МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МОДИФИКАЦИИ КВАНТОВЫХ ГРУПП СЕРИИ $GL(2)$

Выполнил студент 4 курса
группы 05-104 Сергеев К.М.

Научный руководитель
профессор кафедры алгебры и математической логики,
доктор физико-математических наук Скрябин С.М.

Зав. кафедрой алгебры и математической логики
доктор физико-математических наук
профессор Арсланов М.М.

Казань 2015

Содержание

1 Некоторые сведения из линейной алгебры

Определение 1. Грассманианом векторного пространства V называется многообразие линейных подпространств размерности d в векторном пространстве V. Обозначается $G_d(V)$. В частности, $\mathbb{P}(V) = G_1(V)$ есть проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством V

Определение 2. Пусть K–поле, V – векторное пространство над полем K. Тогда билинейная форма на $V \times V$ – это отображение $f : V \times V \to K$, обладающее свойством: отображения $x \mapsto f(x, y)$ (при фиксированном $y \in V$)

и $y \mapsto f(x,y)$ (при фиксированном $x \in V$) являются линейными. Будем писать $\langle x, y\rangle$ вместо $f(x,y)$ в случае, когда ясно о какой билинейной форме идет речь.

Для $x \in V,\ y \in V$ пишем $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$.

Определение 3. Пусть S – подпространство векторного пространства V. Определим левое ортогональное дополнение к пространству S следующим образом: $\{x \in V | \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in S\}$. Это множество будем обозначать $S^{\perp}$.

Предложение 1. Левое ортогональное дополнение $S^{\perp}$ является векторным подпространством пространства V.

Доказательство. Пусть $x, y \in S^{\perp}$. Покажем, что $x + y$ тоже принадлежит $S^{\perp}$. Рассмотрим $\langle z, x + y\rangle$, где $z \in V$. В силу линейности: $\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle = \langle z, x + y\rangle$, причем ясно, что $\langle x, z\rangle = 0 = \langle y, z\rangle$ в силу определения.

Рассматривая $\langle x, \lambda y\rangle,\ x \in V,\ y \in S^{\perp}$ получаем нуль в силу линейности и определения $S^{\perp}$ ■

Обозначим множество всех билинейных форм из $V \times V$ в K следующим символом: $Bilin(V \times V \to K)$.

Предложение 2. Множество $Bilin(V \times V \to K)$ является векторным пространством.

Предложение 3. Отображение $\tau : V \times V \to V \otimes V$, задаваемое по правилу: $\tau(x, y) = x \otimes y$ – билинейно.

Предложение 4. Имеюстя канонические изоморфизмы векторных пространств:

1. Пространство $Bilin(V \times V \to K)$ изоморфно пространству $(V \otimes V)^*$.
2. Пространство $Bilin(V \times V \to K)$ изоморфно пространству $\mathcal{L}(V, V^*)$.
3. Пространство $(V \otimes V)^*$ изоморфно пространству линейных отображений $\mathcal{L}(V, V^*)$.

Доказательство. Построим линейнойное отображение из $Bilin(V \times V \to K)$ в $L(V \otimes V, K)$ следуюим образом: сопоставим любому билинейному отображению $\omega : V \times V \to K$ индуцированное линейное отображение $f_\omega : V \otimes V \to K,\ f_\omega = \omega \circ \tau^{-1}$.

Используя свойство универсальности тензорного произведения, а именно коммутативность диаграммы:

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\omega"] & V \otimes V \arrow[dl, "f"] \\ \text{векторное пространство } X & \end{tikzcd}$$

получаем необходимое утверждение.

Построим гомоморфизм $Bilin(V \times V \to K)$ в $\mathcal{L}(V, V^*)$.

Если $\omega : V \times V \to K$ – билинейное отображение и $x \in V$, то отображение $\phi_{\omega,x} : V \to K$, для которого $\phi_{\omega,x}(y) = \omega(x, y)$ – линейно. Отображение $x \mapsto \phi_{\omega,x}$ также линейно. Обозначим последнее через ϕ_ω. Тогда сопоставляя $\omega \mapsto \phi_\omega$, получаем необходимое.

Обратно, любое $\phi \in \mathcal{L}(V, V^*)$ есть ϕ_ω, где $\omega : V \times V \to K$ – отображение, для которого $\omega(x, y) = \phi(x)(y)$. Тогда $\phi \mapsto \omega$ определяет то, что требуется.

Из первого и второго пунктов следует третий.■

Предложение 5. Пусть V – конечномерное векторное пространство ($\dim V = n$). Тогда имеется каноническая биекция из $G_{n-1}(V)$ в $\mathbb{P}(V^*)$.

Доказательство. Пусть $W \in G_{n-1}(V)$. Относительно естественного спаривания $V^* \times V \to K$, определенного по правилу: $\langle \phi, v \rangle = \phi(v)$, ортогональное дополнение для пространства W запишется так: $W^\perp = \{\phi \in V^* | \phi(W) = 0\} \subseteq V^*$. Соответствие $W \mapsto W^\perp$ задает отображение $G_{n-1}(V) \to G_1(V^*)$.

Покажем, что существует обратное. Рассмотрим $L \in G_1(V^*)$. По аналогии можем сопоставить $L \mapsto L^\perp = \{v \in V | \phi(v) = 0,\ \forall \phi \in L\}$. Откуда получаем необходимую каноническую биекцию. ■

Предложение 6. Пусть $\omega, \omega' \in Bilin(V \times V \to K)$, ω – невырожденное. Тогда существует единственное $A = A_{\omega,\omega'} \in L(V, V)$, такое что $\omega'(u, v) = \omega(Au, v)$.

Доказательство. Обозначим $\phi = \phi_\omega, \quad \phi' = \phi_{\omega'} \in \mathcal{L}(V, V^*)$. Тогда $\phi(u) = \phi_{\omega,u}, \ \phi'(u) = \phi_{\omega',u}$, то есть $\phi(u)(v) = \omega(u,v), \phi'(u)(v) = \omega'(u,v)$. Билинейная форма ω невырождена если и только если ϕ – изоморфизм векторных пространств. Следовательно, существует обратное отображение ϕ^{-1}. Можем рассмотреть линейный оператор $A = \phi^{-1} \circ \phi'$. Тогда $\phi' = \phi \circ A$. Тогда получаем: $\phi'(v) = \phi(Av) \quad \forall v \in V$, $\phi'(v)(u) = \phi(Av)(u) \quad \forall u, v \in V$. Откуда получаем, что $\omega'(v,u) = \omega(Av,u)$ ■

Обозначим через $\phi^l_\omega \equiv \phi$ отображение, соответствующее билинейному отображению $\omega : V \times V \to K$, действующее поправилу $x \mapsto \phi_{\omega,x} = \omega(x,y)$. И соответственно через ϕ^r_ω отображение, соответствующее билинейному отображению $\omega : V \times V \to K$, действующее поправилу $y \mapsto \phi_{\omega,y} = \omega(x,y)$.

Обозначим через $Symm$ и Alt соответсвенно подпространства симметрических и альтернирующих тензоров в $V \otimes V$. Базисом $Symm$ будут являться тензоры $\{xx, xy+yx, yy\}$. Подпространство Alt имеет размерность 1 и натянуто на $xy - yx$.

2 Стандартные факты о комодулях над алгеброй Хопфа

Определение 4. Алгеброй над полем K называется тройка (A, M, μ), где A — векторное пространство над K, $M : A \otimes A \to A$ — отображение, называемое умножением, $\mu : K \to A$ называется унитарным отображением. Следующие диаграммы коммутативны:

1.
$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I \otimes M"] \arrow[d, "M \otimes I"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"] & A \end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes I"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\ A & A \otimes K \arrow[l] \arrow[u, "I \otimes \mu"'] \end{tikzcd}$$

Определение 5. Коалгеброй над полем K называется тройка (C, Δ, ϵ), где C — векторное пространство над K, $\Delta : C \to C \otimes C$ — отображение, называемое коумножением, $\epsilon : C \to K$ называется коунитарным отображением. Следующие диаграммы коммутативны:

1.
$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "I \otimes \Delta"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta \otimes I"] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd}
K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes I"'] \arrow[d, "I \otimes \epsilon"] \\
C \arrow[u] \arrow[ur, "\Delta"'] \arrow[r] & C \otimes K
\end{tikzcd}$$

Определение 6. Пусть C — коалгебра и V — подпространство, для которого $\Delta(V) \in V \otimes V$. Тогда (V, Δ', ϵ') — коалгебра (где Δ', ϵ' — ограничение на V соответствующих отображений) и ее называют подкоалгеброй коалгебры C.

Определение 7. Коалгебра C называется простой, если она не имеет ненулевой собственной подкоалгебры.

