ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.03.01 : МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Работа завершена:
«___»____________2015 г. ____________Зонова Н.Ю.

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
Кандидат физ.-мат. наук,доцент,
«___»____________2015 г. ____________ Салехова И.Г.

Заведующий кафедрой:,
Доктор физ.-мат. наук, профессор
«___»____________2015 г. ____________ Елизаров А.М.

КАЗАНЬ — 2015 г.

Содержание

Введение

§1.Интеграл типа Коши по бесконечному контуру.

Рассмотрим случай, когда линия интегрирования целиком расположена на бесконечной прямой - D (действительная ось). Рассмотрим интеграл Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}; \tag{1}$$

в данном случае t – действительная переменная, пробегающая все действительные значения, а $\varphi(t)$ –комплексная функция действительной переменной t, заданная на всей прямой D.

Будем считать, что точка z не расположена на D. Интеграл (1) будет расходиться, если при достаточно больших $|t|$ имеет место представление

$$\varphi(t) = \varphi(\infty) + O(|t|^{-\mu}), \tag{2}$$

т. е. выражение

$$\int\limits_{N'}^{N''}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{3}$$

не будет стремиться к пределу, когда N' и N'' стремятся к $+\infty$ и $-\infty$. Для проверки разобьем интеграл (3) на два интеграла:

$$\int\limits_{N'}^{N''}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \int\limits_{N'}^{N''}\frac{\varphi(t)-c}{t-z}dt + c\int\limits_{N'}^{N''}\frac{dt}{t-z}, \tag{4}$$

где $c = \varphi(\infty)$.

Первый из выписанных интегралов в силу (2) существует как обычный несобственный, то есть сходится. Рассмотрение второго интеграла показывает, что

$$\int\limits_{N'}^{N''}\frac{dt}{t-z} = \ln\frac{N''-z}{N'-z} = \pm\alpha i + \ln\frac{r'}{r''}$$

где $\alpha(0 < \alpha < \pi)$- угол, заключенный между отрезками, соединяющими точку z с точками $t = N'$ и $t = N''$, а r' и r'' - расстояния точки z до N' и N''.

$\ln\dfrac{r'}{r''}$ не стремится ни к какому пределу. Значит интеграл (4) расходящийся. Если -N' и N'' равны ,то есть -N'= N'' , то $\ln\dfrac{r'}{r''}$ будет стремиться к нулю. Тогда будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{N'}^{N''}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-c}{t-z}dt \pm \pi ic.$$

Выражение, стоящее в левой части, называется по Коши главным значением интеграла. Таким образом, главное значение (1) существует, причем,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-z}dt\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

Термин «главное значение» применятся в двух смыслах: когда подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторой точке и когда пределы интегрирования бесконечны.

Предположим, что точка $z=t_0$ расположена на действительной оси. Если предел существует, то главное значение мы будем определять следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}[\int\limits_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}]; \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-t_0}=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}[\ln\frac{\varepsilon}{N+t_0}+\ln\frac{N-t_0}{\varepsilon}]=0 \tag{6}$$

Главное значение (5) существует, если соблюдено условие (2) и $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H.

В силу (6) главное значение можно представить любой из следующих формул:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-t_0}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt.$$

Формулы Сохоцкого-Племеля переносятся на рассматриваемый случай. Именно, если t_0 – точка , расположенная на конечном расстоянии, а плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности этой точки, то

$$\Phi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}.$$

Изучим теперь поведение функции $\Phi(z)$ и ее граничных значений в окрестности бесконечно удаленной точки, которая в нашем случае является одной из точек границы. Для этого произведем замену переменной:

$$z+i=\frac{-1}{\zeta+i} \tag{7}$$

т.е.

$$z=\frac{-i\zeta}{\zeta+i},\zeta=\frac{-i\zeta}{z+i};$$

При этой замене действительная ось D плоскости z переходит в окружность L плоскости ζ , касательную к действительной оси в точке $\zeta=0$

и проходящую через точку ζ = - i. Когда точка t плоскости t описывает прямую D в положительном направлении, соответствующая ей точка

$$\tau = \frac{-it}{t+i},$$

плоскости ζ описывает окружность L против часовой стрелки.

Соотношение (7) дает конформное отображение верхней полуплоскости плоскости z на круг плоскости ζ, ограниченный окружностью L, и одновременно конформное отображение нижней полуплоскости плоскости Z на часть плоскости ζ. При этом бесконечная удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = -i$ окружности L. Произведя в формуле (1) замену переменных и введя обозначения

$$\Phi(z) = \Phi(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}) = \Phi^*(\zeta), \varphi(t) = \varphi(\frac{-i\tau}{\tau+i}) = \varphi^*(\tau),$$

получим:

$$\Phi(z) = \Phi^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(\zeta+i)(\varphi^*(\tau))}{(\tau+i)(\tau-\zeta)}d\tau.$$

После преобразования, получим:

$$\Phi(z) = \Phi^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau+i} \qquad (8)$$

Интегралы, содержащие в знаменателе подынтегральное выражение $\tau + i$, следует понимать в смысле их главных значений. Легко видеть, что вследствие условия (2) эти значения существуют.

Второй интеграл в правой части – величина постоянная, и поэтому изучение функции $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ сводится к уже знакомому нам вопросу о поведении первого интеграла правой части вблизи точки $\tau = -i$ границы. Наложим на функцию $\varphi(t)$ такое условие, чтобы функция $\varphi^*(\tau)$ удовлетворяла условию H в окрестности точки $\tau = -i$,т.е.условию:

$$|\varphi^*(\tau_2) - \varphi^*(\tau_1)| \le A|\tau_2 - \tau_1|^\mu;$$

Это приводит к следующему условию относительно t:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A|\frac{it_1}{t_1+i} - \frac{it_2}{t_2+i}|^\mu = A|\frac{1}{t_2+i} - \frac{1}{t_1+i}|^\mu$$

При достаточно больших $|t_1|$ и $|t_2|$ это условие равносильно условию

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}|^\mu$$

Это условие называется условие H для окрестности бесконечно удаленной точки. Считая, что $\varphi(t)$ удовлетворяет этому условию, покажем, что существует граничные значения $\Phi(z)$, когда z уходит в бесконечность по любому пути. Эти граничные значения мы будем обозначать через $\Phi^+(\infty)$ и $\Phi^-(\infty)$. Применяя к первому интегралу первой части (8) формулу Сохоцкого-Племеля, получим:

$$\Phi^+(\infty) = \Phi^{+*}(-i) = \frac{1}{2}\varphi^*(-i) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau + i} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau + i}$$

$$\Phi^-(\infty) = \Phi^{-*}(-i) = -\frac{1}{2}\varphi^*(-i) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau + i} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau + i}$$

откуда вытекает формулы:

$$\Phi^+(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty), \Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

§2.Задача Римана.

