ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 14 декабря 2022 г.

Аннотация: *Представимость классических структур (групп, полугрупп, колец, решеток, и т.д.) над эквивалентностями на множестве натуральных чисел. Равномерные m-эквивалентности. Теорема о равномерной m-эквивалентности ядра нумерации группы. Примеры равномерных m-эквивалентностей, над которыми не представимы никакие группы. Примеры позитивных эквивалентностей, над которыми не представимы нижние (верхние) полурешетки. Степени алгоритмической представимости классических структур.*

1. Введение

Понятие группы, являющееся одним из фундаментальных понятий не только математики, но и естествознания, закономерно привлекает интерес специалистов в теории вычислимости с точки зрения возможностей задания групп с теми или иными алгоритмическими свойствами. В первую очередь это касается вычислимых групп, изучение которых было заложено А.И. Мальцевым. Среди множества работ, посвященных этой тематике, отметим работы по группам вычислимых автоморфизмов вычислимых систем (А.С.Морозов). Более широкие классы алгоритмических представлений групп, в т.ч. негативные и позитивные, также изучались видными логиками. Следует отметить, что многие другие важные математические концепции, такие как кольца (в т.ч. поля), векторные пространства, модули, алгебры над фиксированными полями и т.п. содержат в себе подпонятие группы и потому, рассматривая всевозможные их алгоритмические представления, мы одновременно сужаем классы этих представлений до алгоритмических представлений групп.

Однако, наиболее общие алгоритмические представления (нумерации) групп, по-видимому рассматривались в гораздо меньшей степени, т.к. в наиболее общей постановке вопрос кажется труднообозримым. В настоящей лекции вводится понятие равномерной m-эквивалентности и показывается, что ядро алгоритмического представления любой группы является равномерной m-эквивалентностью.
Вместе с тем, установлено, что далеко не всякая равномерная m-эквивалентность является ядром алгоритмического представления подходящей группы.
Мы также рассмотрим вопросы существования алгоритмических представлений алгебраических систем, ядра которых являются равномерными m-эквивалентностями, в т.ч. решетки (рассматриваемые и как частичные порядки, и как алгебры, что оказалось принципиальным), полугруппы, а также трансляционно предполные алгебры.
Отдельный пункт посвятим структурам степеней алгоритмической представимости колец и полей.

1. Введение

Напомним одно из наших базовых определений.

Определение 1.1

Универсальная алгебра называется представимой над эквивалентностью η, если существует ее нумерация с ядром η.

Целью лекции является, в основном, рассмотрение вопросов существования представлений классических алгебраических систем над эквивалентностями различных типов.
Введем центральное определение текущей лекции

Определение 1.2

Эквивалентность η называется m-эквивалентностью (равномерной m-эквивалентностью), если существует такое семейство F вычислимых функций (перечислимое семейство F вычислимых функций), индуцирующих перестановки фактор-множества ω/η, что для всякой пары натуральных чисел x, y найдется такая функция $f \in F$, которая m-сводит класс $\{x\}/\eta$ к классу $\{y\}/\eta$.

Теорема 2.1

Если (G,ν) – нумерованная группа, то ядро $ker(\nu)$ ее нумерации – равномерная m-эквивалентность.

Доказательство. Пусть $a, b \in G, a = \nu(k), b = \nu(l)$. Обозначим через η ядро $ker(\nu)$. Очевидно, что отображение $\pi_{a,b} = \lambda x.[ba^{-1}x]$ – перестановка на основном множестве группы G, переводящая элемент a в b. Рассмотрим вычислимую функцию $f = \lambda x.[l * (k)^{-1} * x]$, где $*$ обозначает вычислимую операцию, представляющую в нумерации ν операцию умножения в группе G, а $()^{-1}$ – вычислимую операцию, поддерживающую операцию взятия обратного элемента в группе G. Ясно, что функция f поддерживает перестановку $\pi_{a,b}$ на ν-номерах (т.е. $\pi_{a,b}\nu = \nu f$) и m-сводит класс $\{k\}/\eta$ к классу $\{l\}/\eta$. Чтобы показать равномерность достаточно сопоставить каждой паре $\langle k, l\rangle \in \omega^2$ функцию $f_{k,l} = \lambda x.[l * (k)^{-1} * x]$. *Теорема доказана.*

Замечание 2.1. Мы работаем в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1} \rangle$, которая обеспечивает равномерность. В сигнатуре с одной бинарной групповой операцией $\langle \cdot \rangle$ теорема 2.1 верна в той части, которая утверждает, что ядро нумерации – m-эквивалентность.

Отметим, что вычислимые перестановки, определяемые семейством F, не обязательно образуют группу, т.к. обратная перестановка может и не поддерживаться вычислимой на номерах функцией. Для позитивных нумераций это множество будет группой. Но уже в случае негативных нумераций линейных порядков можно указать вычислимые перестановки, обратные к которым вычислимыми не будут и потому эта оценка неулучшаема в иерархии Клини-Мостовского.
В обзоре [1] ставился вопрос: "существует ли конечно-определенная алгебра (в частности группа), нумерационная эквивалентность стандартной нумерации которой предполная?".

[1] N.Kh. Kasymov, Recursively separable enumerated algebras, Russian Math. Surveys, **51**:3 (1996), 509–538.

Следствие 2.1

Ни над какой предполной эквивалентностью не представима никакая группа.

Доказательство. Перестановка $\pi_{a,b}$ на G из теоремы 2.1 имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда $a = b$ (в этом случае она будет единичной), т.е. соответствующая представляющая вычислимая функция в случае $a \neq b$ не имеет неподвижных точек по модулю ядра представления и потому ядро не может быть предполной эквивалентностью. *Следствие доказано.*

Таким образом, не только не существует конечно-определенной группы с предполным позитивным ядром (т.к. необходимым условием конечной определенности алгебры является позитивность ее стандартной нумерации), но и предполно нумерованной группы любой алгоритмической сложности.

2. Нумерации групп

Теорема 2.1 порождает два естественных вопроса:
– насколько велик класс равномерных m-эквивалентностей?
– является ли условие равномерности для m-эквивалентности достаточным для представимости над ней группы?
Семейство F вычислимых функций назовем m-сводящим для эквивалентности η, если оно удовлетворяет условиям определения 1.2.
Пусть f – вычислимая перестановка на ω. Обозначим
$F_f = \{f^n | n \in Z\}$, где Z множество целых чисел и
$f^0(x) = x \ (x \in \omega), f^{-k} = (f^k)^{-1} \ (k \in \omega)$.
Покажем, что класс равномерных m-эквивалентностей довольно велик.

Предложение 2.1

Для любой вычислимой перестановки f без конечных циклов, разбивающей ω на бесконечное число орбит, существует континуум таких равномерных m-эквивалентностей, для которых вычислимое семейство F_f является m-сводящим.

