

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КАЩЕЕВ Р. А.

**ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИГУРЫ
ПЛАНЕТАРНОГО ГЕОИДА**

(учебное пособие)

Казань 2001

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК: 528.2

Кашеев Р.А. Теория определения фигуры планетарного геоида.
Учебное пособие для студентов четвертого курса физического фа-
культета. Казань 2001, 40 с.

Учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций по второй части курса "Теория фигуры Земли", читаемого для студентов четвертого курса специальности "Астрономогеодезия" физического факультета.

Рецензент:

Заболотников В.С. - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры геодезии
Казанской государственной архитектурно-строительной академии

Оглавление

1	Возмущающий потенциал и его свойства.	2
2	Характеристики фигуры геоида и их зависимость от возмущающего потенциала.	4
3	Краевая задача для возмущающего потенциала.	10
4	Решение краевой задачи в сферическом приближении.	12
5	Вычисление высот геоида относительно общего земного эллипсоида.	17
6	Формула Венинг-Мейнеса для составляющих укло- нения отвесной линии.	21
7	Обобщенный алгоритм трансформации скалярных полей, заданных на сфере.	25
8	Задача вычисления трансформант возмущающего потенциала и устойчивость ее решения.	29
9	Фигура планетарного геоида по гравиметрическим и спутниковым данным.	33

1 Возмущающий потенциал и его свойства.

Начиная разговор об определении фигуры планетарного (глобального) геоида, будет уместно напомнить, что геоидом называется уровенная поверхность потенциала силы тяжести, проходящая через нуль начального пункта нивелирной сети. Фигуру планетарного геоида, обычно рассматриваемую в качестве второго после нормального эллипсоида приближения к фигуре Земли, образует достаточно гладкая замкнутая поверхность, на акватории Мирового океана совпадающая с невозмущенной поверхностью воды, мысленно продолжаемой под материками перпендикулярно к силовым линиям векторного поля силы тяжести.

Возмущающим потенциалом T в принадлежащей геоиду точке P называется разность между действительным W и нормальным U потенциалами силы тяжести Земли в этой точке:

$$T(P) = W(P) - U(P) \quad (1)$$

Поскольку потенциал силы тяжести есть сумма гравитационного и центробежного потенциалов, имеем:

$$W(P) = V(P) + Q(P), \quad U(P) = V_0(P) + Q(P),$$

где $V_0(P)$ - потенциал притяжения Нормальной Земли в точке P , $Q(P)$ - не зависящий от распределения масс центробежный потенциал в той же точке P . При этом предполагается, что реальная Земля и нормальный эллипсоид вращаются вокруг общей оси с одной и той же постоянной угловой скоростью. Тогда возмущающий потенциал

$$T(P) = V(P) - V_0(P) \quad (2)$$

представляет собой разность потенциалов тяготения реальной Земли и Нормальной Земли и потому обладает теми же свойствами, которыми обладает ньютоновский потенциал силы притяжения:

- конечностью и непрерывностью во всем пространстве;
- конечностью и непрерывностью первых производных во всем пространстве;
- гармоничностью в пространстве, не занятом массами;
- регулярностью на бесконечности.

Условие гармоничности возмущающего потенциала во внешнем пространстве

$$\Delta T = 0$$

позволяет использовать для его определения в области гармоничности аппарат решения краевых задач теории потенциала.

Получим разложение возмущающего потенциала $T(\rho, \varphi, \lambda)$ в ряд объемных сферических (шаровых) функций. Напомним соответствующее разложение для потенциала притяжения реальной Земли:

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho} [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi)]. \quad (3)$$

Отсутствие в формуле (3) гармоник первой степени ($n = 1$) означает, что центр используемой сферической системы координат совпадает с центром масс Земли.

Потенциал притяжения Нормальной Земли выберем в виде потенциала эллипсоида вращения [2, с.12]:

$$V_0(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 C_{20} P_2(\sin \varphi) \right], \quad (4)$$

При этом предполагается, что масса Нормальной Земли в (4) и масса реальной Земли в (3) равны, геометрический центр нормального эллипсоида совпадает с центром масс Земли.

Тогда согласно (2) возмущающий потенциал запишется в виде:

$$T = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \quad (5)$$

Подчеркнем, что при выполнении указанных выше условий, разложение (5) не будет содержать гармоник нулевой и первой степеней. Иными словами, суммирование ряда (5) по индексу n при этом будет начинаться с $n = 2$.

Таким образом, определение потенциала силы тяжести реальной Земли, а, следовательно, и фигуры геоида сводится к отысканию возмущающего потенциала, который по этой причине занимает центральное место в изучении планетарной фигуры Земли.

2 Характеристики фигуры геоида и их зависимость от возмущающего потенциала.

Пусть в точке $P(X, Y, Z)$, лежащей на геоиде $W(P) = c_0$ векторы силы тяжести $\vec{g}(P)$ и нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}(P)$ описываются компонентами

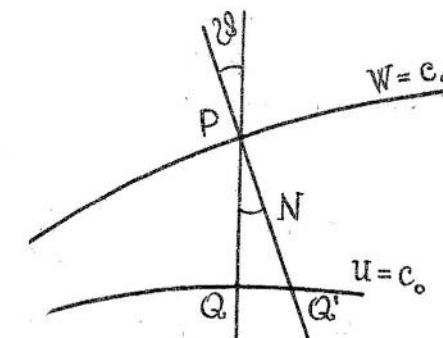


Рис.1.

$$\vec{g}(P) = \left(-\frac{\partial W}{\partial X}, -\frac{\partial W}{\partial Y}, -\frac{\partial W}{\partial Z} \right)^T,$$

$$\vec{\gamma}(P) = \left(-\frac{\partial U}{\partial X}, -\frac{\partial U}{\partial Y}, -\frac{\partial U}{\partial Z} \right)^T,$$

где W и U суть потенциалы реальной и нормальной силы тяжести в точке P . Скалярное произведение векторов \vec{g} и $\vec{\gamma}$ будет равно:

$$\begin{aligned} (\vec{g} \cdot \vec{\gamma}) &= \left(\frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = \\ &= g(P)\gamma(P) \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (6)$$

где ϑ - угол между векторами \vec{g} и $\vec{\gamma}$, называемый полным уклонением отвесной линии.

