УДК 514.765.1

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. I. НЕРАЗРЕШИМЫЙ СТАБИЛИЗАТОР

Н.П. Можей

Аннотация

В работе представлена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих нормальную связность. В статье рассмотрен только случай неразрешимой группы Ли преобразований с неразрешимым стабилизатором. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. В работе использован алгебраический подход для описания связностей, методы теорий групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств.

Ключевые слова: нормальная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан в своих лекциях в Сорбонне в 1926–1927 гг. (см. [1]). Многообразия с нулевым кручением (то есть плоской нормальной связностью) исследовали почти одновременно Д.И. Перепелкин [2, 3] и Ф. Фабрициус-Бьерре [4], а также Э. Картан. Итоги этих исследований подведены в монографии Б. Чена [5]. Ряд исследований посвящен общим вопросам нормальных связностей, их интересную характеристику дал Номидзу [6]. Среди трехмерных однородных пространств широкий класс образуют однородные пространства с неразрешимой группой преобразований. Первыми классификацию таких пространств провели Морозов и его студент в [7], правда, не были указаны необходимые и достаточные условия эквивалентности различных действий. В настоящей работе рассмотрены трехмерные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, допускающие нормальную связность. Пространства с разрешимым стабилизатором будут рассмотрены в 2-й части статьи.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $(M, \overline{G})$ – однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$ (см., например, [8]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ в $\mathrm{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\overline{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (\operatorname{Ad} s)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x,y]+\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [9]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} T_3{}^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$$

для всех $x, y \in \bar{g}$. Переформулируем теорему Вана [10] об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \cdots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ была введена в римановом случае Б. Костантом [11] и использовалась А. Лихнеровичем [12] и Г. Ваном [10] в более общей ситуации. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Будем говорить, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

Опишем пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$, для определенности обозначим его $\{u_1, u_2, u_3\}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [13], здесь d – размерность подалгебры, а n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность на однородном пространстве через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, а параметр обозначен λ, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ не сопряжены друг другу.

Для нахождения изотропно-точных пар коразмерности 3 нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности).

Лемма 1. *Любая неразрешимая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ *сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:*

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 3}$

$$3.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{array}}\,;\quad 4.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{array}}\,;\quad 5.\ \boxed{\begin{array}{ccc} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{array}}\,;$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 4}$

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & \\ u & y & \\ & & \end{array}}\,;\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc} \lambda x + y & z & \\ u & \lambda x - y & \\ & & x \end{array}}\,;\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x+y & z & \\ u & x & z \\ & u & x-y \end{array}}\,;\quad 5.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{array}}\,;$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 5}$

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & \\ v & y & \\ & & z \end{array}}\,;\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & v \\ z & -x & u \\ & & \end{array}}\,;\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc} & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \end{array}}\,;$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 6}$

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & w \\ u & y & v \\ & & \end{array}}\,;\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc} \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & & x \end{array}}\,;\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc} & v & w \\ & x & z \\ & y & u \end{array}}\,;\quad 4.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & v & w \\ & \lambda x + y & z \\ & u & \lambda x - y \end{array}}\,;$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 7}$ $\qquad$ $\underline{\dim \mathfrak{g} = 8}$ $\qquad$ $\underline{\dim \mathfrak{g} = 9}$

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{array}}\,;\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \end{array}}\,.\qquad 1.\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & v \\ w & y-x & u \\ t & s & -y \end{array}}\,.\qquad 1.\ \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ – неразрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Тогда $\mathfrak{g}$ содержит полупростую подалгебру Леви $\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. Любая полупростая подалгебра в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ сопряжена одной из следующих подалгебр:

$$(i)\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{array}}\,;\quad (ii)\ \boxed{\begin{array}{ccc} & x & y \\ -x & & z \\ -y & -z & \end{array}}\,;\quad (iii)\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{array}}\,;\quad (iv)\ \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}).$$

Подалгебры (ii) и (iii) максимальны в $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. Поэтому если $\mathfrak{a}$ сопряжена подалгебре (ii) или (iii), то $\mathfrak{g}$ имеет одну из форм 3.4, 3.5, 4.3, 4.5.