Определение 8. Если A — алгебра, то левым A–модулем называется векторное пространство N и отображение $\psi : A \otimes N \to N$, для которых коммутативны диаграммы:

1.
$$\begin{tikzcd}
K \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\mu \otimes I"'] & N \\
A \otimes N \arrow[ur, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes N \arrow[r, "I \otimes \psi"] \arrow[d, "\psi \otimes I"'] & A \otimes N \arrow[d, "\psi"] \\
A \otimes N \arrow[r, "\psi"] & N
\end{tikzcd}$$

Определение 9. Если C — коалгебра, то правым C–комодулем называется векторное пространство M и отображение $\omega : M \to M \otimes C$, для которых коммутативны диаграммы:

1. $$\begin{tikzcd} M\otimes K & M \arrow[l] \arrow[dl, "\omega"] \\ M\otimes C \arrow[u, "I\otimes\epsilon"] & \end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes M & C\otimes M \arrow[l, "I\otimes\omega"'] \\ C\otimes M \arrow[u, "\omega\otimes I"] & M \arrow[l, "\omega"'] \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

Определение 10. Ассоциативная алгебра H над полем K называется биалгеброй, если она является коалгеброй, а отображения Δ и ϵ являются гомоморфизмами алгебр.

Определение 11. Биалгебра H называется алгеброй Хопфа, если задано такое отображение $S : H \to H$, называемое антиподом, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & K \arrow[r, "\eta"] & H \\ H\otimes H \arrow[r] & H & H\otimes H \arrow[l] \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

, где $m : H\otimes H \to H$ — умножение в H, $\eta : K \to H$ — единица ($\eta(a) = a * 1_H$).

Определение 12. Антиподом $S : H \to H$ называется антигомоморфизм, для которого $S(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}S(c_{(2)}) = \epsilon(c)1, \ \forall c \in H$.

Определим $G(H) = \{g \in H | \Delta(g) = g \otimes g, \epsilon(g) = 1\}$ группу групповых элементов.

Пусть U – произвольный одномерный H – комодуль. Тогда кодействие $\rho_U : U \to U \otimes H$ определяется некоторым элементом $g \in G(H)$ так, что $\rho_U(u) = u \otimes g$. И наоборот, каждый элемент $g \in G(H)$ определят одномерный H – комодуль. Рассмотрим H –комодуль W, $\dim W = 1$, $\rho_W(w) = w \otimes g^{-1}$ для любых $w \in W$. Тогда $U' \otimes W \cong K$, причем K можно рассматривать как тривиальный комодуль с кодействием $\rho_K(\lambda) = \lambda \otimes 1$. Таким образом, $V \cong V \otimes K \cong V \otimes U' \otimes W$.

Предложение 7. Пусть H — алгебра Хопфа. Если U_1 – одномерный H–комодуль, U_2 – неприводимый H–комодуль, то $U_1 \otimes U_2$ и $U_2 \otimes U_1$ являются неприводимыми.

Доказательство. Любой H – подкомодуль в $U_2 \otimes U_1$ имеет вид $W \otimes U_1$, где W – подкомодуль комодуля U_2, так как если $W \otimes U_1$ – подкомодуль в $U_2 \otimes U_1$, то $W \cong W \otimes U_1 \otimes U_1^*$ – подкомодуль в $U_2 \otimes U_1 \otimes U_1^* \cong U_2$. Так как U_2 – неприводимый, то $W = 0$, либо $W = U_2$. Тогда $W \otimes U_1 = 0 \otimes U_1 = 0$ или $W \otimes U_1 = U_2 \otimes U_1$. Следовательно, $U_2 \otimes U_1$ – неприводимый.

Неприводимость $U_1 \otimes U_2$ доказывается аналогично. ■

Предложение 8. (**Лемма Шура.**) Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Пусть $E,\ F$ — простые H–комодули. Тогда всякий ненулевой гомоморфизм из E в F является изоморфизмом.

3 Параметризация трехмерных подпространств линейными операторами

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim V = 2$. Тогда на V существует единственная с точностью до пропорциональности альтернирующая билинейная форма. Зафиксируем такую форму ω_0 условием $\omega_0(x, y) = 1$, $\omega_0(x, x) = 0$, $\omega_0(y, y) = 0$. Отображению ω_0 соответствует $\phi_0 = \phi_{\omega_0} : V \to V^*$, причем $\phi_0(x) = -y^*, \phi_0(y) = x^*$. Так как ω_0 – невырожденное, то ϕ_0 – изоморфизм векторных пространств.

Предложение 9. $\mathcal{L}(V, V^*) \cong \mathcal{L}(V)$ при $\dim V = 2$.

Доказательство. Так как ϕ_0 – изоморфизм векторных пространств, то существует обратное отображение $\phi_0^{-1} : V^* \to V$. Поэтому для любого $\phi \in \mathcal{L}(V, V^*$ можем построить оператор A по правилу: $A = \phi_0^{-1} \circ \phi$. Тогда сопоставляя $\forall \phi \in \mathcal{L}(V, V^*)$ линейный оператор $A = \phi_0^{-1} \circ \phi \in \mathcal{L}(V)$, получим отображение из $\mathcal{L}(V, V^*)$ в $\mathcal{L}(V)$.

Обратно. Пусть $A \in \mathcal{L}(V)$. Чтобы построить искомое отображение, достаточно взять композицию ϕ_0 и A, то есть $\phi = \phi_0 \circ A$. Тогда $A \mapsto \phi$ задает необходимое. ■

Определим $G_3^{\text{невыр}}(V \otimes V) = \{U \in G_3(V \otimes V) | V \otimes L \nsubseteq U, \forall L \in G_1(V)\}$. Можно заметить, что $U \in G_3^{\text{невыр}}(V \otimes V) \Leftrightarrow \forall L \in G_1(V)(L \otimes V \nsubseteq U)$. Имеем эквивалетности: ω – невырожденное $\Leftrightarrow L\ker\omega = 0 \Leftrightarrow R\ker\omega = 0$.

Группа $GL(V)$ действует естественно на V и на всех многообразиях $G_k(V)$: $GL(V) \times G_k(V) \to G_k(V)$ по правилу $(A, U) \mapsto A(U)$. Подгруппа скалярных операторов $K^\times Id$ действует на $\mathbb{P}(V)$ тождественно, поэтому на $\mathbb{P}(V)$ действует проективная линейная группа $PGL(V) = GL(V)/K^\times Id$.

Теорема 1.

1. Имеется каноническая биекция $G_3(V \otimes V) \cong \mathbb{P}(L(V, V))$, при котором векторному пространству $U \subset V \otimes V$ размерности 3 соответствует класс пропорциональности линейных операторов $A = A_U$ таких, что $U = (A \otimes Id)^{-1}(Symm)$.

2. Имеется вторая каноническая биекция $G_3(V \otimes V) \cong \mathbb{P}(L(V, V))$, при котором векторному пространству $U \subset V \otimes V$ размерности 3 соответствует класс пропорциональности линейных операторов $A^* = A_U^*$ таких, что $U = (Id \otimes A^*)^{-1}(Symm)$.

3. Рассмотрим действие группы $PGL(V)$ на себе при помощи сопряжений $(g, a) \mapsto gag^{-1}$ и действие на $G_3(V \otimes V)$, индуцированное гомоморфизмом $GL(V) \to GL(V \otimes V)$, определенных по правилу $g \mapsto g \otimes g$. Тогда каноническая биекция $G_3(V \otimes V)^{\text{невыр}} \cong PGL(V)$ является $PGL(V)$–эквивариантной, то есть если $g \in PGL(V), U \in G_3(V \otimes V), a = a_U \in PGL(V)$, то $a_{gU} = gag^{-1}$.

4. Соответствие $A \mapsto (\mathrm{Id} \otimes A)(Symm)$ дает $GL(V)$ – эквивариантное биективное соответствие между $PGL(V)$ и множеством $G_3^{\text{невыр}}(V \otimes V)$.

5. Матрица опреатора A^* связана с матрицей оператора A по формулам $A^* = (trA) \cdot Id - A$ и $A \cdot A^* = \det A \cdot Id$

Доказательство. В силу предложения 5 $G_3(V \otimes V) \cong G_1((V \otimes V)^*)$. В предложении 4 (пункт 2) доказан изоморфизм $(V \otimes V)^* \cong \mathcal{L}(V, V^*)$. Таким образом, каждому $U \in G_3(V \otimes V)$ соответствует линейный оператор $A_U \in \mathcal{L}(V, V)$, определенный однозначно с точностью до пропорциональности. Заметим, что $Symm = \ker f_{\omega_0}$. Тогда $(A \otimes Id)^{-1}(Symm) = \ker(f_{\omega_0} \circ (A \otimes Id))$.

Пусть $f = f_U \in (V \otimes V)^*$ – линейная форма, для которой $Kf \in G_1((V \otimes V)^*)$ соответсвует U относительно указанной выше биекции $G_3(V \otimes V) \cong G_1((V \otimes V)^*)$, то есть $\ker f = U$.

В предложении 4 и 7 построены изоморфизмы: $(V \otimes V)^* \cong Bilin(V \times V \to K) \cong \mathcal{L}(V, V^*) \cong \mathcal{V}$. В предложении 6 показано существование $A = \phi_0^{-1} \circ \phi$, такого что $\omega_0(Au, v) = \omega_(u, v)$, причем ϕ и ω соответствуют f по правилам: $\omega = f \circ \tau$ и $\phi = \phi_\omega$. Мы имеем $f = \omega \circ \tau^{-1}$ и $f_{\omega_0} = \omega_0 \circ \tau^{-1}$. Откуда $f \circ \tau(u, v) = f_{\omega_0} \circ \tau(Au, v)$. Следовательно, $f \circ \tau(u, v) = f(u \otimes v) = f_{\omega_0}(Au \otimes v) = f_{\omega_0} \circ (A \otimes Id)(u \otimes v)$.

