КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт физики

Кафедра общей физики

ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические рекомендации

Казань - 2012

ПЕЧАТАЕТСЯ

по решению учебно-методической комиссии Института физики Казанского (Приволжского) федерального университета

Составители:

Нагулин К.Ю., Мухамедшин И.Р.

1. ИЗМЕРЕНИЕ И ЕГО МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Законы физики основаны на результатах экспериментов, неотъемлемым элементом которых являются **измерения** - процесс количественного сравнения некоторой характеристики с однородной ей величиной, принимаемой за единичную (эталон). Измерения делятся на прямые и косвенные. При прямом измерении результат получается непосредственно из измерения самой величины (например, измерение длины проградуированной линейкой, времени - секундомером и т.д.). Однако прямые измерения не всегда возможны или достаточно точны. В этих случаях прибегают к косвенным измерениям, при которых искомое значение величины находится по известной зависимости между ней и величинами, определяемыми в ходе прямых измерений.

Точность измерений отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины. Разность между результатом измерения некоторой величины x и его истинным значением $x_{ист}$ называется **абсолютной погрешностью** (ошибкой) измерения Δx:

$$\Delta x = x_{изм} - x_{ист}. \quad (1)$$

Качество измерения обычно характеризуется **относительной погрешностью (ошибкой)** δx, которая представляет собой отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины и часто выражается в процентах:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \cdot 100\% = \frac{x_{изм} - x_{ист}}{x_{ист}} \cdot 100\% \quad (2)$$

Формулы (1) и (2), служащие **определением** погрешностей, для практических целей непригодны, так как содержат заранее неизвестное истинное значение измеряемой величины. Поэтому при обработке результатов измерений получается лишь оценка погрешности, при этом точность этой оценки не превышает 25%.

Следует подчеркнуть, что погрешности являются неотъемлемой составляющей любого измерения – принципиально невозможно устранить все посторонние влияния на процесс измерения. Поэтому в эксперименте недостаточно измерить величину, необходимо еще корректно оценить погрешность измерения. Знание погрешности позволяет, например, сделать вывод о том, изменяется ли измеряемая величина в ходе эксперимента или нет. Также без знания погрешности нельзя сравнивать результаты измерений одной величины, выполненных разными методами в разных лабораториях. Измеренные величины могут считаться одинаковыми только в том случае, когда их разница не превышает погрешностей их измерений. Таким образом, ***конечный результат эксперимента определяется не только результатом измерения, но и его погрешностью.***

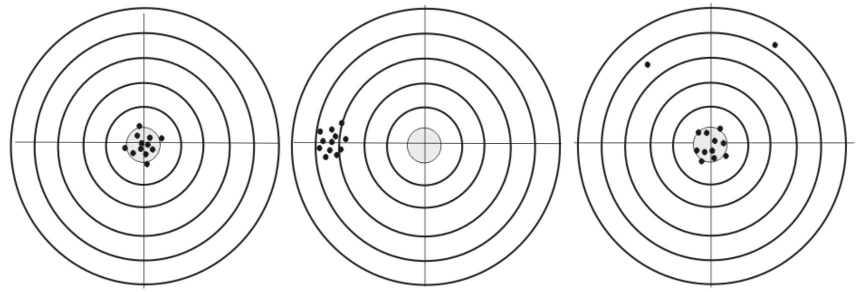
В зависимости от источников ошибок измерения различают **методические погрешности**, порождаемые несовершенством метода измерения, и **инструментальные погрешности**, обусловленные несовершенством средств измерения. По характеру проявления ошибки измерения делятся на **грубые**, **систематические** и **случайные** погрешности.

Грубая погрешность (промах) возникает вследствие неисправности аппаратуры или недосмотра экспериментатора (неправильно считано показание прибора, резкое нарушение условий измерения и др.). Эти погрешности легко выявляются, поскольку соответствующие результаты заметно отличаются от остальных. Промахи исключаются из обработки результатов измерения.

Систематические погрешности обусловлены, во-первых, несовершенством используемой аппаратуры (неравные плечи весов, смещение начала отсчета на шкале прибора, неравномерный шаг микрометрического винта и др.), а во-вторых, недостатками метода измерения вследствие невозможности учесть все факторы, влияющие на результат измерений. Отличительной особенностью систематических погрешностей является то, что они при проведении ряда однотипных последовательных измерений сохраняют свою величину и знак. Они могут быть скомпенсированы путем проверки приборов, разработки новой методики измерения, или же в ряде случаев путем внесения поправок в окончательные результаты измерений. Например, неравноплечность весов можно определить, меняя местами измеряемое тело и грузы на чашах весов, неточность шкалы электроизмерительных приборов можно установить, сравнивая его показания с показаниями более точного прибора и т. д.