На рисунке 1 точкой Q обозначено пересечение направления вектора нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}$ с поверхностью нормального эллипсоида $U = c_0$. Точка пересечения вектора \vec{g} с

поверхностью нормального эллипсоида обозначена Q' . Длину отрезка PQ' назовем высотой (ондуляцией) геоида над эллипсоидом и обозначим символом N . Далее линеаризуем нормальный потенциал $U(P)$ в окрестности точки Q , учитывая, что по определению для Нормальной Земли выполняется условие $U(Q) = W(P) = c_0$:

$$U(P) = W(P) + \frac{\partial U}{\partial X}(X_P - X_Q) + \frac{\partial U}{\partial Y}(Y_P - Y_Q) + \frac{\partial U}{\partial Z}(Z_P - Z_Q).$$

Поскольку из треугольника PQQ' следует, что

$$X_P - X_Q = N \frac{g_X}{g} = -N \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial W}{\partial X},$$

$$Y_P - Y_Q = N \frac{g_Y}{g} = -N \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y},$$

$$Z_P - Z_Q = N \frac{g_Z}{g} = -N \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial W}{\partial Z},$$

то, учитывая (6), приходим к

$$\begin{aligned} T(P) &= W(P) - U(P) = \\ &= \frac{N}{g} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = \\ &= N \gamma \cos \vartheta, \end{aligned}$$

откуда в свою очередь имеем:

$$N = \frac{T}{\gamma \cos \vartheta}. \quad (7)$$

Хорошо известно, что для Земли угол ϑ редко превышает величину одной угловой минуты; вследствие чего выражение (7), называемое леммой (или теоремой) Г.Брунса, чаще записывают в виде

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (8)$$

Таким образом, в согласии с леммой Брунса возмущающий потенциал T служит мерой отступления геоида $W = c_0$ от уровенного нормального эллипсоида $U = c_0$.

Иными словами, перемещая пробную единичную массу из точки Q в точку P в поле нормальной силы тяжести, мы совершаём работу $U(Q) - U(P) = \gamma N$. Так как $U(Q) = W(P)$, то $W(P) - U(P) = T(P) = \gamma N$, откуда приходим к равенству (8). При $U(Q) \neq W(P)$ формула (8), очевидно, имеет вид [5, с.138]:

$$N = \frac{T}{\gamma} + \frac{U(Q) - W(P)}{\gamma}.$$

Помимо превышения геоида над эллипсоидом, важной характеристикой фигуры геоида является его наклон по отношению к поверхности нормального эллипсоида. Этот наклон описывается углом ϑ - полным уклонением отвесной линии, представляющим собой, как уже отмечалось выше, угол между нормалью, опущенной из точки P к поверхностям геоида и нормального эллипсоида.

Введем (см. рис.2) правую прямоугольную топоцентрическую систему координат $Rxyz$, ось z которой совместим с направлением вектора \vec{g} нормальной силы тяжести, а ось x

устремим к северу по касательной к меридиану точки P , ось y в этом случае будет направлена на восток.

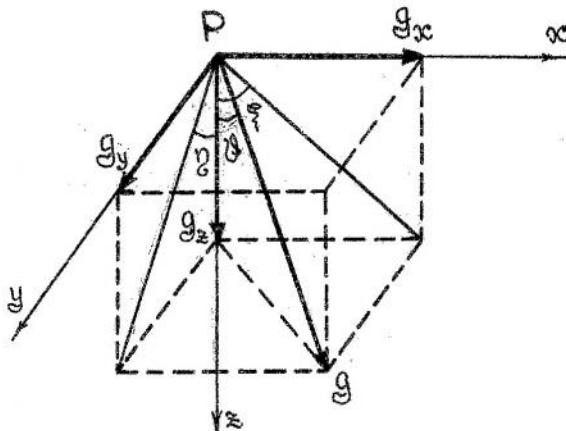


Рис.2.

Угол ϑ между вектором силы тяжести \vec{g} и вектором нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}$ (т.е. осью z) спроектируем на плоскость меридiana zPx и плоскость первого вертикала zPy , обозначая получившиеся углы символами ξ и η соответственно. Угол ξ назовем составляющей уклонения отвесной линии в плоскости меридiana, а угол η - составляющей уклонения отвесной линии в плоскости первого вертикала. Учитывая малость этих углов, запишем для них

$$\xi = -\frac{g_x}{g_z}, \quad \eta = -\frac{g_y}{g_z}.$$

Знаки составляющих ξ и η выбраны исходя из следующей договоренности: считать $\xi > 0$ и $\eta > 0$ при уклонении отвесной линии к югу и западу соответственно.

Абсциссу и ординату вектора силы тяжести \vec{g} выразим через возмущающий потенциал T :

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(U + T) = \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(U + T) = \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\text{т.к. } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

поскольку абсцисса и ордината вектора нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}$ будут равны нулю в силу совпадения направления вектора $\vec{\gamma}$ с направлением оси z . Тогда, заменяя g_z на γ , имеем для составляющих уклонения отвесной линии

$$\xi = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (9)$$

Дифференциалы дуг меридиана и параллели представляются равенствами

$$dx = \rho d\varphi, \quad dy = \rho \cos \varphi d\lambda,$$

что позволяет переписать (9) в виде

$$\xi(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma \rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \eta(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma \rho \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda}. \quad (10)$$

Переходя в формулах (10) на поверхность сферической Земли с радиусом R и учитывая (8), получаем:

$$\xi(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N}{\partial \varphi}, \quad \eta(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{R \cos \varphi} \cdot \frac{\partial N}{\partial \lambda}. \quad (11)$$

Полученные нами формулы (7), (8), (10), (11) отражают зависимость характеризующих фигуру геоида величин N , ξ , η от возмущающего потенциала, теория определения которого по результатам измерений рассматривается в следующих параграфах.

3 Краевая задача для возмущающего потенциала.

Сформулируем краевую задачу для отыскания возмущающего потенциала $T(P)$. Пусть точка P лежит на геоиде $W(P) = c_0$ (см. рис.3), точка Q - на эллипсоиде $U(Q) = c_0$, n - общая к этим двум поверхностям внешняя нормаль, вводя которую мы пренебрегаем здесь уклонением отвесной линии. Тогда

$$g(P) = -\frac{\partial W(P)}{\partial n} = -\frac{\partial U(P)}{\partial n} - \frac{\partial T(P)}{\partial n} = \gamma(P) - \frac{\partial T(P)}{\partial n}.$$

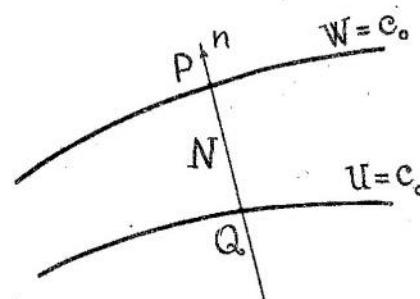


Рис.3.