Если подалгебра $\mathfrak{a}$ сопряжена $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$.

Рассмотрим подробнее случай, когда $\mathfrak{a}$ сопряжена подалгебре (i). Тогда $\mathfrak{a}$-модуль $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ – прямая сумма изотипных компонент: $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где модули $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ в подходящем базисе имеют вид

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\};\quad \mathfrak{m}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & w \\ s & t & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t, v, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Так как $\mathfrak{g}$ – подмодуль $\mathfrak{a}$-модуля $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, то $\mathfrak{g}$ – прямая сумма пересечений: $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}) \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1) \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_2)$.

Если $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_2 = \{0\}$, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}_1$. Поэтому $\mathfrak{g}$ – редуктивная подалгебра. Заметим, что подмодуль $\mathfrak{m}_1$ является инвариантным относительно сопряжений, сохраняющих подалгебру $\mathfrak{a}$, то есть подалгебра $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{array}{rll} \text{при } \mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}_1 = \{0\} & \mathfrak{g} \text{ сопряжена} & 3.3. \\ \text{при } \dim(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}_1) = 1 & \mathfrak{g} \text{ сопряжена} & 4.1 \text{ или } 4.2. \\ \text{при } \dim(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}_1) = 2 & \mathfrak{g} \text{ сопряжена} & 5.1. \end{array}$$

Поскольку $\mathfrak{m}_2$, как и подмножество в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порождает алгебру Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, имеем, что $\mathfrak{g} \not\supset \mathfrak{m}_2$. Тогда $\mathfrak{a}$-модуль $\mathfrak{m}_2$ – прямая сумма двух изоморфных простых подмодулей $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$, где

$$\mathfrak{n}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; v, w \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{n}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

определим изоморфизм $\pi : \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{n}_2$ как

$$\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{g} \neq \{0\}$, то

$$\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{g} = (\alpha + \beta\pi)(\mathfrak{n}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha x \\ 0 & 0 & \alpha y \\ -\beta y & \beta x & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Однако если $\alpha\beta \neq 0$, то множество $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{g}$ порождает всю алгебру Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. Поэтому $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Тогда $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_2$ – нильпотентный радикал в $\mathfrak{g}$. В подходящем базисе он имеет вид

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{или} \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Так как $\mathfrak{g} \subset N(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_2)$, для случаев $a)$ и $b)$ имеем

$$a)\ \mathfrak{g} \subset \boxed{\begin{matrix} x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \end{matrix}}\,; \quad b)\ \mathfrak{g} \subset \boxed{\begin{matrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{matrix}}\,.$$

Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из алгебр Ли 5.2, 5.3, 6.1–6.4, 7.1, 7.2. $\square$

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары.

Лемма 2. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа* 3.3 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

,

2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

,

3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

.

Доказательство. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Заметим, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Имеем $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2.$$

Поэтому $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, видим, что $a_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_2$, а $\alpha_3 \gamma_2 = 0$. Рассмотрим следующие случаи:

1°. $\alpha_3 = \gamma_2 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$.

2°. $\alpha_3 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$. Тогда отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i,\ i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_3} u_3,$$

показывает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$.

3°. $\alpha_3 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i,\ i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \gamma_2 u_3,$$

показывает, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ эквивалентны.

Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, мы видим, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ неэквивалентны. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, заключаем, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ неэквивалентны. Поскольку $Z\bar{\mathfrak{g}}_2 = \mathbb{R}u_3$ и $Z\bar{\mathfrak{g}}_3 = 0$, заключаем, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ неэквивалентны. □

Заметим, что у пары 3.3.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{-2u_2,\ -2u_1,\ u_3\},$ $\{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$, $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.3.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{u_3, -u_2, u_1\}, \{2e_2 + 2u_1 + u_3, -2e_3, e_1 - u_2\}\}$, у пары 3.3.3 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{-2u_2, -2u_1, u_3\}, \{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$.