Однородная задача сопряжения в общем случае.

1. Пусть L – кусочно-гладкая линия. Под кусочно-гладкой линией мы будем понимать конечное число замкнутых и разомкнутых гладких контуров, не имеющих друг с другом общих точек за исключением их концов.

Пусть $\Phi(z)$ – функция, голоморфная в каждой конечной области на плоскости z, не содержащей точек линии L. Пусть $\Phi(z)$-непрерывно продолжима на L слева и справа, а вблизи узлов удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| < \frac{const}{|z-c|^{\alpha}},$$

где c - соответствующий узел, $0 < \alpha <$1. Такую функцию мы будем называть кусочно –голоморфной функцией.

Пусть $\varphi_k(t)$ -функции, однозначно определенные соответственно на дугах $L_k(k=1,2,...,p)$, составляющих L, и пусть $\varphi(t)$ - функция, определенная на L следующим образом:

$$\varphi(t) = \varphi_k(t)$$

Тогда если все функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяют условию Н на соответствующих дугах L, то мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H_0 на L.

Однородную задачу сопряжения мы формулируем так:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L,имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), t \in L, \qquad (9),$$

где $G(t)$ – заданная на L функция класса H_0, нигде на не обращается в нуль. $G(t)$будем называть коэффициентом задачи сопряжения (9).

2. Решение $\chi(z)$ однородной задачи сопряжения (9) называется каноническим, если не только функция$\chi(z)$ но и функция $\dfrac{1}{\chi(z)}$ является кусочно-голоморфной. В силу определения кусочно-голоморфной функции, мы должны иметь вблизи всех узлов

$$|\chi(z)| < \frac{const}{|z-c|^{\alpha}}, \alpha = const < 1, \qquad (10)$$

$$\frac{1}{\chi(z)} < \frac{const}{|z-c|^{\alpha}}, \alpha = const < 1. \qquad (11)$$

Таким образом, каноническое решение характеризуется следующими условиями: оно нигде, быть может удаленной точки, в нуль не обращается; так же не обращается в нуль граничные его значения справа и слева во всех обыкновенных точках граничной линии; вблизи же узлов с оно удовлетворяет условию (11),так же как и условию (10). Кроме того, $\chi(z)$ удовлетворяет условию (9).

3.Рассмотрим функцию

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G(t)dt}{t-z}. \tag{12}$$

Функция $e^{\gamma(z)}$удовлетворяет граничному условию (9) на основании формул Сохоцкого- Племеля. Остается выяснить ее поведение вблизи узлов.

$$\gamma(z) = (\alpha_k + i\beta_k)\ln(z - c_k) + \gamma_0; \alpha_k + i\beta_k = \sum_j \frac{\pm lnG_j(c_k)}{2\pi i},$$

где γ_0- функция, голоморфная в каждом из секторов, на которые разбивается окрестность точки c_k линией L , и стремящихся к определенному пределу при $z \to 0$ по любому пути,не выходящему из данного сектора. Таким образом,

$$e^{\gamma(z)} = (z - c_k)^{\alpha_k + i\beta_k}\Omega(z),$$

где $\Omega(z)$ -функция, голоморфная c_k.

Пусть теперь $\prod(z)$ - рациональная функция, определяемая формулой

$$\prod(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - c_k)^{\lambda_k},$$

где λ_k -целые числа, подчиненные условиям

$$1 < \alpha_k + \lambda_k < 1, k = 1, 2, ..., n. \tag{13}$$

Легко видеть теперь, что функция

$$\chi(z) = \prod(z)e^{\gamma(z)} = e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z - c_k)^{\lambda_k} \qquad (14)$$

представляет собой каноническое решение. $\chi(z)$ нигде в нуль не обращается и вследствие неравенства (13) удовлетворяет условиям (10),(11).

Решения $\Phi(z)$ мы будем называть решениями класса h$(c_1, c_2, ..., c_q)$, если функция $\Phi(z)$ в точках $c_1, c_2, ..., c_q$ ограничена. Класс, соответствующий q=0, мы будем обозначать через $h(0)$ или h_0. Каноническим решением класса h$(c_1, c_2, ..., c_q)$, где $c_1, c_2, ..., c_q$- заданные неособенные узлы(α_k-дробное число), мы будем называть решение $\chi(z)$, определяемой формулой (14),где числа λ_k подобраны следующим образом:

1) $0 < \alpha_k + \lambda_k < 1$ для узлов $c_1, c_2, ..., c_q$.
2) $-1 < \alpha_k + \lambda_k < 0$ для остальных неособенных концов.
3) $\alpha_k + \lambda_k = 0$ для остальных особенных концов.

Целое число $\varkappa$, определяемое формулой

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_k,$$

мы назовем индексом данного класса.

Из (14) следует, что $\chi(z)$ имеет на бесконечности порядок (-$\varkappa$), то есть нуль порядка $\varkappa$ при $\varkappa$>0 или полюс порядка (-$\varkappa$), если $\varkappa$<0; при $\varkappa$=0 имеем $X(\infty) = 1$. Во всех случаях

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1.$$

4. Найдем граничные значения канонического решения $X(z)$. Применяя к интегралу (12) формулы Сохоцкого-Племеля, получим:

$$\chi^+(t_0) = e^{\frac{1}{2}\ln G(t_0)} \prod(t_0) e^{\gamma(t_0)}, \chi^-(t_0) = e^{\frac{-1}{2}\ln G(t_0)} \prod(t_0) e^{\gamma(t_0)},$$

или

$$\chi^+(t_0) = \sqrt{G(t_0)}\chi(t_0), \chi^-(t_0) = \frac{\chi(t_0)}{\sqrt{G(t_0)}}$$

где

$$\chi(t_0) = \prod(t_0) e^{\gamma(t_0)}.$$

Функция $\chi(z)$ принадлежит классу H в окрестностях узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$ и обращается в нуль на них, оставаясь ограниченной.

5. Пусть $\chi(z)$ - каноническое решение данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Очевидно, что функция

$$\Phi(z) = \chi(z) P(z), \tag{15}$$

где $P(z)$- произвольный полином, представляет собой также решение данного класса. Докажем теперь, что, обратно, всякое решение $\Phi(z)$ данного класса дается формулой (15) при надлежащем подборе полинома $P(z)$.Из соотношений

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \chi^+(t) = G(t)\chi^-(t)$$

следует,что

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)}, t \in L.$$

Это равенство показывает, что функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi(z)}$, если приписать ей надлежащие значения в обыкновенных точках линии L, голоморфна на всей плоскости, кроме, узлов и бесконечно удаленной точки. Вблизи узлов она может обращаться в бесконечность порядка, меньшего 1, следовательно, узлы – устранимые точки.

$\Phi(z)$ имеет по условию конечный порядок на бесконечности, то $\dfrac{\Phi(z)}{\chi(z)}$ – полином, и наше утверждение доказано.