Доказательство. По условию перестановка f разбивает ω на множество орбит $O_f(x) = \{f^k(x) | k \in Z\}$. Определим $a_0 = 0, a_{n+1} = \min\{y | y \notin O_f(a_0) \cup \dots \cup O_f(a_n)\}$ (т.е. a_k – наименьшее число из своей орбиты) и $\leqslant_f$-упорядочим f-орбиты так, что все элементы орбиты a_i предшествуют всем элементам орбиты a_j, если $a_i < a_j$. Внутри каждой орбиты полагаем $x \leqslant_f y \Leftrightarrow \exists k \geq 0 (f^k(x) = y)$. Пусть $A = \{a_0 < a_1 < \dots\}$. Построим эквивалентность η_0, задав ее классами η_0-эквивалентности следующим образом: $M_0 = A, M_{n+1} = f^{n+1} M_0, M_{-n-1} = f^{-n-1} M_0, n \in \omega$. Очевидно, что вычислимое семейство F_f является m-сводящим для η_0. Будем строить семейство эквивалентностей, используя бинарное дерево, исходя из η_0. Неформально, эквивалентности $\eta_{01}, \eta_{10}, \eta_{11}$ строятся из $\eta_0 = \eta_{00}$ путем "сдвига" всех f-орбит относительно f-орбиты a_0 на одну позицию вправо, если в индексе η стоит 1, т.е. $a_0 = a_1 \wedge a_1 = f^{-1}(a_2)$ $(\text{mod } \eta_{01})$ и соответствующей "склейкой" всех образов и прообразов относительно f. Аналогично, $a_0 = f^{-1}(a_1) a_1 \wedge a_1 = a_2 \pmod{\eta_{10}}$ и $a_0 = f^{-1}(a_1) \wedge a_1 = f^{-1}(a_2) \pmod{\eta_{11}}$.

Таким образом, если орбита $O_f(a_k)$ сдвигается относительно a_{k-1} на одну позицию вправо, то все орбиты $O_f(a_l), l > k$ также сдвигаются ровно на одну позицию вправо. Опишем эту конструкцию строго.
Пусть $E = \{\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots | \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$ – множество всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц и $\overline{\varepsilon} \in E$.
Построим отображение из $\varphi : E \longrightarrow \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентностей на ω так, что для $i \in \omega$

$$\begin{cases} \varepsilon_i = 0 \Rightarrow a_i = a_{i+1} \pmod{\varphi(\overline{\varepsilon})}, \\ \varepsilon_i = 1 \Rightarrow a_i = f^{-1}(a_{i+1}) \pmod{\varphi(\overline{\varepsilon})}. \end{cases}$$

При этом, если $x = y \pmod{\varphi(\overline{\varepsilon})}$, то все соответствующие f-образы и f-прообразы x, y также будут равны по модулю $\varphi(\overline{\varepsilon})$ и $\varphi(\overline{\varepsilon})$ – наименьшая эквивалентность с этим свойством.
На языке ε-последовательностей $\eta_0 = \varphi(00\ldots), \eta_1 = \varphi(10\ldots)$ и т.д.
Для эквивалентности $\varphi(11\ldots)$ (в последовательности все единицы) $\forall i \in \omega(a_i = f^{-1}(a_{i+1}) \pmod{\varphi(11\ldots)})$.

Покажем, что φ инъективно. Если $\overline{\varepsilon}^1 \neq \overline{\varepsilon}^2$, то существует наименьшее k, для которого $\varepsilon^1_k \neq \varepsilon^2_k$. Пусть, для определенности $\varepsilon^1_k = 0, \varepsilon^2_k = 1$. Тогда $\langle a_k, a_{k+1}\rangle \in \overline{\varepsilon}^1 \setminus \overline{\varepsilon}^2$. Аналогично рассматривается случай $\varepsilon^1_k = 1, \varepsilon^2_k = 0$.
По построению семейство F_f является m-сводящим для любой эквивалентности из $\{\varphi(\overline{\varepsilon}) | \overline{\varepsilon} \in E\}$. Из инъективности φ следует континуальность последнего множества. *Предложение доказано.*

Предложение 2.2

Если все классы эквивалентности η разрешимы, то она является m-эквивалентностью.

Доказательство. Если классы $\alpha = \{p\}/\eta$ и $\beta = \{q\}/\eta$ совпадают, то m-сведение осуществляет тождественная функция. Если же они различны, то вычислимая функция, отображающая класс α в точку q, класс β в точку p и тождественная на $\omega \setminus (\alpha \cup \beta)$ – искомая. *Предложение доказано.*

Предложение 2.3

Если равномерная m-эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый класс, то она разрешима.

Доказательство. Пусть η – равномерная m-эквивалентность и η-класс β разрешим. По условию существует перечислимое семейство F m-сводящих функций. Очевидно, $x = y \pmod \eta \Leftrightarrow \exists f \in F[f(x) \in \beta \wedge f(y) \in \beta]$, т.е. η позитивна. Аналогично, $x \neq y \pmod \eta \Leftrightarrow \exists f \in F[f(x) \in \beta \wedge f(y) \notin \beta]$, что обеспечивает негативность η. *Предложение доказано.*

Следствие 2.2

Если неразрешимая эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый смежный класс, то над ней не представима никакая группа.

2. Нумерации групп

Пусть η – эквивалентность. Напомним, что множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$. Напомним также определения вычислимой отделимости и отделимости.

Определение 2.1

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для всяких различных по модулю η натуральных чисел x, y существует такое η-замкнутое вычислимое (перечислимое) множество α, что $x \in \alpha$ и $y \notin \alpha$ $((x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha))$.

И, наконец, повторим определения следующих эквивалентностей (см. Ю.Л.Ершов, ТН, с.58, 174-175):

(1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle, \langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\} \cup id\ \omega, \alpha \subseteq \omega$;

(2) $\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \alpha\} \cup id\ \omega, \alpha \subseteq \omega$;

(3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \alpha\}, \alpha \subseteq \omega$ (γ – каноническая нумерация конечных множеств).

Предложение 2.4

Для всякого $\alpha \subseteq \omega$ имеет место:
1. η^α – m-эквивалентность. При этом, ее равномерность равносильна разрешимости α.
2. η_α является m-эквивалентностью тогда и только тогда, когда α разрешимо.

Доказательство.
1. По предложению 2.2 для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^α – *m*-эквивалентность, а по предложению 2.3 ее равномерность влечет разрешимость.
2. Очевидно, что для η_α вычислимая отображаемость класса α в любой другой класс требует разрешимости α, т.к. все η_α-классы (кроме, возможно, класса α) одноэлементны. *Предложение доказано.*

Следствие 2.3

Над η^{α} (как и над η_{α}) представима группа тогда и только тогда, когда α разрешимо.