Лемма 3. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа* 3.4 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0

,

2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

,

3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

.

Доказательство. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Таким образом,

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2, \quad \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1, \quad \bar{\mathfrak{g}}^{-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3,$$

$$[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}), \quad [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}), \quad [u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$$

и $[u_1, u_2] = a_2 e_2 + \alpha_1 u_1$, $[u_1, u_3] = b_1 e_1 + \beta_2 u_2$, $[u_2, u_3] = c_3 e_3 + \gamma_3 u_3$.

Используя тождество Якоби, видим, что $b_1 = -a_2$, $\beta_2 = \alpha_1$, $c_3 = -a_2$, $\gamma_3 = \alpha_1$. Положим $p = a_2 + \alpha_1^2/4$ и рассмотрим следующие случаи:

1°. $p = 0$. Тогда отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \pi(u_1) = u_1 - \frac{\alpha_1}{2} e_2,$$

$$\pi(u_2) = u_2 + \frac{\alpha_1}{2} e_1, \quad \pi(u_3) = u_3 + \frac{\alpha_1}{2} e_3,$$

показывает эквивалентность пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и тривиальной пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$.

2°. $p > 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, достаточно рассмотреть отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$\pi(u_1) = \Big(u_1 - \frac{\alpha_1}{2} e_2\Big)/\sqrt{p}, \quad \pi(u_2) = \Big(u_2 + \frac{\alpha_1}{2} e_1\Big)/\sqrt{p}, \quad \pi(u_3) = \Big(u_3 + \frac{\alpha_1}{2} e_3\Big)/\sqrt{p}.$$

3°. $p < 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = -p\Big(u_1 - \frac{\alpha_1}{2}e_2\Big)/\sqrt{-p},$$
$$\pi(u_2) = \Big(u_2 + \frac{\alpha_1}{2}e_1\Big)/\sqrt{-p}, \quad \pi(u_3) = \Big(u_3 + \frac{\alpha_1}{2}e_3\Big)/\sqrt{-p}.$$

Поскольку $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ не эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$. Так как $\bar{\mathfrak{g}}_3$ – простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$), то пары $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны. □

Заметим, что у пары 3.4.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{u_2,\ -u_3,\ u_1\},\ \{e_2,$ $-e_3 - u_2, e_1 + u_1\}\}$, $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.4.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, у пары 3.4.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ также полупроста.

Лемма 4. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа* 3.5 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0

,

2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

.

Доказательство. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя тождество Якоби, мы видим, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$a_2e_2 + \alpha_3u_3$	$a_2e_1 - \alpha_3u_2$
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-a_2e_2 - \alpha_3u_3$	0	$a_2e_3 + \alpha_3u_1$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$\alpha_3u_2 - a_2e_1$	$-a_2e_3 - \alpha_3u_1$	0

Положим $p = 1\Big/\sqrt{\left|a_2 - \frac{1}{4}\alpha_3^2\right|}$ при $a_2 \neq \frac{1}{4}\alpha_3^2$ и рассмотрим следующие случаи:

1°. $4a_2 = \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, достаточно рассмотреть отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i)=e_i,\ i=1,2,3,\ \pi(u_1)=u_1+\frac{1}{2}\alpha_3 e_3,\ \pi(u_2)=u_2-\frac{1}{2}\alpha_3 e_1,\ \pi(u_3)=u_3+\frac{1}{2}\alpha_3 e_2.$$

2°. $4a_2 > \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\pi(e_i) = e_i,\ i = 1,2,3,\\ &\pi(u_1) = p(u_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 e_3), \quad \pi(u_2) = p(u_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 e_1), \quad \pi(u_3) = p(u_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 e_2).\end{aligned}$$