Случайные погрешности обусловлены влиянием на результат измерений малых, неконтролируемых помех различной физической природы (колебания температуры, плотности воздуха, напряженности электрических и магнитных полей, флуктуационные процессы в приборах и т. п.). Эти помехи обусловливают нерегулярные, случайные изменения результатов серии измерений.

В общем случае любое измерение сопровождается как случайными, так и систематическими погрешностями. Наглядно процесс измерения можно проиллюстрировать стрельбой по мишени (рис.1). Если прицел оружия верный и на точность наводки влияют лишь случайно меняющиеся факторы (дрожь рук стрелка), то отверстия от пуль группируются вблизи центра мишени (рис.1а). Это пример случайной погрешности. Если прицел оружия сбит или стрелок не учитывает сильный боковой ветер, то все выстрелы будут ложиться в стороне от центра мишени, демонстрируя нам пример систематической погрешности (рис.1 б). В случае, когда в процессе стрельбы стрелок отвлекается, на мишени появляются отверстия, далеко отстоящие от результатов остальных выстрелов. Это грубые погрешности или промахи (рис.1 в).



(а) (б) (в)

Рис.1. Пример случайной (а), случайной и систематической (б), случайной и грубой (в) погрешностей

К метрологическим характеристикам измерений относятся также их сходимость и воспроизводимость. **Сходимость** отражает близость друг к другу результатов измерений, выполненных в одинаковых условиях (например, при параллельных измерениях одной и той же величины). **Воспроизводимость** измерения отражает близость друг к другу результатов измерений, выполненных в различное время, в разных местах, различными методами и т. д.

2. ОЦЕНКА СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Изучением поведения случайных величин занимается теория вероятностей и математическая статистика. Согласно этой теории, случайные погрешности большого числа измерений подчиняются закону нормального распределения (закону Гаусса). На практике же, при малом числе измерений, для описания случайных погрешностей используется так называемое **t**-распределение Стьюдента. Оба распределения подразумевают, что ***случайные отклонения измеренной величины от её истинного значения одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто, а также, что большие отклонения наблюдаются реже, чем малые***.

Учитывая случайный характер погрешностей эксперимента, нужно четко понимать, что в результате измерений мы можем лишь дать оценку истинному значению измеряемой величины $x_{ист}$ (т.е. указать его наиболее вероятное значение) и указать погрешность измерений (т.е. указать интервал значений, в котором с заданной вероятностью может находиться $x_{ист}$).

Пусть в ходе эксперимента мы n раз измеряем величину x, но из-за случайных погрешностей, возникающих в процессе измерения, вместо единственного истинного значения величины получаем набор значений $x_1, x_2 \ldots x_n$. В качестве оценки истинного значения мы примем среднее арифметическое $\overline{x}$ всей серии измерений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (3)$$

Еще раз подчеркнем, что $\overline{x}$ не есть истинное значение измеряемой величины, а лишь некоторое приближение к нему, т.е. $\overline{x} \neq x_{ист}$. Обозначим через α вероятность того, что среднее арифметическое значение результатов измерений $\overline{x}$ отличается от истинного значения на величину не большую, чем Δx. Тогда результат измерений можно представить в виде:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x,\ \alpha = \ldots . \qquad (4)$$

Введенная таким образом вероятность α носит название **доверительной вероятности** или коэффициента надежности. Интервал значений от $\overline{x}$ − Δx до $\overline{x}$ + Δx называется **доверительным интервалом.** Очевидно, что погрешность измерений Δx, определяющая полуширину доверительного интервала, зависит от величины доверительной вероятности: чем выше требуемая вероятность, тем шире будет доверительный интервал. Чтобы учесть это обстоятельство погрешность измерений Δx представляют в виде:

$$\Delta x = t_{\alpha,n} S_x , \qquad (5)$$

где S_x - **стандартный доверительный интервал** (так же называется выборочным среднеквадратическим отклонением или среднеквадратической

погрешности среднего) рассчитывается, используя результаты измерений, по следующей формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} . \qquad (6)$$

Величины $t_{\alpha,n}$, входящие в формулу (5), называются коэффициентами Стьюдента и в теории вероятностей табулируются для различных n и α. Их значения в практически используемом диапазоне представлены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты Стьюдента в зависимости от числа измерений n и доверительной вероятности α.

