторы и их свойства.

**Вопрос 8.** Полулинейные уравнения, основные свойства.

**Вопрос 9.** Квазилинейные операторы, примеры.

**Вопрос 10.** Вариационная постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа.

**Вопрос 11.** Гладкость обобщенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа.

**Вопрос 12.** Вариационная постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа.

**Вопрос 13.** Вариационная постановка краевых задач для уравнений параболического типа.

**Вопрос 14.** Метод обобщенного разделения переменных и применение для нахождения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

**Вопрос 15.** Метод нахождения инвариантных подпространств для нелинейных дифференциальных операторов.

### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
УК-1	способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Способность к самостоятельному изучению и разбору литературы в области теории операторов.	Вопрос к экзамену №7
		Способность приводить строгое математическое доказательство утверждений в области теории вариационных неравенств.	Письменные домашние задания №.1-7
ОПК-1	способностью самостоятельно осуществлять	Способность к самостоятельному изучению и раз-	Вопрос к экзамену №14.

	научно-исследовательскую деятельность в соответствии с профессиональной областью с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	бору литературы в области дифференциальных уравнений в частных производных.	
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.	Способность к самостоятельному изучению и сбору литературы в области теории множеств.	Вопрос к экзамену №12
		Способность приводить строгое математическое доказательство утверждений в области теории дифференциальных уравнений в частных производных.	Вопрос к экзамену №11.
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях	Способность находить приложения математических результатов в области теории дифференциальных уравнений в частных производных	Вопросы к экзамену №6-8
ПК-3	Способность к преподаванию механико-математических дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Всестороннее и глубокое понимание изучаемой дисциплины.	Вопросы к экзамену №8-9.

## 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Очень важным при изучении курса является систематическое и последовательное изучение предмета.

Необходимо:

1. регулярно посещать лекционные занятия;
2. записывать конспект каждой лекции, чтобы к концу семестра иметь полный курс лекций;
3. перед очередной лекцией повторить содержание предыдущих лекций;
4. с целью более глубокого изучения курса и его применения к решению практических задач в рамках самостоятельного изучения учебного курса рекомендуется обращаться к книгам, приведенным в списке литературы.

## 9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 9.1. Основная литература

1. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. - 4-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 260 с.  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=538998>
2. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В.К. Романко. - 3-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 344 с.  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=538967>
3. Фонарёв, А.А. Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов / А.А. Фонарёв - М.: ИНФРА-М, 2014. – 202 с.  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=445170>

### 9.2. Дополнительная литература

1. Абакумов М.В, Гулин А.В. Лекции по численным методам математической физики: Уч.пос./ М.В.Абакумов, А.В.Гулин; МГУ им. М.В.Ломоносова. Факультет вычисл. математики и кибернетики. - М.:НИЦ ИНФРА-М,2013-158 с  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=364601>
2. Барашков, В. А. Методы математической физики: учеб. пособие / В. А. Барашков. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. - 152 с.  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=492290>
3. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса: Учебное пособие / И.В.Кудинов, В.А.Кудинов; Под ред. Э.М.Карташова. - М.:НИЦ ИНФРА-М,2013-391с  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=405593>

### 9.3. Интернет-ресурсы:

1. EqWorld Мир математических уравнений - <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/education/education/pde.htm>
2. EqWorld Мир математических уравнений УЧП - <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm>
3. Вся необходимая литература доступна здесь: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
4. <https://www.mit.jyu.fi/agora-center/inbct/InBCT34/konnov2.pdf>
5. [https://en.wikipedia.org/wiki/Variational\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/Variational_inequality)

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием вместимостью до 45 человек, компьютерный класс на 15 рабочих мест с выходом в интернет, принтер, проектор, экран, ноутбук.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом рекомендаций по направлению подготовки.



Автор: доцент И.Р. Каюмов  
Рецензент: профессор Ф.Г. Авхадиев

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2015 года, протокол № 11.