3°. $4a_2 < \alpha_3^2$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to$ $\to \bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\pi(e_i) = e_i,\ i = 1,2,3,\\ &\pi(u_1) = p(u_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 e_3), \quad \pi(u_2) = p(u_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 e_1), \quad \pi(u_3) = p(u_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 e_2).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \{0\}$ и $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2) = \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3) = \{0\}$, мы видим, что ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна паре 3.5.1. Заметим, что алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$). Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 неэквивалентны. □

Заметим, что у пары 3.5.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{-u_2, u_1, -u_3\}, \{e_3, u_2 -$ $- e_2, e_1 - u_3\}\}$, $\mathfrak{g}$ полупроста, у пары 3.5.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, у пары 3.5.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ также полупроста.

Лемма 5. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа* 5.3 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	0	0	u_1
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	$-u_3$	$-u_2$	0	0	0
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	u_3	0	0	0

,

2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	$-3e_1$	$-\frac{1}{2}e_5+\frac{1}{2}u_1$	$-e_4$
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	$-3e_2$	$-e_3$	$\frac{1}{2}e_5+\frac{1}{2}u_1$
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	$3e_1$	$3e_2$	0	0	0	0	$-3u_2$	$-3u_3$
u_2	$\frac{1}{2}e_5-\frac{1}{2}u_1$	e_3	0	$-u_3$	$-u_2$	$3u_2$	0	0
u_3	e_4	$-\frac{1}{2}e_5-\frac{1}{2}u_1$	$-u_2$	0	u_3	$3u_3$	0	0

.

Доказательство. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_5. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1, \quad \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2, \quad \mathfrak{g}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3, \quad \mathfrak{g}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4,$$
$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5, \quad U^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1, \quad U^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2, \quad U^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3,$$

Прямыми вычислениями получаем, что

$$\begin{array}{lllll}
[e_1,e_2]=0, & & & & \\
[e_1,e_3]=e_2, & [e_2,e_3]=-e_3, & & & \\
[e_1,e_4]=0, & [e_2,e_4]=e_1, & [e_3,e_4]=e_5, & & \\
[e_1,e_5]=e_1, & [e_2,e_5]=-e_2, & [e_3,e_5]=-2e_3, & [e_4,e_5]=2e_4, & \\
[e_1,u_1]=0, & [e_2,u_1]=3pe_2, & [e_3,u_1]=3pe_3, & [e_4,u_1]=-3pe_4, & [e_5,u_1]=0, \\
[e_1,u_2]=2pe_5+u_1, & [e_2,u_2]=pe_3, & [e_3,u_2]=0, & [e_4,u_2]=0, & [e_5,u_2]=u_2, \\
[e_1,u_3]=3pe_4, & [e_2,u_3]=pe_5+u_1, & [e_3,u_3]=u_2, & [e_4,u_3]=0, & [e_5,u_3]=-u_3.
\end{array}$$

Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, то

$$[u_1, u_2] = a_2 e_2 + \alpha_2 u_2, \quad [u_1, u_3] = b_1 e_1 + \beta_3 u_3, \quad [u_2, u_3] = c_5 e_5 + \gamma_1 u_1.$$

Используя тождество Якоби, мы видим, что $a_2 = -3p\gamma_1/2$, $\alpha_2 = 0$, $b_1 = 3p\gamma_1/2$, $\beta_3 = 3p$, $c_5 = 3p\gamma_1/2$. При $p = 0$ отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такое, что $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, 5$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2 - \gamma_1 e_2$, $\pi(u_3) = u_3 + \gamma_1 e_1$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

При $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид

$$\pi(e_1) = \frac{1}{3}e_1, \quad \pi(u_1) = -\frac{p}{2}u_1 - \frac{3p}{2}e_5, \quad \pi(e_2) = \frac{1}{3}e_2, \quad \pi(u_2) = 3pu_2 + \frac{1}{3}e_2,$$
$$\pi(e_3) = e_3, \quad \pi(u_3) = 3pu_3 - \frac{p}{6}e_1. \quad \pi(e_4) = e_4, \quad \pi(e_5) = e_5,$$

Поскольку алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ неэквивалентны. □

Заметим, что у пары 5.3.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ полупроста, а разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{e_1, e_2\}, \{-(1/2)e_1 + e_5, e_2 - 2e_3, 2e_4\}\}$.