α / n	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
2	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7
3	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9
4	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8
5	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6
6	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0
7	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7
8	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5
9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4
10	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3
15	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0
20	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
∞	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6

Из выражения (6) следует, что в отсутствие систематических ошибок стандартный доверительный интервал может быть сделан сколь угодно малым за счет увеличения числа измерений. Однако для улучшения точности в 10 раз (т.е. на один порядок) необходимо провести 100 измерений ($S_x \sim \sqrt{1/n}$), что может потребовать слишком много времени. С другой стороны, по мере роста n наступает момент, когда систематическая погрешность сравнится со случайной и дальнейшее увеличение числа измерений становится бессмысленным. ***Поэтому основным путем повышения точности измерения является разработка метода с наименьшим значением*** S_x***, а не увеличение числа повторных измерений***.

Также с повышением n, согласно таблице 1, уменьшаются коэффициенты Стьюдента. Однако если при небольшом количестве измерений с ростом n это уменьшение значительно, то дальнейшее увеличение числа повторения измерений не приведет к существенному уменьшению $t_{\alpha, n}$. Поэтому на практике в зависимости от требуемой доверительной вероятности согласно данным таблицы 1 выбирают и проводят необходимый минимум повторных измерений. Например, для α=0,95 таким разумным минимальным количеством измерений n будет 3, 4 или 5 – в зависимости от трудоемкости измерений.

Значение доверительной вероятности α, с которой записывается окончательный результат, выбирают в соответствии с экономическими факторами (стоимость и трудоемкость одного измерения, допустимый процент брака и т. п.), требованиями надежности и др. В технических измерениях и химическом анализе α обычно выбирают на уровне 0,90-0,95. В практике физических исследований распространено значение α=0,68. При этом случайная погрешность Δx примерно равняется стандартному отклонению S_x (см. таблицу 1), и в таком случае окончательный результат часто

представляется без указания величины доверительной вероятности в более простом виде $x = \bar{x} \pm S_x$.

3. ОКРУГЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Поскольку погрешность измерений Δx определяется из конечного числа измерений, то и она отягощена случайной погрешностью. Величина этой погрешности, очевидно, будет тем больше, чем меньше число измерений. Оценки показывают, что при n=25 вычисленная ошибка будет верна лишь с точностью 15%, а при n=9 с точностью до 25%. Поскольку на практике число повторных измерений одной и той же величины обычно не превосходит 5-6, то следует иметь в виду, что точность оценки случайной погрешности не может быть выше 25-30%. В соответствии с этим для округления результатов измерений приняты следующие правила:

1) При записи Δx ее необходимо округлить до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры в остальных случаях. Например, неверно писать Δx=3,62 с указанием двух значащих цифр после запятой. Действительно, в пределах точности, с которой может быть оценена эта погрешность $3{,}62 \approx 4$ (ошибка округления ~10%) и поэтому использование лишних знаков лишено смысла. В то же время будет ошибкой вместо Δx=0,14 писать Δx=0,1, поскольку погрешность округления в этом случае составит уже 40%.

2) При записи $\bar{x}$ численное значение округляется до того десятичного разряда, который использовался при указании погрешности. При этом общий множитель, указывающий порядок величин $\bar{x}$ и Δx, выносится за скобки.

Округление полученных в ходе расчетов чисел производится в соответствии со следующими правилами:

1) Если первая отбрасываемая справа цифра меньше 5, то стоящая перед ней цифра остается неизменной.

2) Если первая отбрасываемая цифра больше 5, то стоящая перед ней цифра возрастает на единицу.

3) В случае, когда отбрасываемая цифра равна 5 и после нее следуют цифры больше нуля, то стоящая перед нею цифра увеличивается на единицу.

В соответствии с этими правилами одно и то же число 13,6074 для разных целей может быть записано в виде 13,607; 13,61; 13,6; 14. Ниже приведены примеры правильной и неправильной записи результатов измерений.