6. Отметим ряд следствий, вытекающих из (9).

Все решения однородной задачи (9) остаются ограниченными вблизи всех особенных узлов.

Если решение остается ограниченным вблизи данного неособенного узла, то оно необходимо обращается в нуль в этом узле.

Наинизший порядок на бесконечности решения данного класса равен (-$\varkappa$); все решения данного класса задаются формулой:

$$\Phi(z) = C\chi(z).$$

Неоднородная задача сопряжения в общем случае.

1. Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линиейL,имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), t \in L. \tag{16}$$

где $G(t)$ - заданная на L функция класса H_0,нигде на L не обращается в нуль. $G(t)$ будем называть коэффициентом задачи сопряжения (9).

Пусть $\chi(z)$ -каноническое решение класса однородной задачи (9). Замечая, что

$$G(t) = \frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)}$$

Перепишем условие (16) в виде

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} - \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} = \frac{g(t)}{\chi^{+}(t)}, t \in L.$$

2. При $\varkappa \geq 0$ решения данного класса, исчезающие на бесконечности, даются формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(t)dt}{\chi^{+}(t)(t-z)} + \chi(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{17}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$.

При $\varkappa$ <0 решения данного класса, исчезающие на бесконечности, существуют тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\int\limits_{L}\frac{t^{j}g(t)dt}{\chi^{+}(t)}, j = 0, 1, ..., -\varkappa - 1,$$

выражающие, что $\Phi(\infty) = 0$.

§3. Решение характеристического уравнения.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0), t \in L \tag{18}$$

где L - кусочно-гладкая линия.$A(t), B(t), f(t)$ - обозначают функции, принадлежащие классу H.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)}, \Phi(\infty) = 0. \tag{19}$$

Согласно формулам Сохоцкого-Племеля:

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{(t-t_0)} = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) \tag{20}$$

На основании (18) видим, что функция $\Phi(z)$ должна быть решением задачи сопряжения

$$(A+B)\Phi^+(t) - (A-B)\Phi^-(t) = f \tag{21}$$

Обратно, пусть кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, исчезающая на бесконечности, есть решение задачи (21). Определим функцию $\varphi(t_0)$ первой из формул (20). Тогда функция $\Phi(z)$ представится в виде (19), и, следовательно, будет иметь место такая же вторая формула (20), а это показывает, что $\varphi(t)$ есть решение исходного уравнения (18). Перепишем условие (21) так:

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)},$$

где

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}.$$

Тогда общее решение этой задачи, исчезающее на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)dt}{[A(t)+B(t)]\chi^+(t)(t-z)} + \chi(z)Q_{\varkappa-1}(z),$$

где $Q_{\varkappa-1}(z)$- произвольный полином в степени не выше $\varkappa-1$, причем $Q_{\varkappa-1}(z) = 0$ при $\varkappa = 0$.

Решение исходного интегрального уравнения мы получим по формуле $\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, из которой на основании формулы (17) и формул Сохоцкого- Племеля следует:

$$\varphi(t_0) = \frac{\chi^+(t_0)+\chi^-(t_0)}{2[A(t_0)+B(t_0)]\chi^+(t_0)}f(t_0) + \frac{\chi^+(t_0)-\chi^-(t_0)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)dt}{[A(t)+B(t)]\chi^+(t)(t-t_0)} +$$

$$+[\chi^+(t_0)+\chi^-(t_0)]P_{\varkappa-1}(t_0).$$

§4. Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг.

Постановка задачи.

Пусть имеется счетное множество $L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L_k$, не имеющих общих точек(в том числе и концов),таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L, то $0 < R_1 \leq R_2 \leq ...$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$. На каждом контуре L_k заданы функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, удовлетворяющие условию Гёльдера на каждой из закрытых дуг L_k, причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L_k, включая концы.

Назовем функцию $\Phi(z)$ кусочно-голоморфной с линиями скачков L_1, L_2,..., если вне этих линий она является аналитической всюду, кроме, быть может, точки $z = \infty$, а на каждой из дуг L_k имеет граничные значения слева и справа $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, непрерывные всюду, за исключением концов, в которых допускается обращение в ∞ интегрируемого порядка.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линиями скачков L_1, L_2,..., если на этих линиях заданы условия

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi^-(t) + g_k(t) t \in L_k, k = 1, 2, ...,$$

выполняющиеся всюду, кроме концов.

Задача о скачке.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, если на линиях L_kзаданы условия

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), t \in L_k$$

Если искомая функция $\Phi(z)$ является кусочно-голоморфной с конечным числом линий скачков $L_k (k = 1, 2, ..., q)$, тогда $\Phi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z} + R(z),$$

где $R(z)$ мероморфная или рациональная функция.

Определение1: *Особую линию L_k , в окрестности которой $\Phi(z)$ отличается от интеграла типа Коши лишь аналитической в окрестности и на линии L_k функцией,будем называть полярной особой линией первого порядка. В окрестности такой линии $\Phi(z)$ имеет представление*

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}.$$

Будем рассматривать такую линию как коллективную особую точку и используем понятие вычета $\Phi(z)$ относительно линии L_k:

$$res_{L_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \Phi(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau)d\tau,$$

где Γ некоторая замкнутая линия, окружающая L_k и не содержащая внутри себя других особых линий и особых точек. Тогда имеют место следующие теоремы.

Терема 1. Пусть C есть некотоая замкнутая линия, на которой $\Phi(z)$ непрерывна и внутри которой находятся особые точки $a_1, a_2, ..., a_m$ и особые полярные линии $L_1, ..., L_p$ или части этих линий. Тогда

$$\int\limits_C \Phi(z)dz = 2\pi i\{\sum_{j=1}^{m} res_{a_j}\Phi(z) + \sum_{k=1}^{p} res_{L_k}\Phi(z)\}$$

Терема 2. Если функция $\Phi(z)$ имеет в расширенной плоскости конечное число особы точек и особых полярных линий, то сумма всех ее вычетов, вкючая и вычет в бесконечности, равна нулю.

Терема 3. Существует однозначная функция, голоморфная в любой конечной точке плоскости, не лежащей на линии L_k , главная чать которой в окрестности линии L_k есть интеграл типа Коши

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}.$$

Структура решений однородной задачи.