Разность $g(P) - \gamma(P)$ называется чистой аномалией силы тяжести. Однако, не зная геодезической высоты точки P , мы не можем вычислить в ней значение нормальной силы тяжести $\gamma(P)$. Поэтому представим $\gamma(P)$ разложением в ряд Тейлора в окрестности точки Q , в которой значения $\gamma(Q)$ могут быть вычислены по нормальной формуле. Имеем для $\gamma(P)$:

$$\gamma(P) = \gamma(Q) + N \frac{\partial \gamma}{\partial n},$$

тогда

$$g(P) = \gamma(Q) + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Разность $g(P) - \gamma(Q) = \Delta g$ называется смешанной аномалией силы тяжести и показывает, насколько измеренное на геоиде значение реальной силы тяжести $g(P)$ отличается от вычисленной для точки Q нормального эллипсоида нормальной силы тяжести $\gamma(Q)$. Аномалия Δg называется смешанной, поскольку слагаемые, ее образующие, относятся к разным поверхностям (геоида и нормального эллипсоида). Окончательно получаем:

$$\Delta g = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (12)$$

Равенство (12) является краевым условием, которому должен удовлетворять искомый возмущающий потенциал T . Это краевое условие должно быть отнесено к какой-либо известной краевой поверхности. От того, насколько близка будет выбранная краевая поверхность к поверхности геоида $W(P) = c_0$, зависит степень близости найденного из решения краевой задачи возмущающего потенциала к его действительному значению на геоиде.

В рамках рассматриваемой теории для производных, стоящих в правой части условия (12), выполняется сферическая аппроксимация, которая позволяет заменить дифференцирование по нормали n дифференцированием по геоцентрическому радиусу-вектору ρ , полагая:

$$U = \frac{GM}{\rho}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = -\frac{2GM}{\rho^3},$$

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho},$$

откуда

$$\Delta g = -\frac{2T}{\rho} - \frac{\partial T}{\partial \rho}. \quad (13)$$

Это означает, что, проводя сферическую аппроксимацию, мы при вычислении производных $\partial \gamma / \partial n$ и $\partial T / \partial n$ пренебрегаем сжатием Земли. При этом нормальная сила тяжести γ , используемая для вычисления аномалии Δg в левой части условия (12), в (13) по-прежнему вычисляется по эллипсоидальной нормальной формуле.

Выражение (13) является краевым условием третьей (смешанной) краевой задачи по отысканию возмущающего потенциала T . Эта задача носит название задачи Стокса.

4 Решение краевой задачи в сферическом приближении.

Решение краевой задачи Стокса для возмущающего потенциала будем искать в форме разложения (5), предполагая, что краевое условие (13) удовлетворяется в точках сферы радиуса R , равного среднему радиусу Земли. Возмущающий потенциал $T(\rho, \varphi, \lambda)$ для этого случая запишем в виде

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} T_n(\varphi, \lambda), \quad (14)$$

где

$$T_n(\varphi, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Производная от возмущающего потенциала по геоцентрическому радиусу-вектору ρ будет на выбранной нами сфере равна:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = -\frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) = -\frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) T_n(\varphi, \lambda),$$

а

$$\left(\frac{2T}{\rho} \right)_{\rho=R} = \frac{2}{R} \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\varphi, \lambda).$$

Тогда сумма

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \right)_{\rho=R} = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (1-n) T_n(\varphi, \lambda),$$

что позволяет переписать условие (13) в виде:

$$\Delta g(\varphi, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) T_n(\varphi, \lambda). \quad (15)$$

С другой стороны функцию $\Delta g(\varphi, \lambda)$, как и всякую функцию, заданную на сфере, можно представить рядом по сферическим функциям:

$$\Delta g(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\varphi, \lambda). \quad (16)$$

Приравнивая (15) и (16) друг другу, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\varphi, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) T_n(\varphi, \lambda). \quad (17)$$

Согласно теореме о единственности разложения функции, заданной на сфере, в ряд по сферическим функциям два таких ряда могут быть равны лишь при условии, если коэффициенты при соответствующих сферических функциях равны. Тогда имеем:

$$\Delta g_0(\varphi, \lambda) = 0, \quad \Delta g_1(\varphi, \lambda) = 0,$$

$$\Delta g_n(\varphi, \lambda) = \frac{n-1}{R} T_n(\varphi, \lambda),$$

откуда следует:

$$T_n(\varphi, \lambda) = \frac{R \Delta g_n(\varphi, \lambda)}{n-1}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (14), приходим к так называемому ряду Стокса:

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{R \Delta g_n(\varphi, \lambda)}{n-1}. \quad (19)$$

Практическое применение ряда Стокса (19) для точного вычисления T и N сталкивается со значительными трудностями, поскольку этот ряд сходится очень медленно. По этой причине он пригоден лишь для приближенного определения возмущающего потенциала. Для повышения точности вычислений Стоксом получена интегральная формула, к выводу которой мы и переходим. Установим алгоритм, позволяющий

выразить функцию $\Delta g_n(\varphi, \lambda)$ через заданную на сфере функцию $\Delta g(\varphi, \lambda)$ смешанных аномалий силы тяжести.

Для некоторой произвольной функции $F(\rho, \varphi, \lambda)$, гармонической во внешнем по отношению к сфере Ω радиуса R пространстве, запишем решающий краевую задачу Дирихле интеграл Пуассона:

$$F(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} F(\varphi', \lambda') \left(\frac{\rho^2 - R^2}{R r^3} \right) d\Omega(\varphi', \lambda'), \quad (20)$$

где $F(\varphi', \lambda')$ - значения функции F в текущей точке интегрирования по сфере. Проведем преобразование ядра интеграла (20), учитывая, что по теореме косинусов

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi, \quad \text{откуда} \\ r^2 + 2R\rho \cos \psi - 2R^2 &= \rho^2 - R^2, \end{aligned}$$

и

$$\frac{\rho^2 - R^2}{R r^3} = \frac{r^2 + 2R\rho \cos \psi - 2R^2}{R r^3} = \frac{1}{Rr} - \frac{2}{r^3} (R - \rho \cos \psi).$$

Дифференцируя формулу косинусов по R , имеем:

$$r dr = (R - \rho \cos \psi) dR, \quad \text{следовательно, } \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{R - \rho \cos \psi}{r}.$$

Тогда

$$\frac{\rho^2 - R^2}{R r^3} = \frac{1}{Rr} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{1}{Rr} + 2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right),$$

что позволяет переписать формулу (20) в виде:

$$F(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} F(\varphi', \lambda') \left[\frac{1}{Rr} + 2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega(\varphi', \lambda'). \quad (21)$$

Разложим ядро интеграла (21) по степеням ρ :

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi), \quad \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi).$$

Подстановка этих рядов в (20) приводит к

$$F(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} F(\varphi', \lambda') \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) \right] d\Omega.$$

Меняем местами операторы интегрирования и суммирования:

$$F(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \iint_{\Omega} F(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\Omega(\varphi', \lambda'),$$

приходим к

$$F(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} F_n(\varphi, \lambda), \quad (22)$$

где

$$F_n(\varphi, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} F(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda'), \quad (23)$$

а ω - поверхность сферы единичного радиуса.