Имеем: $f = f_{\omega_0} \circ (A \otimes Id)$. Тогда $\ker f = (A \otimes Id)^{-1}(\ker f_{\omega_0}) = (A \otimes Id)^{-1} Symm$.

Докажем второе утверждение. Выберем представители A класса a_U и A_{gU} класса a_{gU}. По теореме 1 имеем: $U \mapsto A_U$ так, что $U = (A_U \otimes Id)^{-1}(Symm)$. Так как $gU = (g \otimes g)U$, то $gU \mapsto A_{gU}$ так, что $(g \otimes g)(U) = (A_{gU} \otimes Id)^{-1}(Symm)$. С другой стороны, подставляя U из первого равенства, получим:

$$(g \otimes g)(U) = (g \otimes g)(A_U \otimes Id)^{-1}(Symm) =$$

$$= \{t \in V \otimes V | (g \otimes g)^{-1}(t) \in (A_U \otimes Id)^{-1}(Symm)\} =$$

$$= \{t \in V \otimes V | (A_U \otimes Id) \circ (g^{-1} \otimes g^{-1})(t) \in Symm\}$$

. Рассмотрим теперь $(A_U \otimes Id) \circ (g^{-1} \otimes g^{-1}) = (A_U g^{-1} \otimes g^{-1}) = (g^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (g A_U g^{-1} \otimes Id)$.

Заметим, что пространство $Symm$ инвариантно относительно операторов $g \otimes g$, где $g \in GL(V)$.

Таким образом, $(g \otimes g)(U) = \{t \in V \otimes V | (g^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (gA_U g^{-1} \otimes Id)(t) \in Symm\} = \{t \in V \otimes V | (gA_U g^{-1} \otimes Id) \in Symm\} = (gA_U g^{-1} \otimes Id)^{-1}(Symm)$. Отсюда следует: $a_g U = g a_U g^{-1}$.

Докажем третье утверждение. Если A – обратим, то $(A \otimes Id)^{-1}(Symm) = (A^{-1} \otimes Id)(Symm) = (A^{-1} \otimes Id)(A \otimes A)(Symm) = (Id \otimes A)(Symm)$.

Докажем последнее утверждение теоремы.

Применим отображения к базисным элементам. Пусть $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ — матрица формы ω в базисе x, y, то есть $f_{11} = f(x \otimes x)$, $f_{12} = f(x \otimes y)$, $f_{21} = f(y \otimes x)$, $f_{22} = f(y \otimes y)$. Имеем следующее $\phi^r_\omega(u)(v) = \omega(v, u) = f(v \otimes u)$. Тогда, расписывая векторы u и v по базису, получим: $\phi^r_\omega(u)(v) = \phi^r_\omega(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(\mu_1 x + \mu_2 y) = f((\mu_1 x + \mu_2 y) \otimes (\lambda_1 x + \lambda_2 y)) = \mu_1\lambda_1 f(x \otimes x) + \mu_1\lambda_2 f(x \otimes y) + \mu_2\lambda_1 f(y \otimes x) + \mu_2\lambda_2 f(y \otimes y) = f_{11}\mu_1\lambda_1 + f_{12}\mu_1\lambda_2 + f_{21}\mu_2\lambda_1 + f_{22}\mu_2\lambda_2$. Тогда матрица ϕ^r_ω запишется $\phi^r_\omega = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$.

Помимо ϕ^l_ω и A в дальнейшем понадобятся их правосторонние варианты ϕ^r_ω и A^*. Определим $A^* = \phi_0^{-1} \circ \phi^r_\omega$.

Попробуем написать матрицу для отображения ϕ^l_ω. Тогда $\phi^l_\omega(u)(v) = \phi^l_\omega(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(\mu_1 x + \mu_2 y) = f((\lambda_1 x + \lambda_2 y)) \otimes (\mu_1 x + \mu_2 y)) = \mu_1\lambda_1 f(x \otimes x) + \mu_2\lambda_1 f(x \otimes y) + \mu_1\lambda_2 f(y \otimes x) + \mu_2\lambda_2 f(y \otimes y) = \mu_1\lambda_1 f_{11} + \mu_2\lambda_1 f_{12} + \mu_1\lambda_2 f_{21} + \mu_2\lambda_2 f_{22}$. Следовательно, матрица отображения будет иметь вид $\phi^l_\omega = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$.

Матрица отображения ϕ_0 будет иметь вид $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Из всех предыдущих выкладок получаем:

$$A = (\phi_0)^{-1} \circ \phi^l_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{21} & -f_{22} \\ f_{11} & f_{12} \end{pmatrix};$$

$$A^* = (\phi_0)^{-1} \circ \phi^r_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{12} & -f_{22} \\ f_{11} & f_{21} \end{pmatrix}.$$

Найдем выражение A^* через A:

$$AA^* = \begin{pmatrix} -f_{21} & -f_{22} \\ f_{11} & f_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_{12} & -f_{22} \\ f_{11} & f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12}f_{21} - f_{22}f_{11} & 0 \\ 0 & f_{12}f_{21} - f_{22}f_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\det A & 0 \\ 0 & tr - \det A \end{pmatrix} = -\det A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det A \cdot Id;$$

$$A - A^* = \begin{pmatrix} -f_{21} + f_{12} & 0 \\ 0 & f_{12} - f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} trA & 0 \\ 0 & trA \end{pmatrix} = trA \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = trA \cdot Id.$$

Из этих соотношений получаем: $-(detA) \cdot Id = AA^* = -(trA) \cdot A + A^2$. Откуда получаем: $A^* = -(trA) \cdot Id + A$.■

Из предыдущих утверждений имеем следующую цепочку эквивалентностей: $A = \phi_0^{-1} \circ \phi$ – невырожденное $\Leftrightarrow$ ϕ–изоморфизм $\Leftrightarrow$ ω – невырожденное (так как $\ker\phi = L\ker\omega$) $\Leftrightarrow \quad \forall u \in V(\omega(u, V) = 0 \Rightarrow u = 0) \Leftrightarrow \quad \forall u \in V(f(u \otimes V) = 0 \Rightarrow u = 0) \Leftrightarrow \quad \forall u \in V(u \otimes V = 0 \Rightarrow u = 0) \Leftrightarrow \forall L \in G_1(V)(L \otimes V \nsubseteq U)$.

4 Параметризация одномерных подпространств

Имеем цепочку изоморфизмов: $V \otimes V \cong \mathcal{L}(V^*, V) \cong \mathcal{L}(V, V)$. Рассмотрим тензор $t \in V \otimes V$ такой, что $U' = Kt$. Построим отображение $h_t^r : V^* \to V$ такое, что $h_t^r(\xi) = (Id \otimes \xi)(t)$, и отображение $h_t^l : V^* \to V$ такое, что $h_t^l(\xi) = (\xi \otimes Id)(t)$.

Так как $\dim V = 2$, то существует выделенный тензор $t_0 = xy - yx \in Alt$. Этому тензору существуют две биекции: $h_{t_0}^r$ и $h_{t_0}^l$, определяемые также, как и в общем случае.

Таким образом, получим два линейных оператора $B = h_t^l \circ \psi^{-1}$ и $B^* = h_t^r \circ \psi^{-1}$.

Рассмотрим тензор $t = u \otimes y + v \otimes x$. Его можем записать, разложив вектора u и $v \in V$ по базису векторного пространства V. Тогда тензор t примет вид: $t = (t_{12}x + t_{22}y) \otimes y + (t_{11}x + t_{21}y) \otimes x$, где $t_{ij} \in K,\ i, j = 1, 2$. Вычислим

h_t^r. Возьмем $\xi \in V^*$. Тогда $h_t^r(\xi) = (Id \otimes \xi)(t_{12}xy + t_{22}yy + t_{11}xx + t_{21}yx) = t_{11}x\xi_1 + t_{12}x\xi_2 + t_{21}y\xi_1 + t_{22}y\xi_2 = (t_{11}x + t_{21}y)\xi_1 + (t_{12}x + t_{22}y)\xi_2$. Тогда матрица оператора h_t^r запишется так: $h_t^r = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$. В частности при $t = t_0$ имеем $t_{11} = 0,\ t_{21} = -1,\ t_{12} = 1,\ t_{22} = 0$. Тогда матрица этого оператора имеет вид: $h_{t_0}^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Окуда получим, что $B_t^* = h_t^r \circ (h_{t_0}^r)^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & -t_{11} \\ t_{22} & -t_{21} \end{pmatrix}$.