Правильно	Неправильно
(73 ± 6) с, α=0,95	(73,26 ± 5,81) с
(15,1 ± 1,3) г, α=0,9	(15,08523 ± 1,31844) г
$(1{,}6 \pm 0{,}6)\cdot 10^{-19}$ Кл, α=0,7	$(1{,}634\cdot 10^{-19} \pm 5{,}56\cdot 10^{-21})$ Кл

Необходимая точность промежуточных расчетов определяется тем, что расчет не должен вносить в окончательный результат дополнительной погрешности. Поэтому в промежуточных вычислениях следует сохранять один лишний знак, который при записи окончательного результата отбрасывается.

4. ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Любое измерение наряду со случайными ошибками сопровождается также приборной погрешностью, величина которой зависит от принципов работы прибора и качества его изготовления. Промышленно выпускаемый измерительный прибор снабжается паспортом, где указывается предел допускаемой погрешности. Метрологические характеристики некоторых измерительных приборов, используемых в лабораториях физического практикума, представлены в таблице 2.

Систематические погрешности электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров и др.) задаются классом точности М, который определяется как отношение абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{пр}$ в единицах длины шкалы к длине всей шкалы $x_{шк}$ и выражается в процентах:

Таблица 2. Характеристики некоторых измерительных приборов, используемых в лабораториях физического практикума

Прибор	Предел измерения	абсолютная погрешность $\Delta x_{пр}$
Измерительная линейка	1 м	200 мкм
Штангенциркуль	0,15 м	50 мкм
Микрометр	25 мм	2 мкм
Измерительный микроскоп	0,2 м	1 мкм
Лабораторные весы	200 г	50 мг

$M=(\Delta x_{пр}/x_{шк})\cdot 100\%$. Важно отметить, что погрешность прибора, определяемая его классом точности, одна и та же во всем диапазоне шкалы, поэтому желательно, чтобы стрелка при измерении заходила за середину шкалы. В этом случае относительная погрешность измерения будет значительно ниже, чем при малых отклонениях стрелки.

Зная класс точности прибора или его абсолютную погрешность, можно найти инструментальную погрешность измерительного прибора как $\Delta x_{пр}/2$. В случае отсутствия таких данных инструментальную погрешность измерительного прибора равняется половине цены минимального деления шкалы прибора.

Из теории вероятностей следует, что в силу случайного характера ошибок полная ошибка измерений Δx равняется:

$$\Delta x = \sqrt{\left(t_{\alpha,n} S_x\right)^2 + \left(\Delta x_{пр} / 2\right)^2} \quad . \qquad (7)$$

Эта величина подставляется в итоговое соотношение (4) для получения окончательного результата.

Поскольку оценка погрешности производится с точностью не лучше 25%, то в тех случаях, когда случайная ошибка меньше приборной погрешности хотя бы в 2 раза, нет смысла производить многократные измерения, поскольку полная погрешность при этом практически не уменьшается. Аналогично, если инструментальная погрешность измерительного прибора хотя бы в 2 раза меньше случайной, ее также можно не учитывать. Сложение систематических и случайных ошибок производится тогда, когда они отличаются друг от друга не более чем в 2 раза. В противном случае в качестве меры погрешности измерения следует указывать только наибольшую ошибку.

5. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Результаты отдельных измерений $x_1,...,x_n$ занести в таблицу.
2. Вычислить среднее арифметическое значение измеренной величины $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
3. Определить стандартный доверительный интервал $S_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.
4. Задать значение коэффициента надежности α (для работ физического практикума обычно 0,95) и по табл. 1 определить значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n}$, соответствующее числу проведенных измерений и выбранному α.
5. Определить (с помощью паспорта прибора или справочников) абсолютную погрешность используемого прибора $\Delta x_{пр}$.
6. Если $\Delta x_{пр} > 4t_{\alpha,n}S_x$, то окончательный результат представляется в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x_{пр}/2$. Обработка результатов на этом заканчивается.
7. Если $\Delta x_{пр} < t_{\alpha,n}S_x$, то везде в дальнейшем считается, что $\Delta x = t_{\alpha,n}S_x$.