Для остальных подалгебр рассуждения аналогичны.

Теорема 1. *Все вещественные пары* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *коразмерности* 3 *(где алгебра* $\bar{\mathfrak{g}}$ *и подалгебра* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы), допускающие нормальную связность, имеют вид* 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 5.3.2. *Аффинные связности на них, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии имеют вид*

Пара	*Аффинная связность*
3.3.1 3.3.2 3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
3.4.1 3.4.2 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.1 3.5.2 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.3.2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	*Тензор кривизны*
3.3.1	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.2	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}-p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}+p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1	$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2+1 & 0 \end{pmatrix}$

3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2-1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.1	$\begin{pmatrix} 0 & -{p_{2,3}}^2 & 0 \\ {p_{2,3}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ {p_{2,3}}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2 \\ 0 & {p_{2,3}}^2 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -{p_{2,3}}^2-1 & 0 \\ {p_{2,3}}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ {p_{2,3}}^2+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2-1 \\ 0 & {p_{2,3}}^2+1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & -{p_{2,3}}^2+1 & 0 \\ {p_{2,3}}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ {p_{2,3}}^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{p_{2,3}}^2+1 \\ 0 & {p_{2,3}}^2-1 & 0 \end{pmatrix}$
5.3.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6r_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4r_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 2r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r_{1,2} \end{pmatrix}$

Пара	*Тензор кручения*
3.3.1	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.3.2	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.3.3	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1}-1,0)$
3.4.1	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$
3.4.2	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$
3.4.3	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$
3.5.1	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0),(-2p_{2,3},0,0)$
3.5.2	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0),(-2p_{2,3},0,0)$
3.5.3	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0),(-2p_{2,3},0,0)$
5.3.2	$(0,0,0),(0,0,0),(-2r_{1,2},0,0)$

В случае 3.3.1 *связность нормальна, если* $r_{3,3}=-2r_{1,1}$, $p_{1,3}\neq 0, p_{3,2}\neq 0$, *тогда алгебра голономии совпадает с* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$; *в случае* 3.3.2 *связность нормальна, если* $p_{1,3}\neq 0, p_{3,2}\neq 0$, *тогда при* $r_{3,3}=-2r_{1,1}$ *алгебра голономии совпадает с* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, *а при* $r_{3,3}\neq -2r_{1,1}$ *алгебра голономии совпадает с* $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$; *в случае* 3.3.3 *связность нормальна, если* $r_{3,3}=-2r_{1,1}$, $p_{1,3}\neq 0$, $p_{3,2}\neq 0$, *тогда алгебра голономии совпадает с* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

В случае 3.4.1 *связность нормальна, если* $p_{1,2} \neq 0$, *тогда алгебра голономии*

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix};$$

в случае 3.4.2 *связность нормальна, если* ${p_{1,2}}^2 \neq 1$, *тогда алгебра голономии совпадает с приведенной в случае* 3.4.1; *в случае* 3.4.3 *связность является нормальной при любом* $p_{1,2}$, *алгебра голономии совпадает с приведенной в случае* 3.4.1.

В случае 3.5.1 *связность нормальна, если* $p_{2,3} \neq 0$, *тогда алгебра голономии*

$$\begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 \\ s_1 & 0 & -s_3 \\ s_2 & s_3 & 0 \end{pmatrix};$$

в случае 3.5.2 *связность является нормальной, алгебра голономии совпадает с приведенной в случае* 3.5.1; *в случае* 3.5.3 *связность нормальна, если* ${p_{2,3}}^2 \neq 1$, *тогда алгебра голономии совпадает с приведенной в случае* 3.5.1.