По-прежнему рассматриваем тензор t, записанный через базисные элементы. Вычислим h_t^l. Возьмем $\xi \in V^*$. Тогда $h_t^l(\xi) = (\xi \otimes Id)(t_{12}xy + t_{22}yy + t_{11}xx + t_{21}yx) = t_{11}\xi_1 x + t_{12}\xi_1 y + t_{21}\xi_2 x + t_{22}\xi_2 y = \xi_1(t_{11}x + t_{12}y) + \xi_2(t_{12}x + t_{22}y)$. Тогда матрица оператора h_t^l запишется так: $h_t^l = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}$. В частности при $t = t_0$ имеем $t_{11} = 0,\ t_{21} = -1,\ t_{12} = 1,\ t_{22} = 0$. Тогда матрица этого оператора имеет вид: $h_{t_0}^r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. А для оператора B_t получим следующее:

$B_t = h_t^l \circ (h_{t_0}^l)^{-1} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_{21} & t_{11} \\ -t_{22} & t_{12} \end{pmatrix}$.

Теорема 2.

1. Имеется каноническая биекция $G_1(V \otimes V) \cong \mathbb{P}(L(V,V))$, при которой векторному пространству $U \subset V \otimes V$ размерности 1 соответствует класс пропорциональности линейных операторов $B = B_U$ таких, что $U = (B \otimes Id)(Alt)$.

2. Имеется вторая каноническая биекция $G_1(V \otimes V) \cong \mathbb{P}(L(V,V))$, при которой векторному пространству $U \subset V \otimes V$ размерности 1 соответствует класс пропорциональности линейных операторов $B^* = B_U^*$ таких, что $U = (Id \otimes B^*)(Alt)$.

3. Операторы B и B^* связаны друг с другом следующими соотношениями:

$B^* = (trB) \cdot Id - B$; $B \cdot B^* = (\det B) \cdot Id$.

4. Рассмотрим действие группы $PGL(V)$ на себе при помощи сопряжений $(g, b) \mapsto gbg^{-1}$ и действие на $G_1(V \otimes V)$, индуцированное гомоморфизмом $GL(V) \to GL(V \otimes V)$, определенных по правилу $g \mapsto g \otimes g$. Тогда каноническая биекция $G_1 \cong PGL(V)$ является $PGL(V)$ – эквивариантной, то есть если $g \in PGL(V)$, $U \in G_1(V \otimes V)$, $b = b_U \in PGL(V)$, то $b_{gU} = gbg^{-1}$.

5. Соответствие $B \mapsto (B \otimes Id)(Alt)$ дает $GL(V)$ – эквивариантное биективное соответствие между $PGL(V)$ и множеством $G_1^{\text{невыр}}(V \otimes V)$.

Доказательство. $U = Kt$, где $t = u \otimes y + v \otimes x$, $u, v \in V$. Очевидно, $t \neq 0 \Leftrightarrow u \neq 0$ или $v \neq 0$. По тензору t построим линейный опертор следующим образом: $Bx = u$, $By = -v$. Проверим, что тогда $(B \otimes Id)(t_0) = U$.

Имеем: $(B \otimes Id)(t_0) = (B \otimes Id)(x \otimes y - y \otimes x) = Bx \otimes y - By \otimes x = u \otimes y + v \otimes x$.

Утверждение 2 этой теоремы доказывается аналогично.

Найдем соотношения между B_t^* и B_t, используя их матрицы.

$$B_t B_t^* = \begin{pmatrix} -t_{21} & t_{11} \\ -t_{22} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{12} & -t_{11} \\ t_{22} & -t_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_{12}t_{21} + t_{11}t_{22} & t_{21}t_{11} - t_{11}t_{21} \\ -t_{22}t_{12} + t_{12}t_{22} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det B_t & 0 \\ 0 & \det B_t \end{pmatrix};$$

$$B_t^* B_t = \begin{pmatrix} t_{12} & -t_{11} \\ t_{22} & -t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_{21} & t_{11} \\ -t_{22} & t_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det B_t & 0 \\ 0 & \det B_t \end{pmatrix};$$

$$B_t^* + B_t = \begin{pmatrix} t_{12} & -t_{11} \\ t_{22} & -t_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t_{21} & t_{11} \\ -t_{22} & t_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} trB_t & 0 \\ 0 & trB_t \end{pmatrix}.$$

Докажем предпоследнее утверждение теоремы. Выберем представители B класса b_U и B_{gU} класса b_{gU}. По теореме 3 имеем: $U \mapsto B_U$ так, что $U = (B_U \otimes Id)(Alt)$. Так как $gU = (g \otimes g)U$, то $gU \mapsto B_{gU}$ так, что $(g \otimes g)(U) = (B_{gU} \otimes Id)(Alt)$. Подставляя U из первого равенства для него, получим:

$$(g \otimes g)(U) = (g \otimes g)(B \otimes Id)(Alt) =$$

$$= (gB \otimes g)(Alt) = (gBg^{-1} \otimes Id)(g^{-1} \otimes g^{-1})(Alt) =$$

$$= (gBg^{-1} \otimes Id)(Alt),$$

так как пространство Alt инвариантно относительно действия операторов $g \otimes g$.

Таким образом, $b_{gU} = gb_U g^{-1}$.■

5 Необходимое условие существования структуры простого H–комодуля на V для произвольной алгебры Хопфа

Пусть задано разложение $V \otimes V = U \oplus U'$, где $\dim V = 2$, $\dim U = 3$, $\dim U' = 1$. В этом разделе будет сформулировано необходимое условие, при котором существует структура простого H – комодуля на V для некоторой алгебры Хопфа H такая, что U, U' будут подкомодулями в $V \otimes V$. Предположим, что такая структура существует.

Из этих условий вытекает, что $U \in G_3^{\text{невыр}}(V \otimes V)$, $U' \in G_1^{\text{невыр}}(V \otimes V)$.

Проверим для U'. Рассмотрим свертку $V^* \otimes V \otimes V \to V$, заданную по правилу: $\xi \otimes u \otimes v \mapsto \langle \xi, u \rangle v$. Это — гомоморфизм H – комодулей.

Образ $V^* \otimes U' \to V$ будет подкомодулем в V. Если $U' \subseteq V \otimes L$ для некоторого $L \in G_1(V)$, $L \neq 0$, то этот образ содержится в L, что противоречит неприводимости V.

Проверим для U. Рассмотрим $V \to V \otimes V \otimes V^*$, заданное по правилу $v \mapsto v \otimes (x \otimes x^* + y \otimes y^*)$ — гомоморфизм H – комодулей.

Полный прообраз $U \otimes V^*$ будет H – подкомодулем в V (если $U \supseteq LotimesV$ для некоторого $L \in G_1(V)$, то этот прообраз содержит в себе L, но не равен V (если бы он был равен V, то $x \otimes (x \otimes x^* + y \otimes y^*) \in U \otimes V^*$ и $y \otimes (x \otimes x^* + y \otimes y^*) \in U \otimes V^*$. Тогда $x \otimes x,\ x \otimes y,\ y \otimes x,\ y \otimes y \in U$), что противоречит непрерывности U.

Имеем следующую цепочку отображений $Kt \hookrightarrow V \otimes V \to Kt$, где i – вложение Kt в пространство $V \otimes V$, p – проекция с ядром U. Оба отображения являются гомоморфизмами H – комодулей. Зафиксируем изоморфизм векторных пространств $U' \cong K$, при котором $t \mapsto 1_K$.

Обозначим $A^* = \phi_0^{-1} \circ \phi_\omega^r$; $B^* = h_t^r \circ \psi^{-1}$; $\psi^{-1} = \phi_0$.

Выберем ω так, что $\ker f_\omega = U$ и, кроме того, $f_\omega(t) = 1$. Отсюда вытекает

$$
\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dd, "\cong"] \\
V \otimes V \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "f_\omega"'] & \\
 & K
\end{tikzcd}
$$

коммутативность диаграммы:

Проверим коммутативность диаграммы.

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes U' \arrow[r, "Id \otimes i"] \arrow[d, "\cong"] & V \otimes V \otimes V \arrow[r, "p \otimes Id"] \arrow[dr, "f_\omega \otimes Id"] & U' \otimes V \arrow[d, "\cong"] \\
V \arrow[ur] \arrow[r, "\phi_\omega^l"] \arrow[dr, "A"] & V^* \arrow[r, "h_t^l"] & V \\
 & V \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[ur, "B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность двух треугольников наверху очевидна. Равенство $\phi_\omega^l = \psi^{-1} \circ A$ вытекает из определения A и того, что $\psi^{-1} = \phi_0$. Формула $B = h_t^l \circ \psi^{-1}$ уже известна с учетом того, что $\psi = h_{t_0}^l$. Остается проверить коммутативность центральной части диаграммы. Отображения $V \otimes Kt \hookrightarrow V \otimes V \otimes V \to Kt \otimes V$ действуют по правилам: $v \mapsto v \otimes t \mapsto (f_\omega \otimes Id)(v \otimes t)$. Запишем тензор t символически: $t = \sum t_{(1)} \otimes t_{(2)}$. Вычислим $(f_\omega \otimes Id)(v \otimes t) = \sum f_\omega(v \otimes t_{(1)})t_{(2)} = \sum \omega(v, t_{(1)})t_{(2)} = \sum \phi_{\omega,v}(t_{(1)})t_{(2)}$. Используя формулу $h_t^l(\xi) = (\xi \otimes Id)(t) = \sum \xi(t_{(1)})t_{(2)}$, можем переписать последнее равенство: $\sum \phi_{\omega,v}(t_{(1)})t_{(2)} = h_t^l(\phi_{\omega,v}) =$

$(h^l_t \circ \phi_\omega)(v)$. Поэтому $(f_\omega \otimes Id)(v \otimes t) = (h^l_t \circ \phi_\omega)(v)$.