Рассмотрим кусочно-голоморфную функцию

$$\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)},$$

где под $\ln G_k(t)$ подразумеваем любую ветвь многозначной функции $\ln G_k(t)$ при условии, чтобы она непрерывно изменялась при движении t по L_k. На основании вышеизложенного следует, что функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет условию задачи о скачке.

$$\Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) = \ln G_k(t), t \in L_k.$$

Отсюда имеем:

$$e^{\Gamma^+(t)} = G_k(t)e^{\Gamma^-(t)}.$$

Функция $e^{\Gamma(z)}$ удовлетворяет краевому условию

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi^-(t), t \in L_k.$$

Вблизи конца c_k

$$e^{\Gamma(z)} = (E(\frac{z}{c_k}, n_k))^{\alpha_k + i\beta_k}\Omega_0(z),$$

где $\Omega_0(z)$ голоморфна вблизи c_k и непрерывно продолжтма на L_k вблизи c_k и на c_k, а

$$\alpha_k + i\beta_k = \pm\frac{\ln G_k(c_k)}{2\pi i}.$$

Рассмотрим функцию

$$\prod(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}(\frac{z}{c_k}, n_{k-1}), \qquad (22)$$

где целые числа $\varkappa_k$ подобраны таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям

$$-1 < \alpha_k - \varkappa_k < 1, k = 1, 2, ...$$

Числа n_k к представлении $\prod(z)$ подобраны так, что бесконечное проидведение (22) сходилось абсолютно и равномерно в любой ограниченной замкнутой области, не содержащей точек c_k.

Легко видеть теперь, что функция

$$\chi(z) = \prod(z)e^{\gamma(z)} = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}(\frac{z}{c_k}, n_k) \qquad (23)$$

имеет непрерывные граничные значения $\chi^+(t)$ и $\chi^-(t)$, удовлетворяющие условию однородной задачи

$$\chi^+(t) = G_k(t)\chi^-(t), t \in L_k.$$

Из представления (23) видно, что вне линий L_k на конечном расстоянии у $\chi(z)$ нет ни особых точек, ни нулей, а на концах c_k она может иметь только интегрируемые особенности. Поэтому функция $\chi(z)$ будет представлять одну из канонических функций однородной задачи.

Имея функцию $\chi(z)$, мы построим общее решение задачи

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi^-(t), t \in L_k.$$

$$\Phi(z) = \chi(z)P(z),$$

где $P(z)$- произвольная целая функция.

§5. Гамма-функция Эйлера и ее свойства.

Функция

$$\Gamma(z) = z^{-1}e^{-cz}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

называется *гамма-функцией Эйлера.* Функция $\Gamma(z)$ мероморфна. Она имеет особыми точками лишь простые полюсы при $z = -n(n = 0, 1, 2, ...)$.

Имеет место формула Стирлинга для $\Gamma(z)$

$$ln\Gamma(z) = zlnz - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}ln2\pi + O(z^{-1})$$

или

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}(1+\frac{1}{12z}+...),$$

$$z \to \infty, \qquad |argz| < \pi - \delta, \qquad \delta > 0.$$

Имеет место формула

$$(\ln\Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}) - c,$$

где C -постоянная Эйлера.

Глава I.Характеристическое уравнение в случае бесконечного контура.

§1. Интеграл типа Коши по лучу.

Пусть $L = (a, \infty)-$луч с началом в точке$z = a$.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)}, \tag{1.1}$$

где $\varphi(\tau)$- функция, удовлетворяет условию (2), и проверим его на сходимость. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{a}^{N} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)},$$

где $0 < N < \infty$.

$$\int\limits_{a}^{N} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \int\limits_{a}^{N} \frac{z(\varphi(\tau) - \varphi(\infty) + \varphi(\infty))d\tau}{\tau(\tau - z)} = \int\limits_{a}^{N} \frac{z(\varphi(\tau) - \varphi(\infty))d\tau}{\tau(\tau - z)} + \varphi(\infty) \int\limits_{a}^{N} \frac{zd\tau}{\tau(\tau - z)}.$$

Первый интгерал сходится в силу условия (2).

Рассмотри второе слагаемое:

$$\int\limits_{a}^{N} \frac{zd\tau}{\tau(\tau - z)} = \int\limits_{a}^{N} \frac{d\tau}{(\tau - z)} - \int\limits_{a}^{N} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\frac{(N - z)}{(a - z)} - \ln\frac{N}{a} =$$

$$= \ln\frac{(N - z)a}{(a - z)N} = \ln\frac{(N - z)}{N} - \ln\frac{a}{(a - z)} = \ln\frac{N(1 - \frac{z}{N})}{N} =$$

$$= \ln(1 - \frac{z}{N}) - \ln(1 - \frac{z}{a}).$$

Перейдем к пределу при $N \to \infty$,тогда

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{a}^{N} \frac{zd\tau}{\tau(\tau - z)} = -\ln(1 - \frac{z}{a}).$$

Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{a}^{N} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \int\limits_{a}^{\infty} \frac{z(\varphi(\tau) - \varphi(\infty))d\tau}{\tau(\tau - z)} - \varphi(\infty)\ \ln(1 - \frac{z}{a}).$$

Итак, интеграл сходится, причем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a}^{\infty} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a}^{\infty} \frac{z(\varphi(\tau) - \varphi(\infty))d\tau}{\tau(\tau - z)} - \frac{\varphi(\infty)}{2\pi i} \ln(1 - \frac{z}{a}).$$

Рассмотрим ситуацию, когда $z = t$.

Тогда под интегралом

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^{\infty}\frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}$$

мы будем понимать главное значение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^{\infty}\frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{t-\varepsilon}\frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}+\int\limits_{t+\varepsilon}^{N}\frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}\right)$$

Главное значение существует, если выполняется условие (2) и $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $\bar{L}$, то есть

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=A\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|^{\mu}, \tag{3}$$

Главное значение можно представить в следущем виде

$$\int\limits_L\frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}=\int\limits_L\frac{t(\varphi(\tau)-\varphi(\infty))d\tau}{\tau(\tau-t)}-\varphi(\infty)\ln(1-\frac{t}{a}).$$

Аналогично главное значение можно представить в виде

$$\int\limits_L\frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}=\int\limits_L\frac{t(\varphi(\tau)-\varphi(t))d\tau}{\tau(\tau-t)}-\varphi(t)\ln(1-\frac{t}{a})$$

Получим формулы Сохоцкого для интеграла $\Phi(z)$. Для этого воспользуемся формулами Сохоцкого для конечного контура. Сделаем в интеграле (1.1) замену:

$$w=\frac{1}{z},\qquad z=\frac{1}{w}$$

$$\Phi(z)=\Phi(\frac{1}{w})=\Phi^*(w).$$

$$\varphi(\tau)=\varphi(\frac{1}{\tau_1})=\varphi^*(\tau_1),d\tau=-\frac{1}{\tau_1^2}d\tau_1.$$

$$z=a\to w=\frac{1}{a},z=+\infty\to w=0$$

$$\Phi(z)=\Phi_1^*(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi^*(\tau_1)d\tau_1}{w\frac{1}{\tau_1}(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{w})\tau_1^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi^*(\tau_1)d\tau_1}{w-\tau_1},$$

где $L_1=(0,\frac{1}{a})$.