Предложение 2.5

Всякая пара смежных классов ядра неразрешимой позитивной нумерации любой группы является вычислимо изоморфной (т.е. для любой пары смежных классов ядра существует вычислимая перестановка на ω, индуцирующая перестановку фактор-множества ω/η, переводящая один из этих классов на другой). При этом, существует равномерно эффективно зависящая от x, y процедура построения характеристического индекса вычислимого изоморфизма на ω, являющегося перестановкой на ω/η и переводящего $\{x\}/\eta$ в $\{y\}/\eta$.

Доказательство. Пусть η – ядро неразрешимой позитивной нумерации группы. Согласно теореме 2.1 η – равномерная m-эквивалентность, а по предложению 2.3 все η-классы невычислимы. Для данных x, y найдем перестановку $f_0 \in F$, осуществляющую m-сведение $\{x\}/\eta$ к $\{y\}/\eta$ и построим инъективную функцию g_0, совпадающую с f_0 по модулю η, следующим образом:
Шаг 0. $g_0(0) = f_0(0)$;
Шаг $s+1$. Если $f_0(s+1) \notin \{g_0(0), g_0(1), \dots, g_0(s)\}$, то определим $g_0(s+1) = f_0(s+1)$. В противном случае, перечисляя класс $\{f_0(s+1)\}/\eta$ ищем первое z отличное от всех $g_0(i)$ $(0 \leqslant i \leqslant s)$ и η-эквивалентное $f_0(s+1)$ (а такое z обязательно найдется в силу бесконечности класса $\{f_0(s+1)\}/\eta)$ и полагаем $g_0(s+1) = z$. Конец шага $s+1$.

Следовательно, класс $\{x\}/\eta$ 1-сводится к $\{y\}/\eta$ функцией g_0. Аналогично, найдем $f_1 \in F$, m-сводящую $\{y\}/\eta$ к $\{x\}/\eta$ и построим для нее соответствующую инъективную вычислимую функцию g_1, совпадающую с f_1 по модулю η. Тогда g_1 1-сводит $\{y\}/\eta$ к $\{x\}/\eta$ и, таким образом, классы $\{x\}/\eta$ и $\{y\}/\eta$ лежат в одной 1-степени. Теперь, опираясь на челночный метод доказательства теоремы Майхилла о вычислимой изоморфности 1-эквивалентных множеств, который в нашем случае существенно упрощает позитивная бесконечность всех η-классов, будем строить по шагам конечные множества соответствий вида $\{\langle u_0, v_0\rangle, \ldots, \langle u_s, v_s\rangle\}$ так, что $u_i = u_j \pmod{\eta} \Leftrightarrow v_i = v_j \pmod{\eta}$ и $\forall n \in \omega \exists k, l (n = u_k \wedge n = v_l)$, используя на четных шагах функцию g_0 и на нечетных – g_1. Детали опускаем. Очевидно, что все построения, приведенные в данном доказательстве равномерно зависят от x, y. *Предложение доказано.*

В заключении первой части лекции отметим, что в случае существования группы, представимой над эквивалентностью η, имеется много различных способов задания группы над η. В частности, любой класс эквивалентности может быть интерпретирован как единичный элемент подходящей группы, представимой над η.

Предложение 2.6

Если над η представима группа, то для любого η-класса существует такое представление над η подходящей группы, для которого данный класс будет единицей.

Доказательство. Пусть задана группа $\mathfrak{G} = \langle G; \cdot, ^{-1} \rangle$ с единицей e. Определим трансляцию $\varphi_d = \lambda x.[x \cdot d]$, где d – произвольный фиксированный элемент $d \neq e$. Очевидно, что трансляция φ_d биективна на G. На множестве G определим некоторую структуру с одной бинарной $*$ и одной унарной операцией $[]^{-1*}$ следующим образом: $a * b = ad^{-1}b$; $[a]^{-1*} = da^{-1}d$.

Тогда $\mathfrak{G}^* = \langle G; *, []^{-1*} \rangle$ – группа с единицей d, изоморфная $\mathfrak{G}$, причем φ_d осуществляет изоморфизм из $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}^*$. Действительно, по определению $a * b = ad^{-1}b$, но $\varphi_d^{-1}(a) = ad^{-1}, \varphi_d^{-1}(b) = bd^{-1}$ и $\varphi_d((ad^{-1})(bd^{-1})) = ad^{-1}bd^{-1}d = ad^{-1}b = a * b$. Аналогично, т.к. $\varphi_d^{-1}(a) = ad^{-1}$, то $\varphi_d((ad^{-1})^{-1}) = \varphi_d(da^{-1}) = da^{-1}d = [a]^{-1*}$.
Пусть группа $\langle G; \cdot \rangle$ с единицей e представима над η, т.е. имеет такую нумерацию ν, ядро которой есть η. Зафиксируем любой отличный от единицы элемент $d \in G$ и некоторые ν-номера этого элемента и обратного к d элемента, скажем $\nu(n_0) = d, \nu(n_1) = d^{-1}$. Теперь определим вычислимую функцию $f_d = \lambda x.[x \cdot n_0]$, зададим нумерацию ν_d основного множества группы $\langle G; \cdot \rangle$ такую, что $\nu_d = \nu f_d$, и определим вычислимые операции $* : \nu_d(x) * \nu_d(y) = \nu_d(x \cdot n_1 \cdot y)$ и $[\nu_d(x)]^{-1*} = \nu(n_0 \cdot x^{-1} \cdot n_0)$. Очевидно, что d – единица группы $\langle G; * \rangle$, заданной нумерацией ν_d с ядром η. *Предложение доказано.*

Рассмотрим более подробно равномерные m-эквивалентности, всякие пары смежных классов которых вычислимо изоморфны (т.е. переводятся друг в друга вычислимыми перестановками на ω).

Определение 3.1

Множество назовается вычислимо прошиваемым, если существует вычислимая перестановка без конечных циклов с бесконечным числом орбит, в каждой из которых содержится ровно один элемент этого множества.

Заметим, что согласно определению вычислимо прошиваемое множество как бесконечно, так и кобесконечно.

Если множество α содержит ровно по одному элементу в каждой орбите вычислимой перестановки без циклов f с бесконечным числом орбит, то будем говорить, что f прошивает α (или, что α прошивается f).

3. Вычислимо прошиваемые множества

Для множества α, прошиваемого вычислимой перестановкой f, через $\eta_{\alpha,f}$ обозначим эквивалентность

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,f}} \Leftrightarrow \exists n \in Z(f^n(x) \in \alpha \wedge f^n(y) \in \alpha),$$

которая очевидно является равномерной m-эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.

Предложение 3.1

Всякая вычислимая перестановка без циклов с бесконечным числом орбит является прошивающей для континуума множеств.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.

Предложение 3.2

Всякое вычислимо прошиваемое множество является смежным классом подходящей равномерной m-эквивалентности, всякая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.

Доказательство. Пусть α прошивается вычислимой перестановкой f. Тогда семейство множеств $\{f^n\alpha | n \in Z\}$ – классы однозначно определенной равномерной m-эквивалентности $\eta_{\alpha,f}$. *Предложение доказано.*

Используя неэффективную диагонализацию легко показать существование вычислимо непрошиваемых множеств.