Рассмотрим другую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U' \otimes V \arrow[r, "i \otimes Id"] \arrow[d, "\cong"] & V \otimes V \otimes V \arrow[r, "Id \otimes p"] \arrow[dr, "Id \otimes f_\omega"] & V \otimes U' \arrow[d, "\cong"] \\
V \arrow[ur] \arrow[r, "\phi^r_\omega"] \arrow[dr, "A^*"] & V^* \arrow[r, "h^r_t"] & V \\
& V \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[ur, "B^*"] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативность двух верхних треугольников также очевидна. Равенство $\phi^r_\omega = \psi^{-1} \circ A^*$ вытекает из определения A^* и того, что $\psi^{-1} = \phi_0$. Формула $B^* = h^r_t \circ \psi^{-1}$ уже известна с учетом того, что $\psi = h^l_{t_0}$. Проверим коммутативность центральной части диаграммы. Отображения $U' \otimes V \hookrightarrow V \otimes V \otimes V \to V \otimes U'$ действуют по правилам: $v \mapsto t \otimes v \to (id \otimes f_\omega)(t \otimes v)$. Вычислим $(Id \otimes f_\omega)(t \otimes v) = \sum f_\omega(t_{(2)} \otimes v)t_{(1)} = \sum \omega(t_{(2)}, v)t_{(1)} = \sum \phi^r_{\omega,v}(t_{(2)})t_{(1)}$. Используя формулу $h^r_t(\xi) = (Id \otimes \xi)(t) = \sum \xi(t_{(2)})t_{(1)}$, можем переписать последнее равенство: $\sum \phi^r_{\omega,v}(t_{(2)})t_{(1)} = h^r_t(\phi^r_{\omega,v}) = (h^r_t \circ \phi^r_\omega)(v)$. Поэтому $(Id \otimes f_\omega)(t \otimes v) = (h^r_t \circ \phi^r_\omega)(v)$.

Отображения $Id \otimes i,\ p \otimes Id,\ i \otimes Id,\ Id \otimes p$ являются гомоморфизмами H – комодулей. Отсюда $(p \otimes Id)(Id \otimes i)(Id \otimes p)(i \otimes Id) \in End^H(U' \otimes V)$, где $End^H(U' \otimes V) = \{f : U' \otimes V \to U' \otimes V,$ где f – гомоморфизм$\}$.

Получили диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U' \otimes V \arrow[r, "(p \otimes Id)(Id \otimes i)(Id \otimes p)(i \otimes Id)"] \arrow[d, "\cong"] & U' \otimes V \arrow[d, "\cong"] \\
V \arrow[r, "BAB^*A^*"] & V
\end{tikzcd}.$$

Тогда по лемме Шура $End^H(U' \otimes V) \cong KId$, так как $U' \otimes V$ – неприводимый комодуль, отсюда $\lambda Id = BAB^*A^*$. Следовательно, имеем: $BAB^{-1}A^{-1} = \mu Id \Leftarrow BA = \mu AB$. Или же в $PGL(V)$ получаем, что классы операторов просто коммутируют: $ba = ab$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. Пусть V – векторное пространство размерности 2, $V \otimes V = U \oplus U'$, где $\dim U = 3, \dim U' = 1$. Если структура простого H–комодуля на V существует для некоторой алгебры Хопфа, то U и U' будут невырожденными и классы операторов $a, b \in PGL(V)$, соответствующие подпространствам U и U', коммутируют.

6 Классификация невырожденных коммутирующих операторов

В этом разделе поставим локальную задачу. Необходимо найти все операторы из $GL(V)$, которые бы подчинялись условию $BA = \mu AB$.

Матрицы операторов можно описать с помощью ЖНФ. Для операторов, действующих на векторном пространстве размерности 2, существует несколько вариантов. Выберем базис $v_1,\ v_2$ пространства V так, чтобы

1. Матрица оператора B имеет одно собственное значение, которому отвечает жорданова клетка порядка два. Тогда матрицу можем представить в виде $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Без ограничения обности можем считать (так как нас интересуют только операторы, подчиненные условию $BA = \mu AB$), что матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $p \neq 0$.

2. Матрица оператора B имеет два различных собственных значения, которым отвечают две клетки порядка 1. Тогда матрицу оператора можем представить в виде $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Снова без ограничения общности можем считать, что матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, где $p \neq 1$.

3. Матрица оператора B имеет одно собственное значение, которому соответсвует две жордановы клетки порядка 1. Тогда матрицу представляем в виде $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Без ограничения общности можем считать, что оператор является тождественным, то есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица оператора B имеет вид как в пункте 1, то есть $B = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $p \neq 0$. Получаем систему уравнений $B \cdot A = \mu A \cdot B$, то есть $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}\, p + a_{11} & a_{22}\, p + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mu \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}\, \mu & \mu\, (a_{11}\, p + a_{12}) \\ a_{21}\, \mu & \mu\, (a_{21}\, p + a_{22}) \end{pmatrix}$. Отсюда имеем решения

$$[a_{11} = r_1, a_{12} = r_2, a_{21} = 0, a_{22} = r_1, \mu = 1],$$

$$[a_{11} = 0, a_{12} = r_1, a_{21} = 0, a_{22} = 0, \mu = 1],$$

$$[a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 0, \mu = r_1].$$

При $\mu = 1$ только имеем невырожденную матрицу A, которая имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$. Это можно представить в виде $\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмторим второй случай. Пусть матрица оператора B имеет вид как в пункте 2, то есть $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$. Изменим базисные вектора так, чтобы матрица оператора B имела жорданову нормальную форму. Пусть v_1 и v_2 - собственные векторы оператора B такие, что $Bv_1 = v_1$, $Bv_2 = pv_2$. Получаем систему уравнений на определение элементов матрицы A: $BAv_1 = \mu Av_1, \quad BAv_2 = \mu p v_2$. Осюда следует, что Av_1 и Av_2 — собственные вектора матрицы B с собственными значениями μ и $\mu \cdot p$ соответственно. Если $\mu = 1$, то $\mu p = p$. Тогда $Av_1 \in \langle v_1 \rangle$,

$Av_2 \in \langle v_2 \rangle$. Тогда матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

Если $\mu = p$ и $p \neq 1$, то $\mu p \neq p$ и из второго условия на μ имеем $\mu p = 1$, тогда $p^2 = 1$, отсюда $p = -1$. Тогда матрица A будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$. Покажем, что этот случай нас не устраивает, то есть в этом случае одномерное подпространство будет содержаться в трехмерном. Действительно, тензор $t = -p \cdot x \otimes y + y \otimes x$, построив форму f по матрице A, получим $f = -y^* \otimes y^* + qx^* \otimes x^*$, тогда трехмерное пространтсво натягивается на $\langle x^2 + qy^2, xy, yx \rangle$, в котором содержится тензор t.

Рассмотрим третий случай. Пусть матрица оператора B имеет вид как в пункте 3, то есть $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. С этой матрицей коммутирует все, поэтому можем включить этот слйчай в первый или во второй.

7 Достаточное условие

7.1 Краткое описание процесса получения алгебры Хопфа из условия коммутирования операторов

В этом разделе будет описана процедура получения алгебры Хопфа H из условия инвариантности подпространств U и U' относительно кодействия H.

Определение 13. $Coend(V) = (EndV)^*$ – коалгебра, двойственная алгебре эндоморфизмов.

Структура левого модуля $(EndV) \otimes V$ соответствует структуре правого комодуля $V \to V \otimes CoendV$. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – базис V, $\{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ – базис $EndV$ такой, что $E_{ij}x_j = x_i$. Пусть $\{X_{ij}\}$ – двойственный базис $Coend(V)$. Поэтому $\langle X_{ij}, E_{pq} \rangle = \delta_{ip}\delta_{jq}$.

Сопоставим $x_j \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes X_{ij}$ – отображение из V в $v \otimes Coend(V)$. Пусть

$A \in End(V)$, тогда действие A на базисных элементах пространства V запишется как $Ax_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle X_{ij}, A \rangle x_i$. Положим теперь $A = E_{pq}$, тогда $Ax_j = 0$, если $q \neq j$, иначе $E_{pj}x_j = x_p$. Коумножение и коунитарное отображение на коалгебре $Coend(V)$ зададим следующим образом: $\Delta X_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}$, $\epsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$.