В случае 5.3.2 *связность нормальна, если* $r_{1,2} \neq 0$, *тогда алгебра голономии –* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

Доказательство. Классификация изотропно-точных пар проведена в леммах. Осталось найти аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии и определить, при каких условиях связность является нормальной. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (для всех $i, j = 1, 2, 3$).

Пусть далее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 3.4.1, тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \ \Rightarrow \ [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1).$$

Получаем $p_{1,1} = 0$, $p_{1,3} = 0$, $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = 0$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = 0$, $p_{3,3} = 0$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \ \Rightarrow \ [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$. Поэтому $p_{2,3} = p_{1,2}$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \ \Rightarrow \ [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2)$, то $q_{1,1} = -p_{1,2}$, $q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,1} = q_{2,2} = 0$, $q_{2,3} = 0$, $q_{3,1} = 0$, $q_{3,2} = 0$, $q_{3,3} = p_{1,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_3, u_2]) \ \Rightarrow \ [\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, получаем $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, $r_{2,1} = -p_{1,2}$, $r_{2,2} = 0$, $r_{3,2} = -p_{1,2}$, $r_{2,3} = r_{3,1} = r_{3,3} = 0$. Условия $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = 0$ выполняются. Таким образом,

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензоры кривизны есть

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-0=\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}^2 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}-p_{1,2}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}^2\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2}^2 & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2}^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения есть

$$T(u_1,u_2)=\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_2]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}2p_{1,2} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$T(u_1,u_3)=\Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak{m}}-[u_1,u_3]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}0 & 2p_{1,2} & 0\end{pmatrix},$$

$$T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-[u_2,u_3]_{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2p_{1,2}\end{pmatrix}.$$

Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x); x\in\bar{\mathfrak{g}}\}$:

$$\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}=\begin{pmatrix}s_2 & s_1 & 0\\ s_3 & 0 & s_1\\ 0 & s_3 & -s_2\end{pmatrix}.$$

Подалгебра $\mathfrak{h}^*=V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\cdots$, где $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])|x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с подпространством, порожденным множеством V при $p_{1,2}\neq 0$ и, таким образом, $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, то есть связность нормальна при $p_{1,2}\neq 0$. При $p_{1,2}=0$ алгебра голономии нулевая, а значит, связность не является нормальной.

Для случаев 3.4.2 и 3.4.3 рассуждения аналогичны приведенным в случае 3.4.1.

Пусть далее $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 3.5.1, тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$. Получаем $p_{1,3}=0$, $p_{1,2}=0$, $p_{3,1}=0$, $p_{3,2}=-p_{2,3}$, $p_{3,3}=p_{2,2}$, $p_{2,1}=0$, $p_{3,3}=p_{2,2}$. $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_2)$. Следовательно, $q_{1,1}=0$, $q_{1,2}=p_{1,1}-p_{2,2}$, $q_{1,3}=-p_{2,3}$, $q_{2,1}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $q_{3,1}=p_{2,3}$, $q_{2,2}=q_{2,3}=q_{3,2}=q_{3,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_3)$, то $r_{3,1}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $r_{1,2}=p_{2,3}$, $r_{1,3}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $r_{2,1}=-p_{2,3}$, $r_{1,1}=r_{2,2}=r_{2,3}=r_{3,2}=r_{3,3}=0$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, то $p_{2,2}=p_{1,1}$, поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, получаем $p_{1,1}=0$, условия $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=0$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=-\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$ выполняются. Таким образом,

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & -p_{2,3} & 0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3} & 0 & 0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0 & p_{2,3} & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями получаем, что тензоры кривизны и кручения совпадают с выписанными в теореме.

Связность нормальна, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, то есть $p_{2,3} \neq 0$, тогда алгебра голономии есть

$$\begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 \\ s_1 & 0 & -s_3 \\ s_2 & s_3 & 0 \end{pmatrix},$$

при $p_{2,3} = 0$ алгебра голономии нулевая, и связность не является нормальной.