Предложение 3.3

Если перечислимое множество α прошивается вычислимой функцией f, то эквивалентность $\eta_{\alpha,f}$ разрешима.

Доказательство. Действительно, $x = y \pmod{\eta_{\alpha,f}} \Leftrightarrow \exists n \in Z$ $(f^n(x) \in \alpha \wedge f^n(y) \in \alpha)$.

Следствие 3.1

Перечислимое множество вычислимо прошиваемо тогда и только тогда, когда оно бесконечное, кобесконечное и разрешимое.

Доказательство. Вычислимая прошиваемость бесконечного, кобесконечного и разрешимого множества очевидна. Обратное следует из предложения 3.2.

Назовем эквивалентность η вычислимо прошиваемой, если существуют такой ее η-класс α и вычислимая перестановка f, что $\eta_{\alpha,f} = \eta$.

Следствие 3.2

Если (G, ν) – неразрешимая позитивная группа, то ядро $ker(\nu)$ не является вычислимо прошиваемым.

Доказательство. По следствию 3.1 в случае вычислимой прошиваемости ядра нумерации оно разрешимо. *Следствие доказано.*

Напомним, что характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их η-классах (в обозначениях $tr(\eta) = \{x | \forall y (x = y \pmod{\eta} \Rightarrow x \leqslant y)\}$).

Предложение 3.4

Всякое бесконечное, кобесконечное и коперечислимое множество вычислимо прошиваемо.

Доказательство. Пусть α – бесконечное коперечислимое множество с бесконечным дополнением. Рассмотрим такую позитивную эквивалентность η с бесконечными смежными классами, характеристическая трансверсаль которой есть α (о существовании таких эквивалентностей и общих методах их построения см., например, Ю.Л.Ершов, ТН, с. 296). Используя алгоритм перечисления для η можно построить по шагам через конечные аппроксимации такую вычислимую перестановку f на ω, которая тождественна по модулю η и каждый η-класс является f-орбитой. Приведем алгоритм вычисления графика G_f функции f с умеренной степенью детализации.

Через η^s будем обозначать часть эквивалентности η, построенную за s шагов некоторого фиксированного эффективного пересчета η.
Шаг 0. $G_f^0 = \emptyset$, $\eta^0 = \emptyset$.
Шаг s+1. Пусть $C_0, \ldots, C_m$ все нетривиальные классы эквивалентности η^s, каждый из которых является цепью η^s-эквивалентных чисел вида $a_0, f(a_0), \ldots, f^n(a_0)$ (где число a_0 не имеет f-прообраза, а $f^n(a_0)$ не имеет f-образа на шаге s). При этом, число a_0 назовем началом цепи, а $f^n(a_0)$ – ее концом. Упорядочим цепи по их началам. Расширим классы $C_0, \ldots, C_m$ по модулю эквивалентности η^{s+1}. Если цепи были различны на шаге s, а на шаге $s+1$ пересеклись (т.е. какие-то их элементы стали η^{s+1}эквивалентными), то для этих цепей расширяем график G_f^s до G_f^{s+1} так, что концы меньших цепей отображаются функцией f на начала больших (на четных шагах) и концы больших – в начала меньших (на нечетных шагах). Конец шага s+1.
Положим $G_f = \bigcup_{s\in\omega} G_f^s$. Очевидно, что f – вычислимая перестановка, прошивающая множество α. *Предложение доказано.*

3. Вычислимо прошиваемые множества

Покажем, что свойство "быть равномерной m-эквивалентностью" не является достаточным для представимости над эквивалентностью группы.

Пееред формулировкой следующего утверждения введем некоторые понятия. Для заданной эквивалентности η построим топологическое пространство $[\eta]_{comp}$, базой открытых множеств которого является семейство всех η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств. Эту топологию будем называть отделимой (T_1-отделимой, хаусдорфовой, регулярной и т.д.), если таковым является пространство $[\eta]_{comp}$. Замечательным свойством этой топологии является тот факт, что если универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ представима над η, то все ее операции, поддерживаемые подходящими вычислимыми функциями в естественной проектирующей нумерации $\nu(x) = \{x\}/\eta$, непрерывны в этой топологии, что было доказано нами ранее. Заметим также, что морфизм двух нумерованных систем также является непрерывным отображением.

Если вычислимо прошиваемая эквивалентность позитивна, то по предложению 3.3 она разрешима и над ней, очевидно, представима группа. Покажем, что существует вычислимо прошиваемая эквивалентность низкой алгоритмической сложности, над которой не представима никакая группа.

Теорема 3.1

Существует вычислимая перестановка, являющаяся m-сводящей для такой равномерной m-эквивалентности, над которой не представима никакая группа.

Доказательство. В [2] построен пример такого множества α, вычислимо прошиваемого подходящей вычислимой перестановкой f на ω, что топологическое пространство $[\eta_{\alpha,f}]_{comp}$ является T_1-отделимым, но не хаусдорфовым.

[2] N.Kh. Kasymov, Recursively separable enumerated algebras, Russian Math. Surveys, **51**:3 (1996), 509–538.

Более того, не существует двух непустых непересекающихся перечислимых $\eta_{\alpha,f}$-замкнутых множеств. Хорошо известно, что если топологическая группа T_1-отделима, то она T_2-отделима, т.е. хаусдорфова. Поэтому, если бы над $\eta_{\alpha,f}$ была представима группа, то пространство $[\eta_{\alpha,f}]_{comp}$ было бы хаусдорфовым (заметим, что ключевым моментом является непрерывность групповых операций относительно введенной топологии). Таким образом, над неразрешимой равномерной m-эквивалентностью $\eta_{\alpha,f}$ не представима никакая группа. *Теорема доказана.*

Отметим, что алгоритмическая сложность эквивалентности $\eta_{\alpha,f}$ из теоремы 3.1 находится в классе Π^0_2; более точно, она является эффективно T_1-отделимой, т.е. существует такое эффективное семейство S перечислимых $\eta_{\alpha,f}$-замкнутых множеств, что для любых $x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,f}}$ найдутся такие $\sigma_0, \sigma_1 \in S$, что
$\{x\}/\eta_{\alpha,f} \subseteq \sigma_0 \wedge \{y\}/\eta_{\alpha,f} \cap \sigma_0 = \emptyset$ и
$\{y\}/(\eta_{\alpha,f}) \subseteq \sigma_1 \wedge \{x\}/(\eta_{\alpha,f}) \cap \sigma_1 = \emptyset$.

Напомним (Ю.Л.Ершов, ТН), что $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \bigtriangleup \gamma_y \subseteq \alpha\}, \alpha \subseteq \omega$ (γ – каноническая нумерация конечных множеств).