Запишем теперь свойство универсальности для коалгебры $Coend(V)$. Для любой пары (C, ρ), где C – коалгебра, $\rho : V \to V \otimes C$ – структура правого C–комодуля существует единственный гомоморфизм коалгебр $\phi : Coend(V) \to C$ такой, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & V \otimes Coend(V) \arrow[dd, "Id \otimes \phi"] \\ V \arrow[ur, "\text{каноническое отображение}"] \arrow[dr, "\rho"'] & \\ & V \otimes C \end{tikzcd}.$$

Рассмотрим теперь биалгебру $T(Coend(V))$, которая является свободной алгеброй, порожденную $\{X_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$.

Запишем сойство универсальности для этой биалгебры. Для любой пары (B, ρ), где B – биалгебра, $\rho : V \to V \otimes B$ – структура правого B – комодуля существует единственный гомоморфизм биалгебр $\phi : T(Coend(V)) \to B$ такой, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & V \otimes Coend(V) \subseteq V \otimes T(Coend(V)) \arrow[dd, "Id \otimes \phi"] \\ V \arrow[ur, "\text{каноническое отображение}"] \arrow[dr, "\rho"'] & \\ & V \otimes B \end{tikzcd}$$

Сначала будем искать биалгебру B, кодействующую на V с аналогичным условием инвариантности. Рассмотрим универсальную кодействующую биалгебру $T(Coend(V))$. Если I — произвольный биидеал в $N(Coend(V))$, то

$N(Coend(V))/I$ имеет структуру биалгебры и кодействие $\rho : V \to V \otimes T(Coend(V))$ индуцирует кодействие $\overline{\rho} : V \to V \otimes T(Coend(V))/I$. Тогда также возникает кодействие $\rho_2 : V \otimes V \to V \otimes V \otimes T(Coend(V))/I$.

Положим $B = T(Coend(V))/I$, где I – наименьший идеал алгебры $T(Coend(V))$, удовлетворяющий условиям $\rho_2(U) \subseteq U \otimes B$, $\rho_2(U') \subseteq U' \otimes B$. Из общих соображений следует, что этот идеал I автоматически будет биидеалом.

Так как $\dim U' = 1$, то кодействие $\rho_2|_{U'}$ дается формулой $u \mapsto u \otimes \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D} \in G(B)$, то есть $\Delta(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ и $\epsilon(\mathfrak{D}) = 1$. В давльнейшем в каждом из возникающих случаях будет проверено, что $\mathfrak{D}$ — неделитель нуля в B и множество $\{\mathfrak{D}^n | n \geq 0\}$ удовлетворяет условию Оре. Следовательно, можно построить кольцо частных $H = B[\mathfrak{D}^{-1}]$. При этом на H распространяется структура биалгебры.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & B \otimes B \arrow[d] \\
B[\mathfrak{D}^{-1}] \arrow[r, dashed] & B[\mathfrak{D}^{-1}] \otimes B[\mathfrak{D}^{-1}]
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & K \\
B[\mathfrak{D}^{-1}] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}.$$

Будет показано, что H обладает антиподом, то есть является алгеброй Хопфа.

Так как U и U' инфариантны относительно кодействия B, то U и U' будут инвариантны относительно кодействия H. Далее имеем вложение коалгебр: $Coend(V) \hookrightarrow B \hookrightarrow H$. Первое включение следует из того, что I порождается элементыми степени 2, а второе включение из условия Оре. Так как V – неприводимый $Coend(V)$ – комодуль, то V остается неприводимым относительно H.

В разделах 3 и 4 U и U' были параметризованы элементами $a, b \in PGL(V)$.

Из неоходимого условия, найденного в разделе 5, следует, что $ab = ba$. Таки пары элементов были классифицированы в разделе 6. Рассмотип по очереди каждый случай этой классификации и найдем образующие идеала I в явном виде.

Пусть $U' = Kt'$, $U = \ker f$, где $t \in V \otimes V$, $f \in (V \otimes V)^*$, и пусть $A, B \in GL(V)$ – операторы, соответстующие U и U'.

7.2 Случай, когда оператор имеет в ЖНФ две жордановы клетки порядка 1 с различными собственными значениями

Рассмотрим случай $B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$. Тогда соответствующие им тензор $t \in V \otimes V$ и линейная форма $f \in (V \otimes V)^*$ записываются по формулам:

$$t = -p \cdot x \otimes y + y \otimes x;$$

$$f = q \cdot x^* \otimes y^* - y^* \otimes x^*.$$

Снова будем опускать знаки умножения и тензорного произведения.

Будем искать биалгебру $B = T(Coend(V))/I$, где I – некоторый биидеал.

Подпространство U, соответствующее A, есть ядро отображения f: $\ker f = \langle x^2, y^2, xy + qyx \rangle$

Запишем условия инвариантности U отосительно структуры H–комодуля ρ_2.

1. $\rho_2(x^2) = (xa + yc)^2 = x^2a^2 + xyac + yxca + y^2c^2 = x^2a^2 + y^2c^2 + (xy + qyx)ac + yx(ca - qac) \equiv yx(ca - qac) \mod (U \otimes T(Coend(V))$;

2. $\rho_2(y^2) = (xb+yd)^2 = x^2b^2+xybd+yxdb+y^2d^2 = x^2b^2+y^2d^2+(xy+qyx)bd+ yx(db - qbd) \equiv yx(db - qbd) \mod (U \otimes T(Coend(V))$;

3. $\rho_2(xy+qyx)=x^2(qba+ab)+yx(cb+qda)+xy(ad+qbc)+y^2(cd+qdc)=$ $x^2(qba+ab)+(xy+qyx)(ad+qbc)+yx(cb+q(da-ad-qbc))+y^2(cd+qdc)\equiv$ $yx(cb+q(da-ad-qbc)) \mod (U\otimes T(Coend(V))$;

Следовательно, в идеал добавляем элементы $ca-qac,\ db-qbd,\ cb+q(da-ad-qbc)$.

Посчитаем ρ_2 от тензора t. Получим $\rho_2(yx-pxy)=x^2(ba-pab)+yx(da-pcb)+xy(bc-pad)+y^2(dc-pcd)=(yx-pxy)(da-pcb)+xy(bc-pad+p(da-pcb))+y^2(dc-pcd)+x^2(ba-pab)$. Отсюда получаем, что нужно добавить в идеал еще три элемента: $bc-p(ad-da+pcb),\ dc-pcd, ba-pab$.

Таким образом, идеал имеет следующий вид $I=\{ca-qac,\ db-qbd,\ cb+q(da-ad-qbc),\ bc-p(ad-da+pcb),\ dc-pcd, ba-pab\}$.

Вычислим базис Гребнера этого идеала. Введем следующий порядок на образующих алгебры: $\{a,b,c,d\}$. Рассмотрим подробнее элементы 3 и 4 из идеала, старший моном и в 3, и в 4 есть da. Поделим третий на q, четвертый на p, вычтем из третьего четвертый, получим: $(q^{-1}+p)cb-(p^{-1}+q)bc=pcb-qbc=q^{-1}cb-p^{-1}bc$. Отсюда получаем следующие соотношения:

$$ca=qac;$$

$$db=qbd;$$

$$pcb=qbc;$$

$$da=ad+(q-p^{-1})bc;$$

$$dc=pcd;$$

$$ba=pab.$$

Квантовый детерминант вышел равным $\mathfrak{D}=da-pcb$, преобразуем его, используя предыдущие равенства $\mathfrak{D}=da-pcb=ad+pcb-(q-p^{-1})bc=ad-(q-p^{-1})bc+qbc=ad-p^{-1}bc$.

Покажем, что квантовый детерминант $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Оре.

1. Рассмотрим $\mathfrak{D}a = ada - p^{-1}bca = a^2d - (p^{-1} - q)abc - p^{-1}bca = a^2d - (p^{-1} - q)abc - p^{-1}qbac = a^2d - (p^{-1} - q)abc - qabc = a^2d - p^{-1}abc = a\mathfrak{D}$. Таким образом, получено $\mathfrak{D}a = a\mathfrak{D}$.

2. Рассмотрим $\mathfrak{D}c = adc - p^{-1}bc^2 = pacd - q^{-1}cbc = q^{-1}pcad - q^{-1}cbc = q^{-1}pc\mathfrak{D}$. Отсюда получаем $\mathfrak{D}c = q^{-1}pc\mathfrak{D}$.

3. Рассмотрим $\mathfrak{D}b = adb - p^{-1}bcb = qabd - p^{-2}qb^2c = qp^{-1}bad - p^{-2}qb^2c = qp^{-1}b\mathfrak{D}$. Следовательно, $\mathfrak{D}b = qp^{-1}b\mathfrak{D}$.

4. И, наконец, $\mathfrak{D}d = ad^2 - p^{-1}bcd = dad - qbcd = dad - p^{-1}dbc = d\mathfrak{D}$. То есть $\mathfrak{D}d = d\mathfrak{D}$.

Получили соотношения $\mathfrak{D}a = a\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}c = q^{-1}pc\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}b = qp^{-1}b\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}d = d\mathfrak{D}$.