Применим формулу (22) к ряду (16), получая интегральное равенство, аналогичное (23):

$$\Delta g_n(\varphi, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \quad (24)$$

Подстановка (24) в (19) дает решение краевой задачи (13) в виде ряда:

$$T = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} \iint_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \quad (25)$$

Введем обозначение:

$$S(\rho, \psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (26)$$

Функция $S(\rho, \psi)$ называется обобщенной функцией Стокса.

Подстановка (26) приводит ряд (25) к интегральному виду:

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\rho, \psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \quad (27)$$

Обобщенная функция Стокса (26) может быть также выражена и в замкнутой форме [1, с.88]:

$$S(\rho, \psi) = \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{5R \cos \psi}{\rho^2} - \frac{3R \cos \psi}{\rho^2} \cdot \ln \frac{r + \rho - R \cos \psi}{2\rho}. \quad (28)$$

5 Вычисление высот геоида относительно общего земного эллипсоида.

Выход формул, позволяющих вычислять характеристики фигуры геоида по измерениям силы тяжести, проведем, опираясь на соотношения (8) и (11), устанавливающие связь искомых параметров - высоты геоида N и составляющих уклонения отвесной линии ξ и η с возмущающим потенциалом T , представленным интегральной формулой (27).

Возмущающий потенциал на поверхности сферы Ω радиуса R , следуя (27), запишем как

$$T(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \quad (29)$$

При этом обобщенная функция Стокса (26) связана с входящей в (29) поверхностной функцией Стокса $S(\psi)$ соотношением

$$S(\rho, \psi) = \frac{1}{R} S(\psi), \quad S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (30)$$

Замкнутое выражение для $S(\psi)$ возможно получить из равенства (28), приняв $\rho = R$ и $r = 2R \sin \frac{\psi}{2}$:

$$\begin{aligned} S(\psi) &= 1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 6 \sin \frac{\psi}{2} - \\ &- 3 \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Разделив (29) на γ и учитывая формулу Брунса (8), получим интегральную формулу Стокса для определения высот (ондуляций) геоида N по результатам гравиметрических измерений:

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int \int \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \quad (32)$$

Формула (32) позволяет в точке (φ, λ) вычислить высоту геоида относительно Нормальной Земли (или общего земного эллипсоида) при выполнении следующих условий:

- масса Нормальной Земли равна массе Земли;
- геометрический центр Нормальной Земли располагается в центре масс Земли;
- потенциалы силы тяжести на поверхности Нормальной Земли и поверхности геоида совпадают: $W(P) = U(Q) = c_0 = \text{const}$;

- смешанные аномалии силы тяжести известны по всей поверхности Земли;
- все притягивающие массы сосредоточены внутри поверхности геоида.

Перепишем (32), обозначив

$$F(\psi) = S(\psi) \sin \psi, \\ N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\psi, A) F(\psi) dA d\psi, \quad (33)$$

где A - азимут направления дуги ψ , стягивающей точку вычисления с координатами φ, λ и текущую точку интегрирования с координатами φ', λ' (см. рис. 4).

Функция $F(\psi)$ называется функцией Гельмерта и, по существу, играет роль весовой функции, определяющей вклад аномалии Δg , относящейся к той или иной конкретной точке; в интегральное значение вычисляемой ондуляции. Интегрирование в (33) ведется по всей поверхности Земли; а это означает, что для каждой элементарной площадки интегрирования должно быть известно значение аномалии Δg . Анализ поведения функции Гельмерта показывает, что влияние аномалий областей, далеких от точки вычисления, почти не уменьшается с ростом углового расстояния ψ . Другими словами, на всем интервале изменения аргумента функции $F(\psi)$ ($0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$) при проведении интегрирования по формуле (33) требуется одинаково точно учитывать аномалии по всей поверхности Земли, как в точках, расположенных вблизи точки вычисления, так и в точках, находящихся в противоположном от нее полушарии.

Учет влияния аномалий в удаленных точках может быть выполнен следующим образом. Область интегрирования по

ψ в формуле (33) разбивается на две (или более) области:

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \left[\int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g F(\psi) dA d\psi + \int_{\psi_0}^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g F(\psi) dA d\psi \right],$$

Установлено, что для $\psi > 30^\circ$ ядро второго двойного интеграла на всем интервале интегрирования по ψ меняется достаточно плавно, а, следовательно, этот интеграл можно упростить. Процедура упрощения, как правило, сводится к замене измеренных в дальних зонах аномалий их модельными значениями, вычисляемыми путем суммирования конечного числа членов разложения Δg в ряд (50) по сферическим функциям (см. параграф 7). Коэффициенты этого ряда вычисляются по априорно задаваемым моделям геопотенциала значениям коэффициентов $\{C_{nm}, S_{nm}\}$, которые определяются динамическими методами спутниковой геодезии.

В заключение параграфа заметим также, что, как в 1913 году показал Пицетти, сферическая аппроксимация, осуществляемая при переходе от (12) к (13), приводит к ошибке вычисления ондуляции N порядка $N\alpha$, т.е. к ошибке для Земли не превышающей 0.3 метра. При необходимости достижения более высоких точностей, в высоты геоида и другие интересующие нас трансформанты аномального поля следует вводить так называемые эллипсоидальные поправки [4, с.244], а также перейти к следующему приближению, основанному на решении краевой задачи Молоденского [1, с.339].

6 Формула Венинг-Мейнса для составляющих уклонения отвесной линии.