Теорема 4.1

Для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^*_α является вычислимо отделимой m-эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна. При этом, если α коперечислимо, то эквивалентность η^*_α является негативной и равномерной.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_{x,y}$ множество γ-номеров всех конечных расширений множества γ_x вне $\gamma_y \setminus \gamma_x$, т.е. $\Gamma_{x,y} = \{z | \gamma_x \subseteq \gamma_z \wedge (\gamma_y \setminus \gamma_x) \cap \gamma_z = \emptyset\}$. Например, $\Gamma_{x,0}$, где $\gamma_x \neq \emptyset, \gamma_0 = \emptyset$ – есть совокупность канонических индексов всех конечных расширений множества γ_x, а $\Gamma_{0,x}$ – множество номеров всех конечных множеств, не пересекающихся с γ_x.

Покажем, что η^*_α вычислимо отделима для любого α. Действительно, пусть $x \neq y \pmod{\eta^*_\alpha}$. Выберем такие x_0, y_0, что $\gamma_x \setminus \alpha = \gamma_{x_0} \setminus \alpha, \gamma_y \setminus \alpha = \gamma_{y_0} \setminus \alpha$ и $\gamma_{x_0}, \gamma_{y_0} \subseteq \omega \setminus \alpha$, т.е. x_0, y_0 – γ-номера множеств, целиком лежащих в $\omega \setminus \alpha$. Легко проверить, что Γ_{x_0,y_0} – η^*_α-замкнутое вычислимое множество, содержащее x и не содержащее y.

Перейдем к построению требуемой перестановки $f_{x,y}$. Для данных $x \neq y \pmod{\eta^*_\alpha}$ таких, что $\gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \smallsetminus \alpha$, построим множества (их характеристические индексы) $\Gamma_{x,y}, \Gamma_{y,x}$ и установим вычислимое взаимно однозначное соответствие между ними следующим образом. Для каждого $z \in \Gamma_{x,y}$ найдем такое u, что $\gamma_u = \gamma_z \smallsetminus \gamma_x$ и определим $\gamma_v = \gamma_u \cup \gamma_y$. Тогда $v \in \Gamma_{y,x}$. Полагаем $f_{x,y}(z) = v$ и $f_{x,y}(v) = z$. На всех числах из $\omega \smallsetminus (\Gamma_{x,y} \cup \Gamma_{y,x})$ положим $f_{x,y}$ тождественной.

Покажем, что $f_{x,y}$ есть функция, согласованная с η^*_α, действующая как бесконечное множество циклов длины 2 на $\Gamma_{x,y} \cup \Gamma_{y,x}$. Пусть $z_1 \in \Gamma_{x,y}$ и $f_{x,y}(z_1) = p_1$. Тогда однозначно определено такое u_1, что $\gamma_{u_1} = \gamma_{z_1} \setminus \gamma_x$ и $\gamma_{p_1} = \gamma_y \cup \gamma_{u_1}$, причем множество γ_{u_1} не пересекается с γ_y. Для $z_2 \in \Gamma_{x,y}$ существуют однозначно определенные соответствующие u_2, p_2. Теперь, если $z_1 = z_2 \pmod{\eta^*_\alpha}$, то $\gamma_{z_1} \setminus \alpha = \gamma_{z_2} \setminus \alpha$, т.е. $\gamma_{u_1} \setminus \alpha = \gamma_{u_2} \setminus \alpha$. Поэтому $p_1 = p_2 \pmod{\eta^*_\alpha}$. Инъективность $f_{x,y}$ очевидна. Биективность следует из того, что всякого $p \in \Gamma_{y,x}$ существует такое единственное u (а именно, $\gamma_p = \gamma_y \cup \gamma_u$), что $f_{x,y}(z) = p$, где $\gamma_z = \gamma_x \cup \gamma_u$. Аналогично показывется корректность $f_{x,y}$ на аргументах из $\Gamma_{y,x}$. Таким образом, $f_{x,y}$ – вычислимая перестановка на ω, индуцирующая перестановку на ω/η^*_α, которая переводит класс $\{x\}/\eta^*_\alpha$ в класс $\{y\}/\eta^*_\alpha$.

Негативность η^*_α при коперечислимости α очевидна. Т.к. множество всех минимальных (в содержащих их классах) элементов эквивалентности перечислимо, то для каждой пары чисел $\langle x, y\rangle$, таких что $\gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha$ применяем описанную выше процедуру и получим вычислимое семейство $\{f_{x,y} | \gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha\}$ вычислимых перестановок с требуемым свойством, т.е. η^*_α является равномерной m-эквивалентностью, всякие два класса которой вычислимо изоморфны. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1

Для любого α над η^*_α представима решетка, изоморфная подрешетке решетки всех конечных подмножеств некоторого множества.

Доказательство. Нетривиальным является случай кобесконечного α. Для любых $x, y \in \omega$ определим $x \sqcup y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cup \gamma_y), x \sqcap y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cap \gamma_y)$. Согласованность введенных операций с η^*_α, существование точных верхних и нижних граней, а также наличие наименьшего элемента очевидны. *Следствие доказано.*

Любая группа без кручения, имеющая вычислимую копию, обладает неразрешимой негативной нумерацией (см.[3]). В связи с этим возникает вопрос:

"Представима ли группа над эквивалентностью η_α^* для некоторого коперечислимого неразрешимого α"?

Напомним, что позитивная эквивалентность η называется совершенной, если не существует нетривиальных η-замкнутых вычислимых множеств.

Далее решетка понимается как алгебра (в сигнатуре $\langle \sqcup, \sqcap \rangle$).

Предложение 4.1

Существует такая позитивная эквивалентность, над которой не представима никакая верхняя (нижняя) полурешетка.

[3] B.M. Khoussainov, T. Slaman, P. Semukhin, $\prod_1^0$-presentasions of algebras, Archive for Mathematical Logic, **45**:6 (2006), 769–781.

Доказательство. Пусть η – совершенная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Примеры таких эквивалентностей можно найти в Ю.Л.Ершов, ТН. Там же приведен пример такой эквивалентности η, что всякая n-местная вычислимая функция, согласованная с η действует на фактор-множестве ω/η либо как константа, либо как проектирующая. Предположим, что бинарная вычислимая операция f представляет операцию взятия точной верхней (нижней) грани на ω/η. Тогда индуцированный f позитивный частичный порядок $x \leqslant_\eta y \Leftrightarrow f(x,y) = y \pmod{\eta}$ не может быть линейным (почему? – упражнение) и потому имеется два $\leqslant_\eta$-несравнимых η-класса, скажем $\{k\}/\eta$ и $\{l\}/\eta$. Рассмотрим трансляцию $t = \lambda x.[f(x,k)]$. Тогда, в силу идемпотентности $t(k) = k \pmod{\eta}$, но $t(l) \neq k \pmod{\eta} \wedge t(l) \neq l \pmod{\eta}$ и одноместная вычислимая функция t оказывается как не константой, так и не проектирующей (тождественной). Противоречие. *Предложение доказано.*

Предложение 4.1 порождает принципиальный вопрос:

"Над всякой ли негативной эквивалентностью представима решетка как алгебра"?