На функцию $\varphi^*(\tau_1)$ наложим такие условия, чтобы функция $\varphi_1^*(\tau_1)$ удовлетворяла условию Гёльдера на L_1.

$$|\varphi_1^*(\tau_1^{'})-\varphi_1^*(\tau_1^{''})|\leq A|\tau^{'}-\tau^{''}|^{\lambda}$$

При выполнение условия Гёльдера имеют место формулы:

$$\Phi_1^{+*}(t_1) = \frac{1}{2}\varphi^*(t_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\varphi^*(\tau_1)d\tau_1}{(t_1 - \tau_1)},$$

$$\Phi_1^{-*}(t_1) = -\frac{1}{2}\varphi^*(t_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\varphi^*(\tau_1)d\tau_1}{(t_1 - \tau_1)}.$$

Сделав обратную замену получим:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{t\varphi(\tau)dt}{\tau(\tau - t)},$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{t\varphi(\tau)dt}{\tau(\tau - t)}.$$

§2. Решение уравнения.

1). Решение уравнения в классе h_a.

Под классом h_a понимается класс функций, ограниченных в точке $z = a$.

Рассмотрим уравнение,где $f(t)$ принадлежит классу H, а $\varphi(t)$- искомая функция, которая принадлежит классу h_a.

$$\tilde{a}\varphi(t) + \frac{\tilde{b}}{\pi i}\int\limits_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)} = f(t), \qquad \tilde{a}, \tilde{b} - const.$$

Введем в расмотрении кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)},$$

причем $\Phi(0) = 0$.

Согласно формулам Сохоцкого-Племеля,

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)} = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) \tag{1.2}$$

На основании (1.2) видим, что функция $\Phi(z)$ должна быть решением задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

где $G(t) = \frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}, g(t) = \frac{f(t)}{\tilde{a}+\tilde{b}}$.

Для решения задачи строим каноническую функцию $\chi_a(z)$, удовлетворяющую условиям:

1. $\chi_a^+(t) = G(t)\chi_a^-(t)$
2. $\chi_a^+(t) \neq 0, \chi_a^-(t) \neq 0$
3. $\chi_a(z) \in h_a$

Для этого рассмотрим функцию:

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{zlnG(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{z\ln\frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{\ln\frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}}{2\pi i}\ln(1-\frac{z}{a}) = (\alpha+i\beta)\ln(1-\frac{z}{a}),$$

где $\alpha + i\beta = \frac{\ln\frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}}{2\pi i}$, $\ln(1 - \frac{z}{a})$ -это однозначная ветвь в плоскости с разрезом вдоль L .

Тогда каноническая функция для класса h_a будет иметь вид:

$$\chi_a(z) = (1 - \frac{z}{a})^{\alpha+i\beta-[\alpha]},$$

где $[\alpha]$ -целое часть числа α, не превосходящая α.

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi_0^+(t)}{\chi_a^+(t)} = \frac{\Phi_0^-(t)}{\chi_a^-(t)}, t \in L,$$

откуда следует,что функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi_a(z)}$ - непрерывно продолжима, значит аналитически продолжима, то есть она будет аналитична во всей комплексной плоскости и ограничена на бесконечности. По теореме Лиувиля:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_a(z)} \equiv C,$$

а так как $\Phi(0) = 0$, то C=0.

Итак,соответствующая однородная задача не имеет решения.

Рассмотрим неоднородную задачу:

$$\Phi^+(t) = \frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} + \tilde{b}}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\tilde{a} + \tilde{b}}, t \in L.$$

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_a^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_a^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_a^+(t)}, t \in L.$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{a + b}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi_a(z)}$ является решением задачи о скачке. Отсюда,

$$\Phi(z) = \frac{\chi_a(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{zg(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - z)} = \frac{(1 - \frac{z}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}}{2\pi i(\tilde{a} + \tilde{b})} \int\limits_L \frac{zf(\tau)d\tau}{(1 - \frac{\tau}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}\tau(\tau - z)}.$$

$$\Phi^+(t) = \chi_a^+(t) \left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_a^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde{a} + \tilde{b})} + \frac{\chi_a^+(t)}{2\pi i(\tilde{a} + \tilde{b})}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

$$\Phi^-(t) = \chi_a^-(t)[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_a^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)}] = -\frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde{a} - \tilde{b})} + \frac{\chi_a^+(t)}{2\pi i(\tilde{a} - \tilde{b})}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

По формуле $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ найдем $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t)\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}\right) - \frac{\chi_a^+(t)}{\pi i}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}\right)\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

2). Решение уравнения в классе h_∞.

Под классом h_∞ понимается класс функций, ограниченных в точке $z = \infty$.

Рассмотрим решение однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t).$$

где $G(t) = \frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}$.

Тогда каноническая функция для класса h_∞ будет иметь вид:

$$\chi_\infty(z) = \frac{\chi_a(z)}{1-\frac{z}{a}} = (1-\frac{z}{a})^{\alpha-[\alpha]-1+i\beta},$$

где $[\alpha]$ -целая часть α , не превосходящая α.

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi_0^+(t)}{\chi_\infty^+(t)} = \frac{\Phi_0^-(t)}{\chi_\infty^-(t)}, t \in L.$$

Таким образом , функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi_\infty(z)}$ - непрерывно продолжима, значит аналитически продолжима. Она будет аналитична во всей комплексной плоскости и будет обращаться в бесконечность порядка меньшего единицы на бесконечности, а значит это устранимая особая точка. По теореме Лиувиля:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_\infty(z)} = C,$$

а так как $\Phi(0) = 0$, то C=0.

Соответствующая однородная задача не имеет решения.

Рассмотрим неоднородную задачу:

$$\Phi^+(t) = \frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\tilde{a}+\tilde{b}}, t \in L.$$

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_\infty^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_\infty^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_\infty^+(t)}, t \in L.$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{\tilde{a}+\tilde{b}}.$$

Итак, функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi_\infty(z)}$- кусочно-голоморфная функция,причем является решением задачи о скачке. Отсюда,

$$\Phi(z) = \frac{\chi_\infty(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{zg(\tau)d\tau}{\chi_\infty^+(\tau)\tau(\tau-z)} = \frac{(1-\frac{z}{a})^{\alpha-[\alpha]-1+i\beta}}{2\pi i(\tilde{a}+\tilde{b})}\int\limits_L \frac{zf(\tau)d\tau}{(1-\frac{\tau}{a})^{\alpha-[\alpha]-1+i\beta}\tau(\tau-z)}.$$

$$\Phi^+(t)=\chi^+_\infty(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi^+_\infty(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{tg(\tau)d\tau}{\chi^+_\infty(\tau)\tau(\tau-t)}\right]=\frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde a+\tilde b)}+\frac{\chi^+_\infty(t)}{2\pi i(\tilde a+\tilde b)}\int\limits_L\frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_\infty(\tau)\tau(\tau-t)}.$$

$$\Phi^-(t)=\chi^-_\infty(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi^+_\infty(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{tg(\tau)d\tau}{\chi^+_\infty(\tau)\tau(\tau-t)}\right]=-\frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde a-\tilde b)}+\frac{\chi^+_\infty(t)}{2\pi i(\tilde a-\tilde b)}\int\limits_L\frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_\infty(\tau)\tau(\tau-t)}.$$

По формуле $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$ найдем $\varphi(t)$

$$\varphi(t)=f(t)\left(\frac{\tilde a}{\tilde a^2-\tilde b^2}\right)-\frac{\chi^+_\infty(t)}{\pi i}\left(\frac{\tilde b}{\tilde a^2+\tilde b^2}\right)\int\limits_L\frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_\infty(\tau)\tau(\tau-t)}.$$

3). Решение уравнения в классе $h_{(a;\infty)}$.