Строгое соотношение между полем силы тяжести и фигурой планетарного геоида, устанавливаемое формулой Стокса, свидетельствует о возможности получения строгого соотношения между силой тяжести и направлением нормали к поверхности геоида, т.е. уклонением отвесной линии. Выше (см. параграф 2) нами были выведены формулы (11), представляющие компоненты уклонения отвесной линии ξ и η в виде частных производных от высоты геоида N по направлениям касательных к меридиану и параллели точки вычисления. По этой причине простейший способ вывода искомого соотношения состоит в дифференцировании задаваемой формулой Стокса ондуляции геоида по соответствующим направлениям. Подставляя (32) в (11), получим в сферическом приближении:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial}{\partial\varphi} \int \int \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\omega(\varphi', \lambda'), \\ \eta(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{4\pi\gamma \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \int \int \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\omega(\varphi', \lambda').\end{aligned}$$

Координаты точки вычисления (φ, λ) в неявном виде входят в функцию Стокса $S(\psi)$, в силу чего имеем:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \int \int \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} d\omega(\varphi', \lambda'), \\ \eta(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \int \int \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\cos\varphi\partial\lambda} d\omega(\varphi', \lambda').\end{aligned}\quad (34)$$

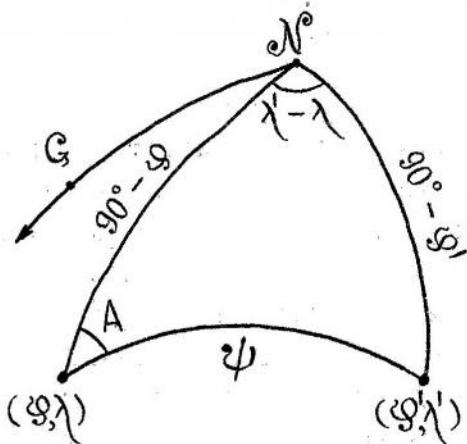


Рис.4.

Для вычисления частных производных от угла ψ по координатам φ и λ воспользуемся известными формулами сферической тригонометрии (см. рис.4):

а) формулой косинусов:

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda), \quad (35)$$

б) формулой синусов:

$$\sin \psi \sin A = \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda), \quad (36)$$

в) формулой пяти элементов:

$$\sin \psi \cos A = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda). \quad (37)$$

Продифференцируем формулу косинусов (35) по координате φ :

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda)$$

и, сравнивая результат с формулой пяти элементов (37), получаем, что

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos A.$$

Дифференцируя формулу косинусов (35) по координате λ

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos \varphi \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda)$$

и, сравнивая результат с формулой синусов (36), приходим к

$$-\frac{\partial \psi}{\cos \varphi \partial \lambda} = \sin A,$$

где A - азимут направления дуги ψ , связывающей точку вычисления с текущей точкой интегрирования. Тогда формулы (34) переписываются в виде:

$$\xi(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A d\omega(\varphi', \lambda'), \quad (38)$$

$$\eta(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin A d\omega(\varphi', \lambda').$$

в которых значения азимута A вычисляются, исходя из

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda)}{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda)}. \quad (39)$$

Для того, чтобы выразить значения составляющих уклонения отвесной линии в секундах дуги, умножим равенства (38) на $\rho'' = 206265''$ и примем обозначение:

$$Q(\psi) = -\frac{\rho''}{2\gamma} \cdot \frac{dS}{d\psi} \sin \psi. \quad (40)$$

Тогда получаем искомую формулу Венинг-Мейнеса для вычисления гравиметрических составляющих уклона отвесной линии в точке вычисления:

$$\begin{aligned}\xi''(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\psi, A) Q(\psi) \cos A d\psi dA, \\ \eta''(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\psi, A) Q(\psi) \sin A d\psi dA.\end{aligned}\quad (41)$$

Функция $Q(\psi)$, называемая функцией Венинг-Мейнеса, подобно функции Стокса в формуле (33), играет роль весовой функции, описывающей вклад конкретной аномалии в интегральные значения вычисляемых величин ξ и η . Функция Венинг-Мейнеса непрерывна в области $0 < \psi \leq \pi$, при $\psi \rightarrow 0$ $Q(\psi) \rightarrow \infty$, однако сами вычисляемые по формуле (41) компоненты всегда сохраняют конечную величину [1, с.306]. Вследствие этой особенности, при вычислениях по формуле Венинг-Мейнеса вокруг точки вычисления (при малых ψ) требуется более детальная и точная гравиметрическая информация, нежели при вычислениях по формуле Стокса. В то же время влияние удаленных от точки вычисления аномалий здесь убывает с расстоянием быстрее, чем в формуле Стокса, в силу чего формула Венинг-Мейнеса менее зависит от степени гравиметрической изученности поверхности Земли. Отметим, что в настоящее время вычисляемые по формулам (41) значения ξ и η следует рассматривать как первое приближение к определению наклонов уровенной поверхности потенциала силы тяжести относительно уровенной поверхности нормального потенциала. Опыт показывает, что в горных районах ошибки вычисляемых составляющих

уклона отвесной линии могут достигать нескольких дуговых секунд. Для уменьшения ошибки до $0.1''$ необходимо приближение следующего уровня, осуществляющее на основе решения краевой задачи Молоденского [1, с.327].

Как уже указывалось выше, при вычислениях по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса широко используется методика разложения скалярных полей, заданных на сфере, в ряд по сферическим функциям, рассмотрению которой посвящены два следующих параграфа настоящего пособия.

7 Обобщенный алгоритм трансформации скалярных полей, заданных на сфере.

Предположим, что в каждой точке принимаемой за сферу поверхности Земли заданы значения функции $f(\varphi, \lambda)$, которую в силу ее непрерывности можно представить на сфере рядом по сферическим функциям:

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\varphi, \lambda), \quad (42)$$

где

$$f_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Пусть требуется вычислить некоторую трансформанту $F(\varphi, \lambda)$ заданной функции $f(\varphi, \lambda)$, причем известно, что для $F(\varphi, \lambda)$ также правомерно разложение в ряд по сферическим функциям:

$$F(\varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} F_n(\varphi, \lambda), \quad (43)$$

где

$$F_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

В указанной постановке задача сводится к установлению аналитической связи коэффициентов разложений (42) и (43), т.е. к получению зависимости совокупности коэффициентов $\{A_{nm}, B_{nm}\}$ от совокупности коэффициентов $\{\alpha_{nm}, \beta_{nm}\}$.

Запишем общий вид преобразования $f(\varphi, \lambda)$ в $F(\varphi, \lambda)$ в интегральной форме:

$$F(\varphi, \lambda) = c \iint_{\omega} f(\varphi', \lambda') K(\psi) d\omega(\varphi', \lambda'), \quad (44)$$

где

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} K_n P_n(\cos \psi),$$

а c - некоторая постоянная. После подстановки функции $K(\psi)$ в (44) получаем:

$$\begin{aligned} F(\varphi, \lambda) &= c \iint_{\omega} \sum_{n=2}^{\infty} K_n P_n(\cos \psi) f(\varphi', \lambda') d\omega(\varphi', \lambda') = \\ &= c \sum_{n=2}^{\infty} K_n \iint_{\omega} f(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda'). \end{aligned} \quad (45)$$

На основании формулы (23) имеем:

$$f_n(\varphi, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda'),$$

откуда следует, что

$$\iint_{\omega} f(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega(\varphi', \lambda') = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\varphi, \lambda). \quad (46)$$