Определение 4.1

Граф $\langle \Gamma; P\rangle$ *называется позитивно (негативно) представимым над эквивалентностью* η, *если существует такая его нумерация* ν, *что* $ker(\nu) = \eta$ *и множество* $\{\langle x, y\rangle | \langle \nu x, \nu y\rangle \in P\}$ *перечислимо (коперечислимо).*

Заметим, что в этом определении на сложность η не налагаются никакие ограничения.

Теперь под словом решетка будем понимать частично упорядоченное множество.

Предложение 4.2

(a) Над любой негативной эквивалентностью негативно представим линейный порядок.
(b) Над всякой позитивной эквивалентностью позитивно представима решетка, однако существует такая позитивная эквивалентность, над которой позитивно не представим никакой линейный порядок.

Доказательство.

(a) В [4] показано, что над всякой негативной эквивалентностью с бесконечным множеством смежных классов негативно представим плотный линейный порядок и, тем более, решетка (как частичный порядок).

[4] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, Negative dense linear orders, Sib. Math. J., **58**:6 (2017), 1015–1033.

(b) Пусть η – позитивная эквивалентность с не менее чем двумя η-классами, которые мы зафиксируем, скажем α, β. Тогда порядок $\alpha \times \omega \cup \omega \times \beta \cup \eta$ есть позитивная решетка с нулем (α), единицей (β) и множеством остальных попарно несравнимых между собой по модулю η элементов. Существование позитивной эквивалентности, над которой позитивно не представим никакой линейный порядок показано в упомянутой в п. (a) доказательства текущей теоремы работе. *Предложение доказано.*

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

В этом разделе лекции мы рассмотрим свойства эквивалентностей, являющихся ядрами нумераций колец, полей и универсальных алгебр с некоторыми условиями типа конечности на решетки их конгруэнций (простых и подпрямо неразложимых), а также возможности представимости над эквивалентностями более широких классов систем, каковыми являются, в частности, полугруппы.
Т.к. понятие кольца включает в себя подпонятие своей аддитивной коммутативной группы, то ядро нумерации любого кольца является равномерной m-эквивалентностью. Тем более это касается тел и полей. Поэтому все общие результаты, сформулированные для групп в предыдущих разделах, справедливы и для любых колец.
Известно ([5]), что над любой негативной эквивалентностью представимы как конечно порожденные, так и конгруэнц-простые универсальные алгебры.

[5] N.Kh. Kasymov, Algebras over negative equivalences, Algebra and logic, **33**:1 (1994), 46–48.

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Представимость же конгруэнц-простой алгебры над позитивной эквивалентностью равносильна ее разрешимости. Вместе с тем, если эквивалентность (не обязательно позитивная – любая!) имеет, к примеру, гипериммунную характеристическую трансверсаль, то всякая представимая над ней алгебра конечной сигнатуры локально конечна. Если позитивная эквивалентность не является вычислимо отделимой, то решетка конгруэнций всякой представимой над ней универсальной алгебры континуальна. Оба этих факта мы доказывали ранее (лекция No 6). Отметим, что характеристическая трансверсаль негативной эквивалентности вычислимо перечислима, в то время как для позитивной эквивалентности она вполне может быть гипериммунной. В свете этих фактов, с точки зрения представимости богатых классов систем над эквивалентностями, негативные эквивалентности можно трактовать как более приоритетные относительно позитивных.

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Следующие важные классы универсальных алгебр подтверждают сказанное.
Унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение 5.1

Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.

Очевидно, что всякая трансляционно полная алгебра является конгруэнц-простой. Обратное неверно. Классический пример трансляционно полной алгебры – любое тело. Ввиду важности данного факта повторим его доказательство, приведенное в лекции No 3.

В самом деле, пусть $a \neq b$ и $c \neq d$ – фиксированные элементы тела $\Re$, $T(a)$ – множество всех трансляций вида $\{\lambda x.[r(x-a)+c] | r \in \Re\}$. Тогда любая трансляция из $T(a)$ переводит элемент a в c, но единственная трансляция из $T(a)$, а именно
$t(x) = (d-c)(b-a)^{-1}(x-a)+c$ (при $r = (d-c)(b-a)^{-1}$) переводит элемент b в d, т.е. трансляция $t(x)$ осуществляет перевод пары $\langle a, b\rangle$ в пару $\langle c, d\rangle$.

Определение 5.2

Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара различных ее элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.

Фактически из определения следует, что всякая трансляционно предполная алгебра является подпрямо неразложимой. Обратное неверно.

Определение 5.2 существенно шире определения 5.1. Простейший пример нетривиальной трансляционно предполной не простой алгебры – алгебра предшествования $P = \langle \omega; p \rangle, p(0) = 0, p(n+1) = n$.

Для множества $\alpha \subseteq \omega$ и эквивалентности η через $[\alpha]_\eta$ обозначим η-замыкание множества α (т.е. наименьшее η-замкнутое расширение α). Будем говорить, что число x является η-отвергаемым множеством α, если $x \notin [\alpha]_\eta$. Легко понять, что для любой негативной эквивалентности η отношение "число x является η-отвергаемым конечным множеством δ" – перечислимое и равномерно зависящее от x, δ (можно считать, что δ задано своим каноническим индексом или дано в явном виде). Если ясно о какой эквивалентности η идет речь, то будем говорить, что x отвергается δ.

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Теорема 5.1

Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная универсальная алгебра.

Доказательство. Пусть η – негативная эквивалентность. Если характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ конечна, то η разрешима и доказывать нечего. Поэтому предполагаем, что $tr(\eta) = \{t_0, t_1, \dots\}$ бесконечна. Заметим, что $tr(\eta)$ перечислима, т.к. $x \in tr(\eta) \Leftrightarrow \forall z < x(z \neq x \pmod{\eta})$. Покажем, что для любой пары $x \neq y \pmod{\eta}$ существует разрешимое η-замкнутое множество, отделяющее x, y и, более того, это множество равномерно строится по данным x, y.