Под классом $h_{(a;\infty)}$ понимается класс функций, ограниченных в точке $z=a$ и $z=\infty$.

Каноническая функция для класса $h_{(a;\infty)}$ будет иметь вид:

$$\chi_{(a;\infty)}(z)=(1-\frac{z}{a})^{\alpha+i\beta-[\alpha]}\frac{1}{z},$$

где $[\alpha]$ -целая часть α , не превосходящая α.

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi_0^+(t)}{\chi_0^+(t)}=\frac{\Phi_0^-(t)}{\chi_0^-(t)},t\in L.$$

Таким образом , функция $\dfrac{\Phi(t)}{\chi_{(a;\infty)}(t)}$ - непрерывно продолжима, значит аналитически продолжима.Она будет аналитична во всей комплексной плоскости и будет обращаться в бесконечность порядка меньшего единицы на бесконечности, а значит это устранимая особая точка. По теореме Лиувиля:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_\infty(z)}=C,$$

а так как $\Phi(0)=0$, то C=0.

Соответствующая однородная задача не имеет решения.

Рассмотрим неоднородную задачу:

$$\Phi^+(t)=\frac{\tilde a-\tilde b}{\tilde a+\tilde b}\Phi^-(t)+\frac{f(t)}{\tilde a+\tilde b},t\in L.$$

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+_{(a;\infty)}(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{\chi^-_{(a;\infty)}(t)}=\frac{g(t)}{\chi^+_{(a;\infty)}(t)},t\in L.$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{\tilde{a} + \tilde{b}}.$$

Итак, функция $\frac{\Phi(z)}{\chi_{(a;\infty)}(z)}$- кусочно-голоморфная функция,причем является решением задачи о скачке. Отсюда,

$$\Phi(z) = \frac{\chi_{(a;\infty)}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{zg(\tau)d\tau}{\chi^+_{(a;\infty)}(\tau)\tau(\tau - z)} = \frac{(1 - \frac{z}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}}{2\pi i(\tilde{a} + \tilde{b})} \int\limits_L \frac{f(\tau)d\tau}{(1 - \frac{\tau}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}(\tau - z)}.$$

Для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение условия разрешения:

$$\int\limits_L \frac{f(\tau)d\tau}{(1 - \frac{\tau}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}} = 0.$$

$$\Phi^+(t) = \chi^+_{(a;\infty)}(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi^+_{(a;\infty)}(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi^+_{(a;\infty)}(\tau)\tau(\tau - t)}\right] = \frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde{a} + \tilde{b})} + \frac{\chi^+_{(a;\infty)}(t)}{2\pi i(\tilde{a} + \tilde{b})}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_{\infty}(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

$$\Phi^-(t) = \chi^-_{(a;\infty)}(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi^+_{(a;\infty)}(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi^+_{(a;\infty)}(\tau)\tau(\tau - t)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde{a} - \tilde{b})} + \frac{\chi^+_{(a;\infty)}(t)}{2\pi i(\tilde{a} - \tilde{b})}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_{\infty}(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

По формуле $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ найдем $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t)\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}\right) - \frac{\chi^+_{(a;\infty)}(t)}{\pi i}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}\right)\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi^+_{(a;\infty)}(\tau)\tau(\tau - t)}.$$

4). Решение уравнения в классе h_0.

Под классом h_0 понимается класс функций нигде неограниченных.

Каноническая функция для класса h_0 будет иметь вид:

$$\chi_0(z) = \frac{z(1 - \frac{z}{a})^{\alpha + i\beta - [\alpha]}}{(1 - \frac{z}{a})},$$

где $[\alpha]$ -целая часть α , не превосходящая α.

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+_0(t)}{\chi^+_0(t)} = \frac{\Phi^-_0(t)}{\chi^-_0(t)}, t \in L.$$

Таким образом , функция $\dfrac{\Phi(t)}{\chi_0(t)}$ - непрерывно продолжима, значит аналитически продолжима. Она будет аналитична во всей комплексной плоскости. Кроме того, на бесконечности она может обращаться в бесконечность порядка, меньшего единицы.

$$\Phi_0(z) = C\chi_0(z)$$

Рассмотрим неоднородную задачу:

$$\Phi^+(t) = \frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\tilde{a}+\tilde{b}}, t \in L.$$

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_0^+(t)}, t \in L.$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{\tilde{a}+\tilde{b}}.$$

Итак, функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi_0(z)}$- кусочно-голоморфная функция,причем является решением задачи о скачке. Отсюда,

$$\Phi(z) = \frac{\chi_0(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{zg(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)(\tau-z)} + \Phi_0(z) =$$

$$= \frac{z(1-\frac{z}{a})^{\alpha+i\beta-[\alpha]}}{(1-\frac{z}{a})2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau(1-\frac{\tau}{a})f(\tau)d\tau}{\tau(\tilde{a}+\tilde{b})(1-\frac{\tau}{a})^{\alpha+i\beta-[\alpha]}\tau(\tau-t)} + C\chi_0(z).$$

$$\Phi^+(t) = \chi_0^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau(\tau-t)}\right] + C\chi_0^+(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f(t)}{(a+b)} + \frac{\chi_0^+(t)}{2\pi i(a+b)}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau(\tau-t)} + C\chi_0^+(t).$$

$$\Phi^-(t) = \chi_0^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau(\tau-t)}\right] + C\chi_0^+(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{f(t)}{(\tilde{a}-\tilde{b})} + \frac{\chi_0^+(t)}{2\pi i(\tilde{a}-\tilde{b})}\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau(\tau-t)} + C\chi_0^+(t).$$

По формуле $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ найдем $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t)\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}\right) - \frac{\chi_0^+(t)}{\pi i}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}\right)\int\limits_L \frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau(\tau-t)} + C[\chi_0^+(t) - \chi_0^+(t)].$$

Глава II.Решение характеристического сингулярного уравнения в случае счетного множества отрезков вещественной оси.