Подставляем (46) в (45):

$$F(\varphi, \lambda) = c \sum_{n=2}^{\infty} K_n \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\varphi, \lambda) = D \sum_{n=2}^{\infty} k_n f_n(\varphi, \lambda), \quad (47)$$

где обозначено:

$$D = 4\pi c, \quad k_n = \frac{K_n}{2n+1}. \quad (48)$$

Сравнивая (47) с (43), получаем зависимость:

$$F_n(\varphi, \lambda) = D k_n f_n(\varphi, \lambda),$$

следовательно,

$$A_{nm} = D k_n \alpha_{nm}, \quad B_{nm} = D k_n \beta_{nm}. \quad (49)$$

Возможны три варианта поведения коэффициентов k_n при росте значений индекса n :

- $k_n \gg 1$ и увеличиваются с ростом n . Это означает, что малые погрешности значений исходной функции $f(\varphi, \lambda)$, которая чаще всего есть результат непосредственных измерений, могут вызывать, вообще говоря, сколь угодно значительные возмущения искомой функции $F(\varphi, \lambda)$. Такое преобразование является неустойчивым.
- $k_n \approx 1$ и остается таким для всех n . Трансформация стабильна во всем диапазоне значений n , для которых $k_n \approx 1$. Содержащаяся в $f(\varphi, \lambda)$ полезная информация, равно как и ее шумовая составляющая, переходят в получаемую функцию $F(\varphi, \lambda)$ в том же отношении.
- $k_n \ll 1$ и уменьшаются с ростом n . Трансформация устойчива. Шумовая составляющая исходной функции $f(\varphi, \lambda)$ преобразуется в погрешности значений $F(\varphi, \lambda)$ пропорционально k_n . Вследствие подавления высокочастотной компоненты функции $f(\varphi, \lambda)$, преобразование (47) носит сглаживающий характер.

Проиллюстрируем действие описанного алгоритма на примере вычисления высоты геоида $N(\varphi, \lambda)$, которая будет таким

образом выступать в качестве искомой трансформанты поля, по заданному на поверхности сферической Земли полю $\Delta g(\varphi, \lambda)$ смешанных аномалий силы тяжести.

Разложение исходной функции аномалий $\Delta g(\varphi, \lambda)$ представим рядом:

$$\begin{aligned}\Delta g(\varphi, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\varphi, \lambda) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi),\end{aligned}\quad (50)$$

а искомой ее трансформантой $N(\varphi, \lambda)$ – рядом:

$$\begin{aligned}N(\varphi, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} N_n(\varphi, \lambda) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).\end{aligned}\quad (51)$$

Сравнение формулы Стокса (32)

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int \int_{\omega} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) d\omega(\varphi', \lambda')$$

с (44) показывает, что в этом случае

$$D = \frac{R}{\gamma}, \quad K(\psi) = S(\psi), \quad K_n = \frac{2n+1}{n-1}, \quad k_n = \frac{1}{n-1}.$$

При увеличении n , $k_n \ll 1$. Как указывалось выше, трансформация такого рода дает устойчивое решение, но обладает сглаживающими свойствами. Связь коэффициентов разложений (50) и (51) согласно (49) имеет вид:

$$\begin{aligned}A_{nm} &= \frac{R}{\gamma(n-1)} \alpha_{nm}, \\ B_{nm} &= \frac{R}{\gamma(n-1)} \beta_{nm}.\end{aligned}\quad (52)$$

Обратное преобразование $N(\varphi, \lambda)$ в $\Delta g(\varphi, \lambda)$ неустойчиво в смысле отклика вычисляемой высоты геоида на погрешности исходных данных (см. [3, с.378]).

8 Задача вычисления трансформант возмущающего потенциала и устойчивость ее решения.

Методика преобразования скалярных полей, описанная в предыдущем параграфе на примере задачи Стокса, используется при изучении различных трансформант гравитационного потенциала. Основную роль при выполнении этих преобразований, некоторые варианты которых рассмотрены ниже, играет поле возмущающего потенциала

1. Преобразование поля возмущающего потенциала в поле ондуляций геоида: $T(\varphi, \lambda) \rightarrow N(\varphi, \lambda)$.

Запишем разложения в ряды по сферическим функциям для T и N :

$$\begin{aligned}T(\varphi, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\varphi, \lambda) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi),\end{aligned}\quad (53)$$

$$\begin{aligned}N(\varphi, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} N_n(\varphi, \lambda) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi),\end{aligned}\quad (54)$$

а затем воспользуемся формулой (8) леммы Брунса, в согласии с которой

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{T(\varphi, \lambda)}{\gamma} = \quad (55)$$

$$= \frac{GM}{R\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Принимая в сферическом приближении $\gamma = GM/R^2$, имеем:

$$A_{nm} = RC_{nm}, \quad B_{nm} = RS_{nm}, \quad D = R, \quad k_n = 1.$$

2. Преобразование поля возмущающего потенциала в поле смешанных аномалий силы тяжести: $T(\varphi, \lambda) \rightarrow \Delta g(\varphi, \lambda)$.

Запишем равенство (19) для поверхности сферы

$$T(\varphi, \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} = \frac{R \Delta g_n(\varphi, \lambda)}{n-1},$$

а затем перепишем его, учитывая разложения (53) и (50):

$$\begin{aligned} T(\varphi, \lambda) &= (56) \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) = \\ &= R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, снова имея в виду, что $\gamma = GM/R^2$,

$$\alpha_{nm} = \gamma(n-1)C_{nm}, \quad \beta_{nm} = \gamma(n-1)S_{nm}, \quad D = \gamma, \quad k_n = n-1.$$

3. Преобразование поля возмущающего потенциала в поле уклонений отвесной линии: $T(\varphi, \lambda) \rightarrow \xi(\varphi, \lambda), \eta(\varphi, \lambda)$.