Для случаев 3.5.2 и 3.5.3 рассуждения аналогичны приведенным в случае 3.5.1.

Рассмотрим пару 3.3.2, тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$. Получаем $p_{1,1} = 0$, $p_{1,2} = 0$, $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = 0$, $p_{2,3} = 0$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2)$, то $q_{1,1} = 0$, $q_{1,2} = 0$, $q_{1,3} = 0$, $q_{2,1} = 0$, $q_{2,2} = 0$, $q_{2,3} = p_{1,3}$, $q_{3,1} = p_{3,2}$, $q_{3,2} = 0$, $q_{3,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 0$, получаем $r_{1,2} = 0$, $r_{1,3} = 0$, $r_{2,1} = 0$, $r_{2,3} = 0$, $r_{3,1} = 0$, $r_{3,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = 0$, то $r_{2,2} = r_{1,1}$. Таким образом, получаем, что

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

(для остальных базисных векторов условия $[\Lambda(e_i), \Lambda(u_j)] = \Lambda([e_i, u_j])$ выполняются). Прямыми вычислениями получаем, что тензоры кривизны и кручения совпадают с требуемыми в теореме.

При $p_{1,3} \neq 0$, $p_{3,2} \neq 0$, $r_{3,3} \neq -2r_{1,1}$ алгебра голономии совпадет с $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Действительно, при $r_{3,3} = r_{1,1}$

$$[[\Lambda(u_1), \Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1, u_2]), \Lambda(u_1)] = [R(u_1, u_2), \Lambda(u_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p_{1,3}^2 p_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3p_{1,3} p_{3,2}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$[[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1,u_2]),\Lambda(u_2)] = [R(u_1,u_2),\Lambda(u_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3p_{1,3}^2 p_{3,2} \\ 3p_{1,3} p_{3,2}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

порождают всю $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, при $r_{3,3} \neq r_{1,1}$

$$[\Lambda(u_1), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_1, u_3]) = R(u_1, u_3) \quad \text{и} \quad [\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_2, u_3]) = R(u_2, u_3)$$

порождают всю $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$)), поскольку $r_{3,3} \neq -2r_{1,1}$, добавляя

$$[\Lambda(u_1), \Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1, u_2]) = R(u_1, u_2),$$

получаем $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. В этом случае связность является нормальной, так как $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

При $p_{1,3} \neq 0,\ p_{3,2} \neq 0,\ r_{3,3} = -2r_{1,1}$ алгебра голономии есть $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (так как у всех матриц нулевой след, рассуждения аналогичны случаю $r_{3,3} \neq -2r_{1,1}$). В этом случае связность является нормальной.

При $p_{1,3} = 0,\ p_{3,2} \neq 0,\ r_{3,3} \neq r_{1,1}$ или $p_{1,3} \neq 0,\ p_{3,2} = 0,\ r_{3,3} \neq r_{1,1}$ алгебра голономии трехмерная разрешимая и, соответственно, не совпадает с алгеброй $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, порожденной $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})$. В остальных случаях алгебра голономии не более чем одномерна, то есть связность не является нормальной.

Случаи 3.3.1 и 3.3.3 рассматриваются аналогично случаю 3.3.2.

Рассмотрим пару 5.3.2, тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \ \Rightarrow\ [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_1),$$