Выясним, какой вид имеет антипод. Покажем, что в данном случае антипод имеет вид: $S(Z) = \mathfrak{D}^{-1}\begin{pmatrix} d & -qb \\ q^{-1}c & a \end{pmatrix}$, где $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

На образующих биалгебры посчиатем, как действует коумножение. Общая формула для коумножения имеет вид $\Delta x_{ij} = \sum\limits_k x_{ik} \otimes x_{kj}$, тогда $\Delta a = a \otimes a + b \otimes c$, $\Delta b = a \otimes b + b \otimes d$, $\Delta c = c \otimes a + d \otimes c$, $\Delta d = c \otimes b + d \otimes d$. Также известно, что $\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1$ и $\epsilon(b) = \epsilon(c) = 0$.

Необходимо проверить следующие условия $M \circ (Id \otimes S) \circ \Delta(h) = u \circ \epsilon(h)$ и $M \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(h) = u \circ \epsilon(h)$ для любого $h \in B$. Достаточно проверить все эти условия на образующих биалгебры, имеем

$$a \cdot S(a) + b \cdot S(c) = 1;$$

$$a \cdot S(b) + b \cdot S(d) = 0;$$

$$c \cdot S(a) + d \cdot S(c) = 0;$$

$$c \cdot S(b) + d \cdot S(d) = 1.$$

Умножая первую строчку на d и третью строчку на qb слева, вычтем из первой третью, используя соотношения идеала. Получим $(da - qbc) \cdot S(a) = d$, откуда $S(a) = \mathfrak{D}^{-1}d$.

Умножим первую строку на c и третью строчку на qa слева. Вычтем из первой третью, получим $(cb - qad) \cdot S(c) = c$, откуда получаем, что $S(c) = \mathfrak{D}^{-1}q^{-1}c$.

Умножим вторую строчку на d и четвертую на qb слева, вычтем из второй четвертую. Получим $(da - qbc) \cdot S(b) = -qb$, то есть $S(b) = -\mathfrak{D}^{-1}qb$.

Умножим вторую на c и третью на qa слева, вычтем из второй четвертую. Получим $(cb - qad) \cdot S(d) = -qa$, следовательно, $S(d) = \mathfrak{D}^{-1}a$.

Проверим теперь, что для всех образующих биалгебры, включая присоединенный обратный к квантовому детерминанту, удовлетворяют равенствам в фактор-биалгебре, полученным выше:

$$S(a)S(c) = q^{-1}\mathfrak{D}^{-1}d\mathfrak{D}^{-1}c = q^{-1}\mathfrak{D}^{-2}dc = q^{-1}p\mathfrak{D}^{-2}cd;$$

$$qS(c)S(a) = \mathfrak{D}^{-1}c\mathfrak{D}^{-1}d = q^{-1}p\mathfrak{D}^{-2}cd;$$

$$S(b)S(d) = q\mathfrak{D}^{-1}b\mathfrak{D}^{-1}a = q^2p^{-1}\mathfrak{D}^{-2}ba = q^2\mathfrak{D}^2ab;$$

$$qS(d)S(b) = q^2\mathfrak{D}^{-1}a\mathfrak{D}^{-1}b = q^2\mathfrak{D}^2ab$$

$$pS(b)S(c) = -pq\mathfrak{D}^{-1}b\mathfrak{D}^{-1}c = -q^2\mathfrak{D}^{-2}bc = -qp\mathfrak{D}^{-2}cb;$$

$$qS(c)S(b) = -q^2\mathfrak{D}^{-1}c\mathfrak{D}^{-1}b = -qp\mathfrak{D}^{-2}cb;$$

$$S(a)S(d) = \mathfrak{D}^{-1}a\mathfrak{D}^{-1}d = \mathfrak{D}^{-2}ad;$$

$$S(d)S(a) + (q - p^{-1})S(c)S(b) = \mathfrak{D}^{-1}d\mathfrak{D}^{-1}a - (q - p^{-1})\mathfrak{D}^{-1}c\mathfrak{D}^{-1}b$$

$$= \mathfrak{D}^{-2}(da - (q - p^{-1})q^{-1}pcb) = \mathfrak{D}^{-2}ad;$$

$$S(c)S(d) = q^{-1}\mathfrak{D}^{-1}c\mathfrak{D}^{-1}a = pq^{-1}\mathfrak{D}^{-2}ac;$$

$$pS(d)S(c) = pq^{-1}\mathfrak{D}^{-1}a\mathfrak{D}^{-1}c = pq^{-1}\mathfrak{D}^{-2}ac;$$

$$S(a)S(b) = -q\mathfrak{D}^{-1}d\mathfrak{D}^{-1}b = -q\mathfrak{D}^{-2}db = -q^2\mathfrak{D}^{-2}bd;$$

$$pS(b)S(a) = -pq\mathfrak{D}^{-1}b\mathfrak{D}^{-1}d = -q^2\mathfrak{D}^{-2}bd;$$

7.3 Случай жордановой клетки порядка 2

Рассмотрим случай $B_t = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда соответствующие им тензор $t \in V \otimes V$ и линейная форма $f \in (V \otimes V)^*$ записываются по формулам:

$$t = -x \otimes y + y \otimes x - p \cdot x \otimes x;$$

$$f = x^* \otimes y^* - y^* \otimes x^* - q \cdot y^* \otimes y^*.$$

Далее, как обычно, во всех вычислениях будем опускать знаки умножения $\cdot$ и знаки тензорного произведения $\otimes$.

Будем искать биалгебру $B = T(Coend(V))/I$, где I – некоторый биидеал.

Подпространство U, соответствующее A, есть ядро отображения f: $\ker f = \langle xy + yx, qxy - y^2, x^2 \rangle$

Запишем условия инвариантности U отосительно структуры H–комодуля ρ_2.

1. Для первого элемента оболочки:

$$\rho_2(xy + yx) = (xa + yc)(xb + yd) + (xb + yd)(xa + yc) =$$

$$= x^2ab + yxcb + xyad + y^2cd + x^2ba + yxda + xybc + y^2dc =$$

$$= x^2(ab + ba) + yx(cb + da) + xy(ad + bc) + y^2(cd + dc) =$$

$$x^2(ab + ba) + (yx + xy)(cb + da) + xy(ad + bc - cb - da) + y^2(cd + dc) =$$

$$x^2(ab + ba) + (xy + yx)(cb + da) +$$

$$+(qxy - y^2)(ad + bc - cb - da) + y^2(qcd + qdc + ad + bc - cb - da) \equiv$$

$$\equiv y^2(qcd + qdc + ad + bc - cb - da) \mod (U \otimes T(Coend(V)).$$

Откуда в идеал добавим элемент $qcd + qdc + ad + bc - cb - da$.

2. Для второго элемента ядра:

$$\rho_2(qxy - y^2) = q(xa + yc)(xb + yd) - (xb + yd)^2 =$$

$$= q(x^2ab + yxcb + xyad + y^2cd) - (x^2b^2 + xybd + yxdb + y^2d^2) =$$

$$= x^2(qab - b^2) + yx(qcb - db) + xy(qad - bd) + y^2(qcd - d^2) =$$

$$= x^2(qab-b^2)+(yx+xy)(qcb-db)+xy(qad-bd-qcb-db)+y^2(qcd-d^2) =$$

$$= x^2(qab - b^2) + (yx + xy)(qcb - db)+$$

$$+(qxy - y^2)(qad - bd - qcb + db) + y^2(q^2cd - qd^2 + qad - bd - qcb + db).$$

Образ второго элемента добавляет в идеал $q^2cd - qd^2 + qad - bd - qcb + db$.

3. Для третьего элемента:

$$\rho_2(x^2) = (xa + yc)^2 = x^2a^2 + xyac + yxca + y^2c^2 =$$

$$= x^2a^2 + (yx + xy)ca + xy(ac - ca) + y^2c^2 =$$

$$= x^2a^2 + (yx + xy)ca + (qxy - y^2)(ac - ca) + y^2(qc^2 + ac - ca),$$

образ которого отправляет в идеал $qc^2 + ac - ca$.

Выясним, во что переводит ρ_2 тензор t:

$$\rho_2(t) = -(xa + yc)(xb + yd) + (xb + yd)(xa + yc) - p(xa + yc)^2 =$$

$$= -px^2a^2 - x^2ab + x^2ba - pxyac - xyad+$$

$$+xybc - pyxca - yxcb + yxda - py^2c^2 - y^2cd + y^2dc.$$

Тензор t добавляет в идеал еще три элемента, таким образом, неприведенный идеал I имеет вид:

$$I = \{qcd + qdc + ad + bc - cb - da,\ q^2cd - qd^2 + qad - bd - qcb + db,\ qc^2 + ac - ca,$$

$$pa^2 + ab - p^2ac - pad - ba + pbc,\ -pa^2 - ab + ba - p^2ca - pcb + pda,\ -pc^2 - cd + dc\}$$

Введем следующий лексикографический порядок: $\{c, a, d, b\}$. Относительно этого порядка найдем базис Гребнера идеала I. Разность пятого и четвертого элементов идеала при делении на p дает элемент $pac+pca+ad+cb-bc-da$. Добавим к этому выражению первый элемент и поделим результат на 2, получим $ad-da+\frac{q}{2}(cd+dc)+\frac{p}{2}(ac+ca)$. Используя в этом выражении третий и шестой элементы, получим $da = ad+qcd+pca$. Добавляя полученное вырожение к первому элементу и применяя шестой элемент, получим $bc = cb + pca - qcd - pqc^2$. Таким образом, идеал выглядит следующим образом:

$$bc = cb + pca - qcd - pqc^2;$$

$$bd = db - q(cb - ad + d^2 - qcd);$$

$$ac = ca - qc^2;$$

$$ba = ab - p(pac + ad - bc - a^2);$$

$$da = ad + qcd + pca;$$

$$dc = cd + pc^2.$$

Из действия структуры ρ_2 на тензор t получаем квантовый детерминант $\mathfrak{D} = -pa^2 - ab + ba$, или используя предыдущие равенства $\mathfrak{D} = pac - bc + ad$.