Воспользовавшись формулами (11), связывающими значения составляющих ξ и η уклонения отвесной линии в плоскостях меридиана и первого вертикала соответственно, с возмущающим потенциалом (53), имеем:

$$\xi(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} =$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}, \\ &\eta(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma R \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \\ &= -\sec \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-mC_{nm} \sin m\lambda + mS_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}. \end{aligned}$$

Для вычисления производной от $P_{nm}(\sin \varphi)$ прибегнем к известной формуле:

$$\frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} = -ntg\varphi P_{nm}(\sin \varphi) + (n+m)\sec\varphi P_{n-1,m}(\sin \varphi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{tg}\varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n n(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} - \\ &- \sec \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+m)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{n-1,m}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\eta = -\sec \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (mS_{nm} \cos m\lambda - C_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}.$$

Для этих же величин запишем разложение в ряд по сферическим функциям:

$$\xi = -\sec \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\kappa_{nm} \cos m\lambda + \mu_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}, \quad (58)$$

$$\eta = -\sec \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\varepsilon_{nm} \cos m\lambda + \nu_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}. \quad (59)$$

Сопоставление (57), (58), (59) приводит к

$$\kappa_{nm} = (n+m+1)C_{n+1,m} - nC_{nm} \sin \varphi,$$

$$\mu_{nm} = (n+m+1)S_{n+1,m} - nS_{nm} \sin \varphi,$$

$$\varepsilon_{nm} = mS_{nm}, \quad \nu_{nm} = -mC_{nm}.$$

В ряде случаев также используется разложение полного значения уклонения отвесной линии:

$$\begin{aligned}\vartheta(\varphi, \lambda) &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sqrt{n(n+1)} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}.\end{aligned}$$

В таблице представлены значения параметров преобразований возмущающего потенциала и некоторых его трансформант.

Исходное поле					
	<i>T</i>	<i>N</i>	Δg	ϑ	
<i>T</i>	k_n	1	1	$n-1$	$\sqrt{n(n+1)}$
	<i>D</i>	1	$1/\gamma$	$1/R$	$-1/\gamma R$
<i>N</i>	k_n	1	1	$n-1$	$\sqrt{n(n+1)}$
	<i>D</i>	γ	1	γ/R	$-1/R$
Δg	k_n	$1/(n-1)$	$1/(n-1)$	1	$\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n-1}$
	<i>D</i>	R	R/γ	1	$-1/\gamma$
ϑ	k_n	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	$\frac{n-1}{\sqrt{n(n+1)}}$	1
	<i>D</i>	$-\gamma R$	$-R$	$-\gamma$	1

Как уже указывалось выше, устойчивыми являются преобразования при значениях коэффициента $k_n \leq 1$. К их числу, судя по данным таблицы, относятся преобразования

$$\vartheta \longrightarrow \Delta g \longrightarrow N \longrightarrow T.$$

Преобразования, соответствующие обратному направлению стрелок, оказываются неустойчивыми.

9 Фигура планетарного геоида по гравиметрическим и спутниковым данным.

Фигуру планетарного геоида, служащую наиболее наглядным представлением возмущающего потенциала Земли, обычно описывают посредством карты высот, вычисляемых относительно общего земного эллипсоида. Вычисления высот геоида могут выполняться либо по данным гравиметрических измерений; либо по моделям геопотенциала, численные значения параметров которых заранее определяются методами динамической спутниковой геодезии.

Формула Стокса (32), как уже указывалось выше, позволяет провести вычисление высот планетарного геоида над общим земным эллипсоидом путем замены интегрирования суммированием по зонам, на которые разбивается вся Земля. Аномалии силы тяжести должны быть при этом практически с одинаковой точностью известны для всей поверхности Земли. Именно недостаточная гравиметрическая изученность Земли (включая акваторию Мирового океана) до середины XX столетия препятствовала применению формулы Стокса для практического исследования фигуры геоида.

Первая попытка определения фигуры планетарного геоида по формуле Стокса с использованием в качестве исходного материала 4410 значений смешанных аномалий силы тяжести была предпринята в 1933 году финским геодезистом Хирвоненом, который вычислил ондуляции N в 62 пунктах, находившихся в областях, хорошо изученных в гравиметрическом отношении. В 1952 году первую карту высот планетарного геоида, построенную по данным 26 000 гравиметрических измерений, опубликовал советский ученый И.Д.Жонголович. Используя формулу Стокса, финский геодезист В.Гейсканен в 1958 году построил карту высот геоида северного полушария, сопоставление которой с картой Жонголовича показало, что главной причиной несовпадения этих карт по-прежнему остается недостаточная гравиметрическая изученность Земли.

Прорыв в области исследований фигуры планетарного геоида был достигнут благодаря интенсивному развитию спутниковой геодезии. К концу прошлого века аномалии силы тяжести, определенные в результате совместной обработки гравиметрических и спутниковых данных (в том числе данных спутниковой альtimетрии), были с необходимой для интегрирования точностью известны в каждой из 56 800 равновеликих трапеций размером $1^\circ \times 1^\circ$ по всей поверхности Земли, включая ее моря и океаны. Многопараметрические модели геопотенциала, получаемые по этим материалам, позволяют с достаточной подробностью изучать фигуру планетарного геоида, ее геометрические особенности, а также статистические свойства ее характеристик.

Следуя работе [3, с.390], выполним оценку ряда характеристик фигуры планетарного геоида, предполагая, что статистика генеральной совокупности высот геоида по всему

земному шару обладает свойствами статистики многомерной случайной функции. Вычисление высот геоида производилось при этом по формуле (55) с использованием гармонических коэффициентов модели геопотенциала GEM 10C. Математическое ожидание (среднее арифметическое) высот геоида составило $N_{\text{ср.}} = 0.8\text{м}$, а сами высоты изменялись в диапазоне $-110\text{м} \leq N \leq +80\text{м}$. Выяснилось, что распределение высот геоида заметно отклоняется от нормального закона по причине тесной корреляции элементов исследуемой выборки: в радиусе $\psi \approx 1500$ км имеет место почти линейная зависимость между значениями ондуляций. Это, в частности, свидетельствует о том, что фигура планетарного геоида характеризуется крупными волнами, обусловленными значительными аномалиями плотности в теле Земли на глубинах 1500 - 2000 км.

Важно подчеркнуть, что получаемые методами динамической космической геодезии численные значения параметров модели геопотенциала содержат информацию о таких геометрических характеристиках планетарного геоида, как отношения полуосей аппроксимирующего его общего земного эллипсоида, параметры асимметрии северного и южного полушарий, отклонения поверхности геоида от поверхности эллипсоида, координаты центра масс Земли и направления ее главных осей инерции и т.д.

Выберем в качестве фигуры относимости трехосный эллипсоид с полуосами a, b, c , полярное и экваториальное сжатия которого определяются формулами:

$$\alpha = \frac{a - c}{a}, \quad \alpha' = \frac{a - b}{a}.$$

В учебном пособии [2, с.13] нами была получена аналитиче-

ская зависимость сжатия α от второго зонального коэффициента C_{20} разложения гравитационного потенциала Земли в ряд шаровых функций:

$$\alpha = -\frac{3}{2}C_{20} + \frac{q}{2}.$$

Экваториальное сжатие α' связано с секториальным коэффициентом C_{22} формулой [5, с.344]:

$$\alpha' = 6C_{22}.$$

Глобальная асимметрия северного и южного полушарий планетарного геоида в первую очередь характеризуется зональной гармоникой третьей степени [5, с.344]:

$$\Delta N_3 = 2RC_{30}.$$

На рисунке 5 приведена опубликованная М.Бурша карта высот планетарного геоида над двухосным общим земным эллипсоидом, построенная по численным значениям одной из наиболее ранних моделей геопотенциала SE1966. Отметим основные особенности фигуры геоида, которые легко прослеживаются на этой карте: резко выраженную отрицательную депрессию в районе Индийского океана, несколько меньшее опускание в Северной Америке и прилегающей части Тихого океана, значительное поднятие к северу от Австралии, заметное повышение на территориях северо-западной Африки и Западной Европы.