§1. Постановка задачи

Пусть имеется счетное множество интервалов вещественной оси

$L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L_k$ таких, что $L_0 = (a_0, b_0)$ лежит в вертикальной полосе $0 \leq Rez < 1$, а L_k получены из L_0 преобразованием $z + k, k \in N$.

Рассмотрим уравнение:

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int\limits_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)} = f(t), \tag{2.1}$$

где a,b-const, $f(t) \in H(A, \lambda), t \in \bar{L}, f(\infty) = 0$.

Требуется найти функцию $\varphi(t) \in h(b_k)$, удовлетворяющую условию:

$$\sup_{t \in L} |\varphi(t)| \leq M < \infty.$$

Покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.1) при $|t| \leq r, 0 < r < \infty$. Пусть $\tau \in L_k, \tau \neq t$.

$$\left|\int\limits_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{L_k} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)}\right| \leq Mr\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{L_k} \frac{|d\tau|}{|\tau|^2\left|1 - \frac{t}{\tau}\right|}.$$

При всех достаточно больших k величина $\frac{t}{\tau}$ будет сколь угодно малой, так как $|t| \leq r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, чтобы при $k \geq K$ выполнялось неравенство $\left|1 - \frac{t}{\tau}\right| \geq \frac{1}{2}$. Тогда можно подобрать такой номер K, что ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty}\int\limits_L \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)}$ при $|t| \leq r$ мажорируется рядом

$$2\sum_{k=K}^{\infty}\int\limits_{L_k} \frac{|d\tau|}{a_k^2} = 2(b_0 - a_0)\sum_{k=K}^{\infty}\frac{1}{a_k^2} = 2(b_0 - a_0)\sum_{k=K}^{\infty}\frac{1}{(a_0 + k)^2} < \infty.$$

Для решения уравнения вводим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)}, \Phi(0) = 0, \tag{2.2}$$

На основании вышеизложенного следует, что ряд (2.2) сходится абсолютно и равномерно при $|z| \leq r$. Для интеграла (2.1) имеют место формулы Сохоцкого. Фиксируем $k = k'$ и представим $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{L_k} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k'}} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} + \Omega(z),$$

где $\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum' \int\limits_{L_k} \dfrac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)}$, а "штрих"означает, что в сумме отсутствует слагаемые соответсвующие $k = k'$.

$$\int\limits_{L_{k'}} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z)} - \int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau}. \tag{2.3}$$

К первому интегралу в (2.3) применим уже известые формулы Сохоцкого-Племеля.Тогда получим

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau} + \Omega^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t),$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k'}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau} + \Omega^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t),$$

где $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{L_k} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - t)}$.

Отсюда

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{2.4}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L} \frac{t\varphi(\tau)dt}{\tau(\tau - t)}. \tag{2.5}$$

Исследуем поведение $\Phi(z)$ при $z \to \infty$. Учитывая формулу Стирлинга, получим

$$|\Phi(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int\limits_{L_k} \frac{z\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int\limits_{L_k} \varphi(\tau) \left[\frac{1}{(\tau - z)} - \frac{1}{\tau} \right] d\tau \right| =$$

$$= \{\tau = \tau_1 + k\} = \int\limits_{L_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \varphi(\tau_1 + k) \left[\frac{1}{(\tau_1 + k - z)} - \frac{1}{\tau_1 + k} \right] d\tau_1 \right| \leq M \ln |z|.$$

Учитывая (2.5), получим, что решение уравнения сводится к решению эквивалентной задачи Римана

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) \left(\frac{a - b}{a + b} \right) + \frac{f(t)}{a + b}. \tag{2.6}$$

§2.Решение задачи в классе $h(b_k)$.

Найдем каноническую функцию данного класса $h(b_k)$. Для этого рассмотрим задачу о скачке:

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \ln G_0, t \in L,$$

где $\ln G_0 = \ln \frac{a-b}{a+b}$

На основании результатов по решению задачи Римана в случае счетного множества контуров имеем:

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{z \ln G_0 d\tau}{\tau(\tau - z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_k} \frac{z d\tau}{\tau(\tau - z)} = (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau}\right) d\tau +$$

$$+(\alpha + i\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int\limits_{L_k} \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau}\right) d\tau\right] =$$

$$= (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \left[\left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau + k - z} - \frac{1}{\tau + k}\right)\right] d\tau =$$

$$= (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \left[\frac{1}{\tau - z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau + k + z} - \frac{1}{k}\right) + c - (\frac{1}{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau + k} - \frac{1}{k}\right) + c)\right] d\tau =$$

$$= (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} [(\ln \Gamma(\tau))' - (\ln \Gamma(\tau - z))'] \, d\tau = (\alpha + i\beta) [\; ln\Gamma(\tau) - \ln \Gamma(\tau - z)] \,|_{a_0}^{b_0} =$$

$$= (\alpha + i\beta) \ln \frac{\Gamma(b_0)\Gamma(a_0 - z)}{\Gamma(a_0)\Gamma(b_0 - z)},$$

где

$$\Gamma(z) = z^{-1} e^{-cz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \alpha + i\beta = \frac{\ln G_0}{2\pi i}.$$

Тогда каноническая функция в классе $h(b_k)$ примет вид:

$$\chi_b(z) = \left[\frac{\Gamma(b_0)\Gamma(a_0 - z)}{\Gamma(a_0)\Gamma(b_0 - z)}\right]^{(\alpha + i\beta) - [\alpha]}$$

На основании формулы Стирлинга имеем:

$$\chi_b(z) \sim z^{(a_0 - b_0)(\alpha - [\alpha])} \to 0, z \to \infty.$$

Рассмотрим сначала соответствующую однородную задачу:

$$\Phi^+(t) = \frac{a - b}{a + b} \Phi^-(t).$$

Учитывая, что

$$\frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}} = \frac{\chi_b^+(t)}{\chi_b^-(t)},$$

получим:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}.$$

Отношение $\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$ есть функция голоморфная всюду, кроме может быть концов, где могут быть устранимые особые точки. Кроме того,на бесконечности оно может обращаться в бесконечность порядка меньшего единицы, а значит по теореме Лиувилля:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)} = C, C = const.$$

А так как $\Phi(0) = 0$, то $C = 0$.

То есть соответствующая однородная задача не имеет решения.

Перейдем к решению неоднородной задачи. С помощью канонической функции перепишем граничное условие (2.6) в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)} = \frac{f(t)}{(\tilde{a}+\tilde{b})\chi_b^+(t)}.$$

Откуда

$$\Phi(z) = \chi_b(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{f(\tau)d\tau}{(a+b)\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - z)} =$$

$$= \left[\frac{\Gamma(b_0)\Gamma(a_0-z)}{\Gamma(a_0)\Gamma(b_0-z)}\right]^{(\alpha+i\beta)-[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{f(\tau)d\tau}{(a+b)\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - z)} =$$

$$= \chi_b(z)\Psi(z), \tag{2.7}$$

где $\Psi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{f(\tau)d\tau}{(a+b)\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-z)}$.