Шаг 0. $A_x^0 = \{x\}, A_y^0 = \{y\}$.
Шаг $s+1$. Пусть z – наименьшее натуральное число, не принадлежащее $A_x^s \cup A_y^s$. Проверяем z на предмет его отвержения хотя бы одним из множеств A_x^s, A_y^s. Если z отвергается A_x^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s, A_y^{s+1} = A_y^s \cup \{z\}$; если x отвергается A_y^s, то $A_x^{s+1} = A_x^s \cup \{z\}, A_y^{s+1} = A_y^s$. Если z отвергается обоими множествами, то относим его к A_x^{s+1}. Конец шага $s+1$.
Определим

$$A_x = \bigcup_{s \in \omega} A_x^s, A_y = \bigcup_{s \in \omega} A_y^s.$$

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг заканчивается с отнесением текущего тестируемого натурального числа к одному из двух множеств, а также тот факт, что $[A_x^s]_\eta \cap [A_y^s]_\eta = \emptyset$ для любого шага s. Поэтому перечислимые A_x, A_y не пересекаются, являются η-замкнутыми и их объединение покрывает все ω. Равномерная зависимость индексов характеристических функций A_x, A_y от x, y очевидна.
Теперь для каждой пары $\langle x, y \rangle$ различных по модулю η чисел построим вычислимое семейство трансляций $T_{x,y} = \{f_{x,y,m,n} | m, n \in \omega\}$ следующим образом:

$$z \in A_x \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_m; z \in A_y \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_n,$$

где $t_m, t_n \in tr(\eta), m \neq n$.

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Наконец, определим вычислимое семейство трансляций

$$T = \bigcup_{x \neq y \pmod{\eta}} T_{x,y}.$$

Очевидно, что любая трансляция $f \in T$ согласована с η, т.е. $x = y \pmod{\eta} \Rightarrow f(x) = f(y) \pmod{\eta}$ и потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; T \rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; T \rangle$ по конгруэнции η. Т.к. для любой пары различных по модулю η чисел x, y и любых различных $t_m, t_n \in tr(\eta)$ найдется трансляция из T, переводящая x в t_m и y в t_n, то алгебра $\langle \omega/\eta; T \rangle$ трансляционно полна. *Теорема доказана.*

Следствие 5.1

Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно предполная универсальная алгебра.

Замечание 5.1. Негативные нумерации, как уже отмечалось выше, представляются в определенном смысле не менее естественными, чем позитивные. Так, например, простейшая группа целых чисел по сложению $\langle Z; +\rangle$ имеет неразрешимые негативные нумерации, хотя она устойчива относительно позитивных представлений; любое бесконечное поле, имеющее вычислимую копию (как отмечалось ранее), также имеет неразрешимую негативную нумерацию, в то время как всякое позитивное представление любого поля является разрешимым.

Напомним следующий важный факт с доказательством (лекция No 3).

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Предложение 5.1.

Всякая T_2–отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.

Доказательство. По условию имеются два элемента a, b алгебры, в которую трансляционно отображается любая другая пара различных элементов. Если μ – T_2-отделимая нумерация, то

$$\mu x \neq \mu y \Leftrightarrow \exists t \in T(z)[t(x) \in \mu^{-1}(a) \wedge t(y) \in \mu^{-1}(b)],$$

где $\mu^{-1}(a), \mu^{-1}(b)$ имеют непересекающиеся μ-перечислимые окрестности. *Предложение доказано.*

Следствие 5.2

Всякая позитивная нумерация трансляционно предполной алгебры является разрешимой.

Следствие 5.3

Никакая трансляционно предполная универсальная алгебра не представима ни над какой не негативной эквивалентностью, каждый смежный класс которой перечислим.

Доказательство. В противном случае, по предложению 5.1, ввиду очевидной T_2-отделимости (даже дискретности) соответствующего пространства, следует негативность ядра представления. *Следствие доказано.*

В частности, никакая трансляционно предполная универсальная алгебра не представима ни над какой неразрешимой позитивной эквивалентностью.

5. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

Рассмотрим более широкие семейства классических систем.
Будем называть функцию $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ согласованной с эквивалентностью η, если η – конгруэнция алгебры $\langle \omega; f \rangle$. Как обычно, функция $C_m^n : \omega^n \longrightarrow \omega$, с областью значений $\{m\}(m \in \omega)$, называется константой, а $I_m^n : \omega^n \longrightarrow \omega$, где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\forall \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n (I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m)$ – проектирующей функцией.
Обозначим

$$U = \bigcup_{m,n \in \omega} \{C_m^n\} \cup \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant n, n \in \omega} \{I_m^n\}.$$

Очевидно, что любая функция согласована с двумя эквивалентностями – нулевой ($id\ \omega$) и единичной ($\{\langle x, y \rangle | x, y \in \omega\}$). Ясно также, что всякая U-функция согласована с любой эквивалентностью над ω.

Предложение 5.2

Над любой эквивалентностью представима коммутативная полугруппа.

Доказательство. Определим умножение на ω как C_m^2, где m – любое фиксированное натуральное число. Тогда операция C_m^2 вычислима и очевидно согласована с любой эквивалентностью η на ω, а потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; C_m^2 \rangle$ вычислимой коммутативной полугруппы $\langle \omega; C_m^2 \rangle$, т.е. полугруппа $\langle \omega; C_m^2 \rangle$ представима над η. *Предложение доказано.*

Заметим, что в качестве полугруппового умножения взять и I_1^2, но тогда полугруппа не будет коммутативной.

Предложение 5.3

Для любого $\alpha \subseteq \omega$ над эквивалентностью η_α^* представима коммутативная полугруппа с единицей.

Доказательство. Определим операцию умножения $*$: $x * y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cup \gamma_y)$. Легко проверить, что $*$ согласована с η_α^* для любого $\alpha \subseteq \omega$. Единицей данной коммутативной полугруппы будет η_α^*-класс, порожденный всеми α-расширениями пустого множества, т.е. $\varepsilon = \{x | \gamma_x \subseteq \alpha\}$. *Предложение доказано.*

Предложение 5.4

Существует позитивная эквивалентность, над которой не представима никакая полугруппа с единицей.

Доказательство. Пусть η – упоминавшаяся выше совершенная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Тогда всякая вычислимая функция, согласованная с η, действует на фактор-множестве ω/η либо как константа, либо как проектирующая. Поэтому, если над η представима полугруппа с единицей e и умножением $*$, то это умножение действует на ω/η либо как константная, либо как проектирующая операция. Если $*$ действует как константа, то обозначим через c такой элемент полугруппы, что $\forall a, b(a * b = c)$. Тогда $\forall a(e * a = a * e = a = c)$, что невозможно в нетривиальной полугруппе.
Пусть $*$ действует как проектирующая, т.е. либо подобно I_1^2, либо как I_2^2. В первом случае $\forall a(e = e * a)$ (т.к. $*$ действует как I_1^2), но, в то же время $\forall a(e * a = a)$ (т.к. e – единица полугруппы). Поэтому $\forall a(e = a)$, что возможно лишь для одноэлементного моноида. Случай I_2^2 рассматривается аналогично. *Предложение доказано.*

Заметим, что если рассматривать полугруппы не с двусторонними, а с левыми (правыми) единичными элементами, то имеет место

Предложение 5.5

Над любой эквивалентностью представима полугруппа с левой (правой) единицей.