Предметом отдельного исследования могут быть характеристики экваториального и меридиональных сечений геоида. В частности на рисунке 6 приведен экваториальный профиль рассматриваемого геоида (сплошная линия). Штриховыми линиями показано экваториальное сечение трехосного

общего земного эллипсоида. На рисунке 7 изображено меридиональное сечение фигуры геоида плоскостью, содержащей большую полуось упомянутого трехосного эллипсоида (долгота большой полуоси его $\lambda_a = 21^{\circ}W$).

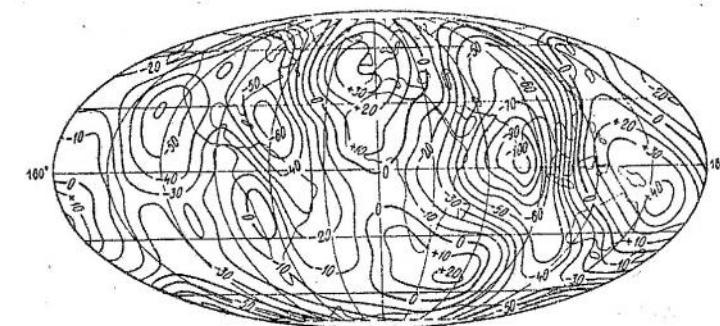


Рис.5. Карта высот геоида (высота сечения 10 м) над эллипсоидом вращения, вычисленная по модели SE(1966).

Наконец, на рисунке 8 представлена современная карта высот планетарного геоида, полученная на базе многопараметрической модели гравитационного поля Земли.

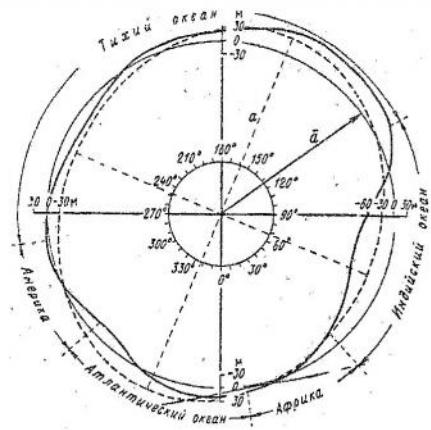


Рис.6. Экваториальный профиль высот геоида.

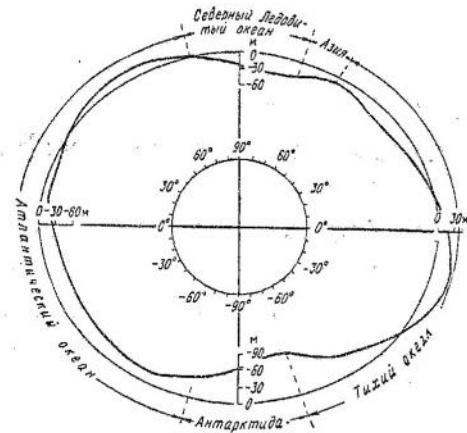


Рис.7. Меридиональный профиль высот геоида в плоскости, содержащей большую полуось трехосного эллипсоида.

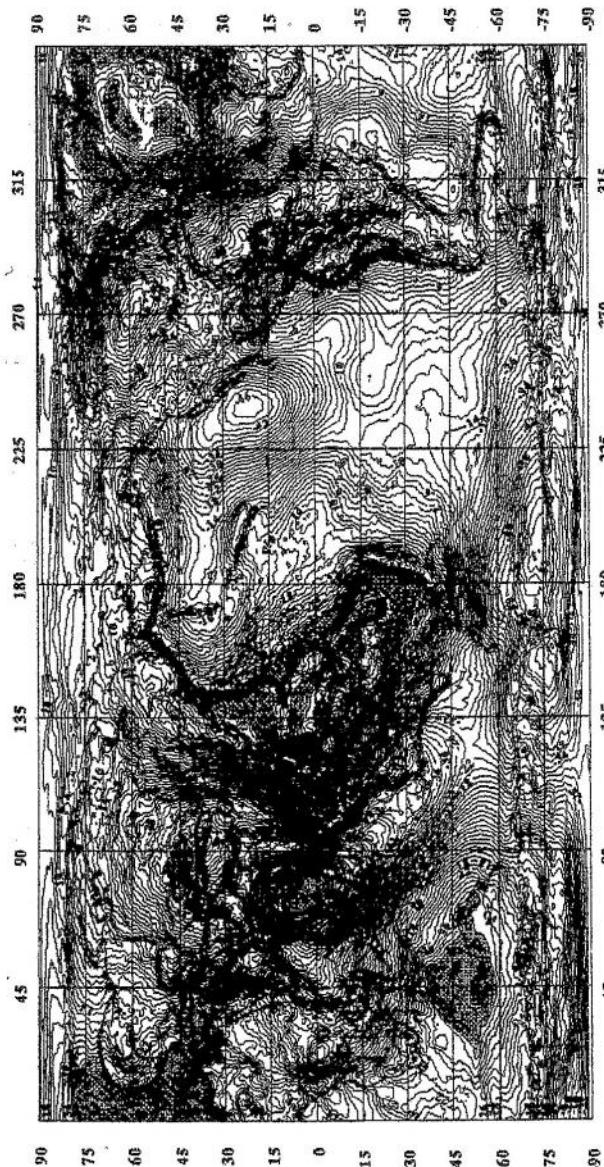


Рис.8. Карта высот геоида (высота сечения 2 м), вычисленная по модели EGM(1996).

Литература

- [1] Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. - М., Наука, 1976.
- [2] Кащеев Р.А. Фигура Земли: эллипсоидальное (нормальное) приближение. - Казань, Изд. физического ф-та КГУ, 2001.
- [3] Машимов М.М. Высшая геодезия. Методы изучения фигуры Земли и создания общеземной системы геодезических координат. - М., Изд. ВИА, 1991.
- [4] Мориц Г. Современная физическая геодезия. - М., Недра, 1983.
- [5] Шимбиров Б.П. Теория фигуры Земли. - М., Недра, 1975.