Ряд (2.7) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте D. Перепишем ряд в виде:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{L_0} \frac{f(\tau+k)}{(\tau+k)\chi_b^+(\tau+k)(a+b)} (\tau+k-z)^{-1} d\tau, z \in D. \tag{2.8}$$

Ряд (2.7) сходится, так как для общего члена b_k ряда (2.8) справедливо соотношение $b_k = O(k^{-\mu}), \mu > 1$.

Вычислим граничные значения $\Phi^+(t)$,$\Phi^-(t)$.

$$\Phi^+(t) = \chi_b^+(t) \left[\frac{1}{2} \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{L_k} \frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - t)} \right];$$

$$\Phi^-(t)=\chi_b^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{L_k}\frac{tg(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-t)}\right],$$

где $g(t)=\frac{f(t)}{(a+b)}$.

Покажем, что предельные значения $\Phi^{\pm}(t)$ равномерно ограничены при $t\to\infty, t\notin D_\delta$, где $D_\delta=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}D_\delta^k$,а $D_\delta^k=\{|t-c_k|<\delta\}$. Пусть $t\in L_{\tilde{k}}$, тогда

$$\Phi_1^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{tg(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)\chi_b^+(t)}=$$

$$\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{g(\tau)d\tau}{(\tau-t)\chi_b^+(t)}- \tag{2.9}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{g(\tau)d\tau}{\tau\chi_b^+(t)}+\sum_{k=0}^{\infty\prime}\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-t)},t\in L_{\tilde{k}}$$

где штрих означает, что член, соответствующий $k=\tilde{k}$ в сумме, отсутствует. Так как в последнем слагаемом $\tau\neq t$, то получим

$$|\Phi_2(t)|\le M_1\ln t, \tag{2.10}$$

где

$$\Phi_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty\prime}\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-t)}.$$

Данная функция при $t\to\infty, t\notin D_\delta$ имеет логарифмическую особенность. Следовательно, $|\Phi_2(t)\chi_b^{\pm}(t)|\le B$, при $t\to\infty, B-const$. Теперь оценим первые три слагаемых в правой части (2.9). Из условия $f(\infty)=0$ и свойств $\chi_b^+(t)$ при $t\to\infty, t\notin D_\delta$ имеем

$$\left|\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}\right|\le M_2, t\to\infty \tag{2.11}$$

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{g(\tau)d\tau}{\tau\chi_b^+(t)}\right|\le\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{M_2d\tau}{2\pi i}\le\frac{M_2}{2\pi a_0}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}d\tau=\frac{M_2(b_0-a_0)}{2\pi a_0}. \tag{2.12}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)(\tau-t)}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)}-\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}+\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}}{(\tau-t)}d\tau\right|=$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)}-\frac{g(t)d\tau}{\chi_b^+(t)}}{(\tau-t)}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{d\tau}{\tau-t}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\tilde{k}}}\frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)}-\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}\ln\frac{t-b_{\tilde{k}}}{t-a_{\tilde{k}}}\right|\le$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} - \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)} \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right|.$$

Оценим каждое слагаемое

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} - \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}}{\tau - t} d\tau \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{\left| \frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} - \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)} \right|}{|\tau - t|} d\tau \leq \frac{D}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{d\tau}{|\tau - t|^{1-\lambda^*}},$$

где D и λ^*- постоянная и показатель условия Гельдера для функции $\frac{f(t)}{\chi_b^+(t)}$.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{\frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} - \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}}{\tau - t} d\tau \right| \leq \frac{D}{2\pi i} \int\limits_{L_{\tilde{k}}} \frac{d\tau}{|\tau - t|^{1-\lambda^*}} = \frac{D}{2\pi} \int\limits_{a_{\tilde{k}}-t}^{b_{\tilde{k}}-t} \frac{d\tau_1}{|\tau_1|^{1-\lambda^*}} \leq$$

$$\leq \frac{D}{2\pi} \int\limits_{a_0-b_0}^{b_0-a_0} \frac{d\tau_1}{|\tau_1|^{1-\lambda^*}} = \frac{D}{\pi} \int\limits_{0}^{b_0-a_0} \frac{dv}{|v|^{1-\lambda^*}} = \frac{D}{\pi\lambda^*} \left. v^{\lambda^*} \right|_0^{b_0-a_0} = \frac{D}{\pi\lambda^*} (b_0 - a_0)^{\lambda^*}. \tag{2.13}$$

$$\left| \frac{g(t)}{2\pi i \chi_b^+(t)} \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right| \leq \frac{\left| \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)} \right|}{2\pi} \left| \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right| \leq \frac{M}{2\pi} \left| \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right|.$$

Если воспользоваться оценкой первичного множителя Вейерштрасса , то получим

$$\left| \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right| = \left| \ln \left(1 - \frac{b_{\tilde{k}} - a_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right) \right| \leq C_1 \left| \frac{b_{\tilde{k}} - a_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right|,$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $\tilde{k}$. Тогда при $t \notin D_\delta^{\tilde{k}}$ имеем.

$$\left| \ln \frac{t - b_{\tilde{k}}}{t - a_{\tilde{k}}} \right| \leq \frac{C_1(b_0 - a_0)}{\delta}, \qquad |t - a_{\tilde{k}}| < \delta \tag{2.14}$$

Учитывая (2.9)-(2.14) и ограниченность $\chi_b^+(t)$ при $t \to \infty$, имеем

$$|\Phi^\pm(t)| \leq M + M_2 \frac{b_0 - a_0}{2\pi a_0} + \frac{D}{\pi\lambda^*}(b_0 - a_0)^{\lambda^*} + \frac{C_1(b_0 - a_0)}{\delta}. \tag{2.15}$$

Оценка (2.15) показывает, что она не зависит от k.

Зная граничные значения, по формуле (2.4) найдем искомое решение уравнения (2.1):

$$\varphi(t) = f(t) \left[\frac{a}{a^2 - b^2} \right] - \frac{\chi_b^+(t)}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{L_k} \frac{t f(\tau) d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - t)} \left[\frac{b}{a^2 - b^2} \right].$$

Список литературы

[1] Мусхелешвили Н.Ю.. *Сингулярные интегральные уравнения.Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*,(изд-во Физматгиз,1962).

[2] Салехова И.Г. . *Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг*, Изв. вузов. Математика,№6,124-135 (1975).

[3] Чибрикова Л.И. . *Основные граничные задачи для аналитических функций*,(изд-во Казанского университета,Казань, 1977).

[4] Салехова И.Г., Афонина А.И. . *Задача Римана для функций с полярными линиями высших порядков*, изв. вузов. Математика,т.11,3-12(2014).

[5] Левин Б.Л. . *Распределение корней целых функций*,(ГИТТЛ,Москва, 1956).