8. Если $\Delta x_{пр} \approx 2t_{\alpha,n}S_x$, то находится результирующая среднеквадратическая погрешность измерения $\Delta x = \sqrt{\left(t_{\alpha,n}S_x\right)^2 + \left(\Delta x_{пр}/2\right)^2}$.
9. Окончательный результат представить в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x,\ \alpha = ...$
10. Вычислить относительную погрешность $\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

6. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Исследуемая величина в подавляющем большинстве случаев не измеряется непосредственно, а является некоторой функцией других физических величия, непосредственно измеряемых в эксперименте. Как отмечалось в первом разделе, такие измерения называются косвенными. Пусть интересующая нас величина w связана определенной функциональной зависимостью с несколькими непосредственно измеряемыми величинами x,y,z,...

$$w = w(x, y, z, \ldots) \qquad (8)$$

Для вычисления среднего значения величины $\bar{w}$ в формулу (13) подставляют средние значения величин $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$,

$$\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \qquad (9)$$

Поскольку прямые измерения всегда сопровождаются случайными и систематическими погрешностями, то исследуемая величина w, очевидно, также будет получена с некоторой погрешностью. Возникает вопрос: как оценить погрешность Δw при косвенном измерении?

В простейшем случае, когда w является функцией одной переменной x, а относительная погрешность измерения этой величины мала $\delta x = \Delta x/x << 1$, связь между Δw и Δx дается формулой:

$$\Delta w = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \Delta x = C_x \Delta x \quad .$$

Таким образом, в этом случае погрешность измерения величины w прямо пропорциональна погрешности непосредственно измеренной величины x, а коэффициент пропорциональности C_x представляет собой производную от w по x, взятую в точке $x = \bar{x}$

В общем случае, когда w является функцией многих переменных (8), методы математической статистики дают следующую формулу для погрешности величины w (справедливую при малых относительных погрешностях $\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ ...$ непосредственно измеренных величин):

$$(\Delta w)^2 = \left.\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}\\ \dots}} (\Delta x)^2 + \left.\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}\\ \dots}} (\Delta y)^2 + \dots \qquad (10)$$

Запись $\left.\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}$ означает частную производную функции w по переменной x, взятую при значениях аргументов $x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}, \dots$*

Прежде чем приступить к косвенным измерениям, всегда следует проанализировать расчеты и формулы, по которым будут оцениваться погрешности. Они подскажут, какие измерения следует производить особенно тщательно, а на какие можно не тратить больших усилий. Так, при измерениях, которые затем обрабатываются по формуле (10), главное внимание, очевидно, следует обратить на точность измерения величины, входящей в расчетную формулу с наибольшим показателем степени. Кроме

* Частной производной функции называют производную этой функции по соответствующему аргументу, когда остальные аргументы считаются постоянными. Например, если $w(x,y,z) = \frac{2xy}{z}$, тогда $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2y}{z}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2x}{z}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{2xy}{z^2}$.

того, нужно избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Например, некорректно определять толщину стенки трубки, вычитая ее внутренний диаметр из внешнего. В этом случае измеряемая величина мала, а ошибка в ее определении находится путем сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает. Все это приводит к резкому увеличению относительной погрешности измерения. Подобные примеры можно продолжить, но уже представленные наглядно показывают, ***как грамотный анализ расчетных формул эксперимента способствует оптимизации схемы измерения.***

7. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Любое косвенное измерение в конечном счете сводится к совокупности прямых измерений. В соответствии с этим можно рекомендовать следующую последовательность обработки результатов косвенных измерений:

1. По способу, описанному в разделе 5, вычислить средние значения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ непосредственно измеренных величин и оценить их погрешности Δx, Δy, Δz, ... При этом для всех измеренных величин задается одно и то же значение доверительной вероятности α .
2. Вычислить среднее значение косвенно измеряемой величины $\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$.
3. По формуле (10) оценить погрешность Δw косвенно измеряемой величины.
4. Окончательный результат представляется в виде $w = \bar{w} \pm \Delta w;\ \alpha = \dots$
5. Определить относительную погрешность результата косвенного измерения $\delta w = \frac{\Delta w}{\bar{w}} \cdot 100\%$.

Список литературы:

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. –Л.: Наука, 1985, 112 с.
2. Сквайрс Дж. Практическая физика. –М.: Мир, 1972, 247 с.
3. Агекян Т.А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. - М.: Наука, 1979, 169 с.
4. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений, - М.: Мир, 1968, 462 с.
5. Худсон Д. Статистика для физиков. –М.:Мир, 1970, 296 с.
6. Бурсиан Э.В. Физические приборы. –М.:Просвещение, 1984, 271 с.