Для квантового детерминанта $\mathfrak{D}$ проверим выполнение условий Оре.

1. Для элемента c биалгебры имеем $\mathfrak{D}c = pac^2 - bc^2 + adc = pcac - pqc^3 - cbc - pcac + qcdc + pqc^3 + acd + pac^2 = pcac - cbc - pqc^3 - pcac + qcdc + pqc^3 + cad - qc^2d + pac^2 = c\mathfrak{D} - pqc^3 - pcac + qcdc + pqc^3 - qc^2d + pac^2 = c\mathfrak{D} - pqc^3 + pqc^3 = c\mathfrak{D}$. Таким образом, $c\mathfrak{D} = \mathfrak{D}c$.

2. Теперь выясним, чему равно $a\mathfrak{D} = pa^2c - abc + a^2d = paca - pqac^2 - bac + p^2ac^2 + padc - pbc^2 - pa^2c + ada - qacd - paca = paca - pqac^2 - bca + qbc^2 + p^2ac^2 + padc - pbc^2 - pa^2c + ada - qacd - paca = \mathfrak{D}a + (p - q)\mathfrak{D}c$. Таким образом, $a\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(a + (p - q)c)$.

3. Посчитаем $d\mathfrak{D} = pdac - dbc + dad = padc + pqcdc + p^2cac - bdc - qcbc + qadc - qd^2c + qcdc + ad^2 + qcd^2 + pcad = pacd + p^2ac^2 + pqcdc + p^2cac - bcd - pbc^2 - qcbc + qadc - qd^2c + q^2cdc + ad^2 + qca^2 + pcad = \mathfrak{D}d + p\mathfrak{D}c + q\mathfrak{D}c - padc - pqac^2 + pqcdc + p^2cac - qd^2c + q^2cdc + qcd^2 + pcad = \mathfrak{D}((p+q)c + d) - pcad + pac^2d - p^2c^2a + 2p^2qc^3pqc^2a + 2pq^2c^3 + pqc^2d + p^2ac^3 + p^2c^2a - qp^2c^3 - qcd^2 - 2pqc^2d - 2p^2qc^3 + q^2c^2d + pq^2c^3 + qcd^2 + pcad = \mathfrak{D}((p+q)c+d)$. Отсюда следует, что $d\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((p+q)c+d)$.

4. Посчитаем $b\mathfrak{D} = pbac - b^2c + bad = pabc - p^3ac^2 - p^2adc + p^2bc^2 + pa^2c - bcb - pbca + qbcd + pqbc^2 + abd - p^2acd - pad^2 + pbcd + pa^2d = pacb + p^2aca - pqacd - p^2qac^2 - p^3ac^2 - p^2adc + p^2bc^2 + p^2a^2c - bcb - pbca + qbcd + pqbc^2 + adb - qacb + qa^2d - qad^2 + q^2acd - p^2acd - pad^2 + pbcd + pa^2d = q\mathfrak{D}a - q^2\mathfrak{D}c - p\mathfrak{D}d - p^2\mathfrak{D}c + \mathfrak{D}b + p\mathfrak{D}a - q\mathfrak{D}d - 2pq\mathfrak{D}c - pada + pqadc + p^2a^2c - qacb + qa^2d + q^2acd + pa^2d = \ldots = \mathfrak{D}((p+q)a - (p+q)^2c - (p+q)d + b)$. Отсюда имеем $b\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((p+q)a - (p+q)^2c - (p+q)d + b)$.

Таким образом, получили следующие соотношения с квантовым детерминантом: $c\mathfrak{D} = \mathfrak{D}c$, $a\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(a + (p-q)c)$, $d\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((p+q)c + d)$, $b\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((p+q)a - (p+q)^2c - (p+q)d + b)$.

Найдем для этой биалгебры антипод. Имеем следующие равенства:

$$\Delta a = a \otimes a + b \otimes c;$$

$$\Delta b = a \otimes b + b \otimes d;$$

$$\Delta c = c \otimes a + d \otimes c;$$

$$\Delta d = c \otimes b + d \otimes d;$$

$$\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1;$$

$$\epsilon(b) = \epsilon(c) = 0.$$

Из следующего равенства выясним, какой вид имеет антипод: $M \circ (Id \otimes S) \circ \Delta(h) = u \circ \epsilon(h)$. На образующих получаем:

$$aS(a) + bS(c) = 1;$$

$$aS(b) + bS(d) = 0;$$

$$cS(a) + dS(c) = 0;$$

$$cS(b) + dS(d) = 1.$$

Домножая слева первое равенство на d слева и вычитая из него третье равенство, домноженное на b слева, получим $(da - bc)S(a) + (db - bd)S(c) = d \equiv (da - bc)S(a) + q(cb - ad + d^2 - qcd)S(c) = d \equiv (ad - qcd + pca - bc)S(a) + q(cb - da + pca + d^2)S(c) = d \equiv (ad + qdc + pac - bc)S(a) + q(cb - da + pca + d^2)S(c) = d \equiv \mathfrak{D}S(a) + q(cb - da + pca)S(c) = d \equiv \mathfrak{D}(S(a) + qS(c)) = d \equiv S(a) + qS(c) = \mathfrak{D}^{-1}d$.

Далее, проводя аналогичные манипуляции: $(ac - ca)S(a) + (ad - cb)S(c) = -c \equiv -qc^2S(a) + (ad - bc + pca - qcd - pqc^2)S(c) = -c \equiv -qc^2S(a) + (ad - bc + pac - qcd)S(c) = -c$. Откуда получаем два важных равенства $S(c) = -\mathfrak{D}^{-1}c$ и $S(a) = \mathfrak{D}^{-1}(qc + d)$.

Приведем аналогичные выкладки для вторых двух равенств: $(ac - ca)S(b) + (ad - cb)S(d) = a \equiv -qc^2S(b) + (ad - bc + pac - qcd)S(d) = a$ и $(da - bc)S(b) + (db - bd)S(d) = -(b + qd) \equiv S(b) + qS(d) = -\mathfrak{D}^{-1}(b + qd)$. Отсюда еще два важных равенства: $S(d) = \mathfrak{D}^{-1}(a + qc); S(b) = \mathfrak{D}^{-1}(b + qd + qa + q^2c)$.

Проверим теперь, что для всех образующих биалгебры, включая присоединенный обратный к квантовому детерминанту, удовлетворяют равенствам в фактор-биалгебре, полученным выше:

$$S(b)S(c) + pS(a)S(c) - qS(d)S(c) - pqS(c)^2 =$$

$$= -\mathfrak{D}^{-1}(b + qd + qa + q^2c)\mathfrak{D}^{-1}c - p\mathfrak{D}^{-1}(qc + d)\mathfrak{D}^{-1}c + q\mathfrak{D}^{-1}(a + qc)\mathfrak{D}^{-1}c = ... =$$

$$= S(c)S(b).$$

Для оставшихся равенств проверяется аналогично.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг «Курс алгебры», Москва: Факториал-Пресс, 2001 г., 2-е издание, 557 стр.

[2] А.И. Кострикин «Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры», Москва: Физматлит, 2004 г., 2-е издание, 272 стр.

[3] А.И. Кострикин «Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра», Москва: Физматлит, 2000 г., 2-е издание, 368 стр.

[4] А.И. Кострикин «Введение в алгебру. Часть 3.Основные структуры», Москва: Физматлит, 2004 г., 2-е издание, 271 стр.

[5] Progress of Theoretical Physics Supplement No. 102, 1990 (Non-Standart Quantum Deformations of $GL(n)$ and Constant Solutions of the Yang-Baxter Equation, pp. 203 – 217)

[6] Е.Е. Демидов «Квантовые группы», Москва: Факториал, 1997 г., 128 стр.

[7] Moss E. Sweedler «Hopf algebras», W.A.Benjamin, inc.: New York, 1969, 336 p.

[8] Charles W. Curtis, Irving Reiner «Methods of representation theory with applications to finite groupa and orders», Vol.1, A Wiley-Interscience publication John Wiley & Sons: New York, 1989, 841 p.

[9] Ch. Kassel, «Quantum Groups», N.Y.: Springer, 1995, 539 p.

[10] С.Ленг, «Алгебра», Москва: Мир, 1968, 564 стр.

[11] Ф.Каш, «Модули и кольца», Москва: Мир, 1981, 367 стр.