Доказательство. В самом деле, если принять в качестве группового умножения операцию I_2^2, то любой элемент полугруппы будет являться левой единицей. Аналогично, для операции I_1^2 всякий элемент будет правой единицей. *Предложение доказано.*

В заключение скажем несколько слов о возможности применения изложенных выше результатов в теории степеней алгоритмических представлений систем, представляющей интерес в рамках подхода теоретической информатики к проблеме математического уточнения понятия алгоритмической реализации модели данных.
Пусть $\mathbb{G}_p$ – класс позитивно представимых бесконечных групп, Σ – множество всех бесконечных позитивных эквивалентностей и $K_G(\eta)$ – класс всех групп, представимых над эквивалентностью η. На Σ определим следующий предпорядок:

$$\eta_0 \leqslant_{G_p} \eta_1 \leftrightharpoons \forall G \in \mathbb{G}_p[G \in K_G(\eta_0) \Rightarrow G \in K_G(\eta_1)].$$

Симметричное замыкание предпорядка $\leqslant_{G_p}$ разбивает множество Σ на классы $\equiv_{G_p}$-эквивалентности и на фактор-множестве $\Sigma/\equiv_{G_p}$ порождается частичный порядок $D_{G_p} = \langle \Sigma/\equiv_{G_p}; \leqslant_{G_p} \rangle$, в котором через $\leqslant_{G_p}$ обозначен и частичный порядок на фактор-множестве, индуцированный действием $\leqslant_{G_p}$ на Σ. Корректность такого перехода при факторизации очевидна.

Неформально, $\eta_0 \leqslant_{G_p} \eta_1$ означает, что всякая группа, представимая над η_0 является представимой и над η_1, а структура частичного порядка D_{G_p} отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения соотношений между реализуемыми над ними классами групп. Отметим, что любая группа из $\mathbb{G}_p$ определяется некоторым $\equiv_{G_p}$-классом. Элементы D_{G_p} будем называть степенями позитивной представимости групп. Отметим, что степени представимости конечных систем образуют изолированные точки в структуре частично упорядоченного множества степеней и, с точки зрения дескриптивной теории вычислимости, представляют "вырожденный случай". Поэтому мы рассматриваем все степени представимости в контексте отсутствия степеней, порожденных конечными эквивалентностями.
Например, из теоремы 2.1 следует, что все вычислимо перечислимые эквивалентности, не являющиеся m-равномерными лежат в одной $\equiv_{G_p}$-степени, являющейся наименьшей относительно $\leqslant_{G_p}$ и определяющей пустой класс групп.

Однако, из теоремы 3.1 вытекает, что в этой же степени находятся и некоторые равномерные m-эквивалентности.
Аналогично, рассматривая класс негативно представимых бесконечных групп $\mathbb{G}_n$ и множество всех бесконечных негативных эквивалентностей Π получаем структуру степеней негативной представимости групп $D_{G_n} = \langle \Pi / \equiv_{G_n}; \leqslant_{G_n} \rangle$. Можно рассматривать более широкие классы $\mathbb{SG}_p$ ($\mathbb{SG}_n$) позитивно (негативно) представимых бесконечных полугрупп и соответствующие множества степеней позитивной (негативной) представимости для классов полугрупп. При этом, $\equiv_{G_p}$-степени представлений групп будут, вообще говоря, "распадаться" для представлений полугрупп, т.е. $\equiv_{SG_p} \subseteq \equiv_{G_p}$, т.к. одинаковые $\equiv_{G_p}$-степени для групп могут быть различными для более широкого класса полугрупп (при рассмотрении групп в сигнатуре с одной бинарной групповой операцией).

6. Степени представимости

На настоящий момент относительно изучена ситуация для степеней позитивной и негативной представимости линейных порядков. Так, для структуры D_{L_p} степеней позитивной представимости линейных порядков доказана ее бесконечность, существование несравнимых степеней, отсутствие наибольшего элемента, наличие степени, определяющей пустой класс линейных порядков и т.д. (см. [6]). Строение же структуры D_{L_n} степеней негативной представимости линейных порядков оказалось совершенно иным – она также бесконечна, но имеет наибольший элемент, при этом всякая степень определяет достаточно богатый класс линейных порядков представимых над любой эквивалентностью из этой степени и т.д. (см. [7]).

---

[6] E.B. Fokina, B.M. Khoussainov, P. Semukhin, D. Turetskiy, Linear orders realized by c.e. equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, **81**:2 (2016), 463–482.

[7] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, S.K.Zhavliev, Structures of degrees of negative representations of linear orders, Russian Mathematics, **65**:12 (2021), 27-46.

Для групп, полугрупп и колец ситуация не изучена. Самая простейшая ситуация – для степеней позитивной представимости полей D_{F_p}.

Предложение 6.1

Частично упорядоченное множество степеней позитивной представимости бесконечных полей двухэлементно и изоморфно типу ординала 2.

Доказательство. В самом деле, любая неразрешимая позитивная эквивалентность лежит в степени позитивной представимости, которая определяет пустой класс полей, т.к. над такой эквивалентностью не представимо поле. С другой стороны, над любой разрешимой бесконечной эквивалентностью представимо всякое бесконечное поле, обладающее вычислимой копией. *Предложение доказано.*

О структуре D_{G_p} степеней позитивной представимости групп имеет место почти тривиальное

Предложение 6.2

Частично упорядоченное множество степеней позитивной представимости бесконечных групп имеет не менее трех элементов, два из которых несравнимы.

Доказательство. Все эквивалентности не являющиеся m-равномерными (и даже некоторые равномерные m-эквивалентности) образуют наименьшую степень d_0 в D_{G_p}. С другой стороны, степень d_1, содержащая $\eta_1 = id\ \omega$, определяет устойчивую относительно позитивных нумераций простейшую группу $G_1 = \langle Z; + \rangle$. Теперь, если d_2 – степень, содержащая неразрешимую эквивалентность η_2, являющуюся ядром представления некоторой конечно порожденной группы G_2, то $G_1 \in K_G(\eta_1) \setminus K_G(\eta_2) \wedge G_2 \in K_G(\eta_2) \setminus K_G(\eta_1)$, т.е. $\eta_1 \not\leq_{G_p} \eta_2$ и $\eta_2 \not\leq_{G_p} \eta_1$. *Предложение доказано.*

6. Степени представимости

Другие естественные вопросы, касающиеся строения структуры степеней представлений указанных выше систем, открыты. Например, является ли структура D_{G_p} бесконечной?
Кажется целесообразным и разумным ввести еще одну естественную структуру степеней, содержащую как позитивные, так и негативные степени – класс эффективно отделимых алгебраических систем, которые лежит в классе Π^0_2, но не содержит Δ^0_2. Этот класс представляется естественным в рамках и с точки зрения Theoretical Computer Science, т.к. он лежит допустимо низко в арифметической иерархии и, в то же время, содержит в себе важнейшие нижние классы – $\Sigma^0_1 \bigcup \Pi^0_1$. Поэтому вопрос о строении структуры степеней эффективно отделимых групп D_{G_E} может представлять интерес с точки зрения теоретической информатики. И не только групп.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!