получаем $p_{2,\,2} = p_{1,\,1} - 3,\ p_{2,\,3} = 0,\ p_{2,\,1} = 0,\ p_{3,\,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \ \Rightarrow\ [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_2)$, то $p_{3,\,3} = p_{1,\,1} - 3,\ p_{3,\,2} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \ \Rightarrow\ [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,\,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_4, u_1]) \ \Rightarrow\ [\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,\,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = -\Lambda(e_3)$, то $q_{3,\,1} = 0,\ q_{3,\,2} = 0,\ q_{3,\,3} = q_{1,\,1},\ q_{2,\,1} = 2$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \dfrac{1}{2}\Lambda(u_1) - \dfrac{1}{2}\Lambda(e_5)$, то $q_{1,\,1} = 2,\ q_{2,\,2} = q_{1,\,1}, q_{2,\,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, имеем $q_{1,\,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, то $r_{1,\,1} = 0,\ r_{1,\,2} = q_{1,\,3},\ r_{1,\,3} = 0,\ r_{2,\,1} = 0,\ r_{2,\,2} = 0,\ r_{2,\,3} = 0,\ r_{3,\,1} = 2,\ r_{3,\,2} = 0,\ r_{3,\,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, имеем $p_{1,\,1} = 0$. Таким образом, получаем, что

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(для остальных базисных векторов условия $[\Lambda(e_i), \Lambda(u_j)] = \Lambda([e_i, u_j])$ выполняются). Тензоры кривизны и кручения совпадают с выписанными в теореме.

Связность нормальна, если $r_{1,2} \neq 0$, тогда $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ и алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (при $r_{1,2} = 0$ алгебра голономии нулевая).

В случае 5.3.1 алгебра голономии нулевая, то есть связность не является нормальной. Прямыми вычислениями получаем, что остальные изотропно-точные пары с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором также не допускают нормальную связность (в частности, размерность алгебры голономии у них меньше, чем размерность подалгебры, поэтому $\dim \mathfrak{h}^* < \dim \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ и $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$). □

Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Комракову Борису Петровичу за постановку задачи и полезные замечания.

Summary

N.P. Mozhei. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a Non-Solvable Transformation Group. I. A Non-Solvable Stabilizer.

In this paper we present a complete local classification of three-dimensional homogeneous spaces admitting a normal connection. We consider only the case of a non-solvable Lie group of transformations with a non-solvable stabilizer. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We describe all invariant affine connections on those homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors. We study the holonomy algebras of homogeneous spaces and find when the invariant connection is normal. We use an algebraic approach for describing the connections as well as methods of the theories of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Keywords: normal connection, homogeneous space, transformation group, holonomy algebra.

Литература

1. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере (По лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926–1927 гг.; пер., обр. и ред. С.П. Финикова). – М.: Моск. гос. ун-т, 1960. – 307 с.
2. *Перепелкин Д.И.* Кривизна и нормальные пространства многообразия V^m в R^n // Матем. сборник. – 1935. – Т. 42, № 1. – С. 81–120.
3. *Перепелкин Д.И.* О параллельных подмногообразиях в евклидовом (или римановом) пространстве // Докл. АН СССР. – 1935. – Т. 1. – С. 593–598.
4. *Fabricius-Bierre F.* Sur varietes a torsion nulle // Acta Math. – 1936. – V. 66. – P. 49–77.
5. *Chen B.Y.* Geometry of submanifoids. – N. Y.: M. Dekker, 1973. – 298 p.
6. *Nomizu K.* Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions // Tohoku Math. J. – 1976. – V. 28, No 1. – P. 613–617.
7. *Ким Сен Ен, Морозов В.В.* Об импримитивных группах трехмерного комплексного пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1955. – Т. 115, кн. 14. – С. 69–85.
8. *Онищик А.Л.* Топология транзитивных групп преобразований. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.
9. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76, No 1. – P. 33–65.
10. *Wang H.C.* On invariant connections over a principal fibre bundle // Nagoya Math. J. – 1958. – V. 13. – P. 1–19.
11. *Kostant B.* On differential geometry and homogeneous spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1956. – V. 42, No 5. – P. 258–261.
12. *Lichnerowicz A.* Géométrie des groupes de transformations. – Paris: Dunod, 1958. – 193 p.
13. *Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al.* Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces: Vol. 1–3 // Preprint series. Institute of Mathematics. University of Oslo. Pure mathematics. – Oslo: Inst., Univ, 1993. – No 35–37.

Поступила в редакцию
11.09.13

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, докторант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *mozheynatalya@mail.ru*